普通高等教育“十二五”规划教材
面向21世纪数学课程与教学改革系列教材

高等数学(上册)

邓泽清　段春燕　陈海英　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
面向21世纪数学课程与教学改革系列教材

高等数学(上册)

邓泽清　段春燕　陈海英　主编

科学出版社
北京

版权所有，侵权必究
举报电话：010-64030229；010-64034315；13501151303

内 容 简 介

全书分上、下两册. 上册内容为函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程. 下册内容为多元函数微积分、多元函数微积分(续)、无穷级数. 每章后面附有习题，书末附有综合练习题和习题答案. 附录中有常用数学公式和图形、微积分发展简史，以便读者学习和了解微积分的发展历史.

本书内容简明，语言通俗，思路清晰，略去了一些烦琐、冗长的理论推导，增加了许多直观的几何解释和思想方法的阐述，具有广泛的适用性，可供高等院校本科各非数学专业使用，也可供读者自学这门课程使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学・上册./邓泽清，段春燕，陈海英，陈海英主编.—北京：科学出版社，2015.6

普通高等教育“十二五”规划教材

面向21世纪数学课程与教学改革系列教材

ISBN 978-7-03-044543-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①邓… ②段… ③陈… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第122090号

责任编辑：王雨舸/责任校对：肖 婷

责任印制：高 嵘/封面设计：蓝 正

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

湖北卓冠印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1000)

2015年8月第 一 版 印张：13 3/4

2015年8月第一次印刷 字数：262 100

定价：29.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

高等数学(微积分)是一门运算完备、应用广泛、充满哲理的数学学科.微积分的创立,被誉为“人类精神的最高胜利”(恩格斯《自然辩证法》),它已经成为人们研究自然科学、经济学、社会科学、生命科学的有力工具,凡是从事以上领域工作的人或多或少会因使用微积分方法而受益.但是,本课程中那些严密的理论推导和复杂的计算常常使学习这门课程的人陷入困境.使更多的人更好地掌握这门课程的基础知识和思想方法,是从事这门课程教学的教师期待解决的问题,也是我们编写这本教材的基本出发点.

本书的特点是:

(1) 本书在保留高等数学基本内容的基础上,做了两方面的工作.一是将空间解析几何和多元微积分分为两部分:多元微积分和多元微积分(续),多元微积分包括空间解析几何、偏导数、二重积分,多元微积分(续)包括向量代数、方向导数与梯度、多元微分学的几何应用、三重积分、曲线积分与曲面积分,以便不同专业、不同要求、不同学时的学生学习;二是将教师的教学体验与感悟融入教材,以便学生更好地理解和掌握本课程的解题方法.

(2) 本书好教易学,内容简明,语言通俗,思路清晰,略去了一些烦琐、冗长的理论推导,增加了许多直观的几何解释和思想方法的阐述,这对于非数学专业学生是合适的.

(3) 本书精选例题、课后习题和综合练习题,其中例题、课后习题是为学生消化、巩固基础知识准备的,综合练习题则是为学有余力的学生进一步加深对基础知识的理解、进一步熟悉本课程的解题方法准备的,使教材具有广泛的适用性.

(4) 我们将常用数学公式与图形和微积分发展简史纳入附录,前者便于学生学习时查阅,后者使学生了解微积分的发生发展过程和应用的广泛性,希望能够激发学生学习本课程的兴趣和热情.

本书由邓泽清、段春燕、陈海英任主编,朱垚、许亮、庞亮、刘英华任副主编。邓泽清教授编写了详尽的大纲,陈海英、许亮、庞亮负责第1、2章和附录1、2的编写工作,段春燕、朱垚、刘英华负责第3、4章和综合练习题及全部习题答案的编写工作.邓泽清、段春燕、陈海英审阅全部书稿,并对教材的编写提出了许多宝贵的建设

性的意见.

本书的出版得到了湖北省教改项目“独立学院数学建模与大学生实践创新能力培养研究 2012458”的大力支持，同时我们要感谢科学出版社的大力支持，感谢武汉设计工程学院的大力支持.

由于编者水平所限，错误在所难免. 对书中的不妥之处，恳请读者和使用本书的教师批评、指正.

编　者

2015 年 4 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第 1 章　函数　极限与连续

本章主要内容有：函数的基本概念，极限的概念、性质、法则、求法，函数的连续性的概念与性质.

1.1 函　数

函数是高等数学研究的对象. 读者在中学数学中学习过函数的知识，本节仅做适当的复习与补充.

1.1.1 函数的概念

定义 1.1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个实数集. 如果对于每个 $x \in D$，变量 y 按照一定法则 f 总有唯一确定的值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$. D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

当 x 取值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记为 $f(x_0)$. 全体函数值构成的集合 $R_f=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数的**值域**.

xOy 面上的点集 $\{(x,y) \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**，函数的图形通常是 xOy 面上的一条曲线.

我们通常用解析式和图形表示函数，两种方法结合起来，可以收到很好的效果，既直观，又便于运算，这种方法称为数形结合法.

定义域、对应法则是构成函数的两要素. 定义域相同、对应法则也相同的函数是同一个函数，例如 $y=|x|$ 和 $y=\sqrt{x^2}$ 表示的是同一个函数.

在不考虑函数的实际意义时，我们约定：函数用解析式给出时，函数的定义域（自变量的取值范围）是使解析式有意义的一切实数的集合.

求定义域的步骤：

(1) 根据运算要求列不等式或者不等式组（分式要求分母不等于零，开偶次方要求被开方数大于等于零，对数 $\ln x$ 要求真数 $x>0$，反正弦函数 $\arcsin x$、反余弦函数 $\arccos x$ 要求 $|x| \leqslant 1$ 等）.

(2) 解不等式或者不等式组.

例 1.1.1　求函数 $f(x)=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

解　根据运算要求,得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}>0,\\ x+2\geqslant 0,\end{cases}$$

解得 $-2\leqslant x<1$,所求定义域为 $[-2,1)$.

1.1.2　函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在实数集 X 上有定义,如果存在 $M>0$,使得任一 $x\in X$,都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

或存在 m,M,使得任一 $x\in X$,都有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 X 上**有界**.

有界函数的图形介于两条平行线之间.

例如:$|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$,所以 $\sin x$,$\cos x$ 是有界函数.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的(或递增的). 如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的(或递减的).

单调增加的函数的图形是一条沿 x 轴正方向上升的曲线,单调减少的函数的图形是一条沿 x 轴正方向下降的曲线.

例如:$\sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加,$\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上单调减少.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于任意的 $x\in D$,总有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是**偶函数**;如果对于任意的 $x\in D$,总有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 是**奇函数**.

偶函数的图形对称于 y 轴,奇函数的图形对称于原点.

例如:x,x^3,$\sin x$ 是奇函数,x^2,x^4,$\cos x$ 是偶函数.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在 $T \neq 0$,使对任意的 $x \in D$,都有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**,称 T 为 $f(x)$ 的**周期**. 通常我们所说的周期函数的周期是指**最小正周期**.

周期函数只需画出一个周期上的图形.

例如:$\sin x$,$\cos x$ 是以 2π 为周期的函数,$\tan x$,$\cot x$ 是以 π 为周期的函数.

1.1.3 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I_x、值域为 I_y. 如果 $y=f(x)$ 在 I_x 上单调,则对于每个 $y \in I_y$,总有唯一确定的 $x \in I_x$ 与它对应(图 1.1.1),因此 x 也是 y 的函数,这个函数称为 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,通常把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$.

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域、值域分别为函数 $y=f(x)$ 的值域、定义域;函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$(图 1.1.2).

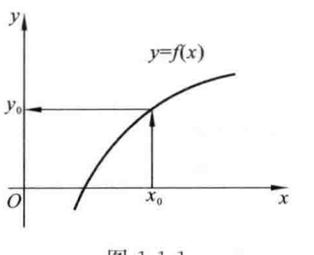

图 1.1.1

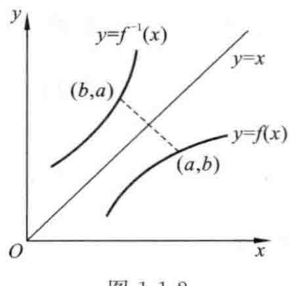

图 1.1.2

已知函数 $y=f(x)$,求反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的步骤是:先由 $y=f(x)$ 解得 $x=f^{-1}(y)$,再交换 x,y,得其反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 1.1.2 求 $y=2-3e^x$ 的反函数.

解 由 $y=2-3e^x$ 得,$e^x=\dfrac{2-y}{3}$,解得

$$x=\ln\frac{2-y}{3},$$

所求反函数为

$$y=\ln\frac{2-x}{3}.$$

1.1.4 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域与函数 $u=\varphi(x)$ 的值域的交集不是空集,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,并称 u 为**中间变量**,$y=f(u)$ 称为**外层函数**,$u=\varphi(x)$ 称为**内层函数**.

还有多个函数复合的情形,例如 $y=e^u$,$u=\cos v$,$v=1+x^2$ 构成复合函数

$$y=e^{\cos(1+x^2)}.$$

当然,一个复合函数也可以分解成几个简单函数.

例 1.1.3　已知函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,求复合函数 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}\quad(x\neq 0).$$

由例 1.1.3 看出:已知函数 $f(x)$,求复合函数 $f[\varphi(x)]$,只要以 $\varphi(x)$ 代替 $f(x)$ 中的 x.

例 1.1.4　已知复合函数 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求函数 $f(x)$.

解　我们用两种方法求函数 $f(x)$.

方法一　令 $t=x+\dfrac{1}{x}$,解得

$$x^2-tx+1=0,\quad x=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2},$$

代入复合函数,得

$$f(t)=\left(\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^2+\frac{1}{\left(\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}\right)^2}=t^2-2,$$

故
$$f(x)=x^2-2.$$

方法二
$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

令 $t=x+\dfrac{1}{x}$,则 $f(t)=t^2-2$,故

$$f(x)=x^2-2.$$

例 1.1.4 的第一种解法是已知复合函数 $f[\varphi(x)]$，求函数 $f(x)$ 的一般方法：令 $t=\varphi(x)$，解出 $x=\varphi^{-1}(t)$，代入 $f[\varphi(x)]$，求出 $f(t)$，再将 t 换成 x，得 $f(x)$.

第二种解法是先将复合函数 $f[\varphi(x)]$ 用 $\varphi(x)$ 表示出来（如果容易表示出来的话），然后将 $t=\varphi(x)$ 直接代入 $f[\varphi(x)]$，这种方法较为简便.

1.1.5　基本初等函数与初等函数

在中学数学中，我们学习过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，这五类函数称为**基本初等函数**.

1. 幂函数

$$y=x^{\alpha}\quad(\alpha\text{ 为常数}).$$

幂函数的定义域要根据 α 的取值来确定，但无论 α 取什么值，幂函数在 $(0,+\infty)$ 总有定义，它们的图形都通过点 $(1,1)$.

$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\sqrt{x}$，$y=\dfrac{1}{x}$ 是几种常见的幂函数，它们的图形如图 1.1.3 所示.

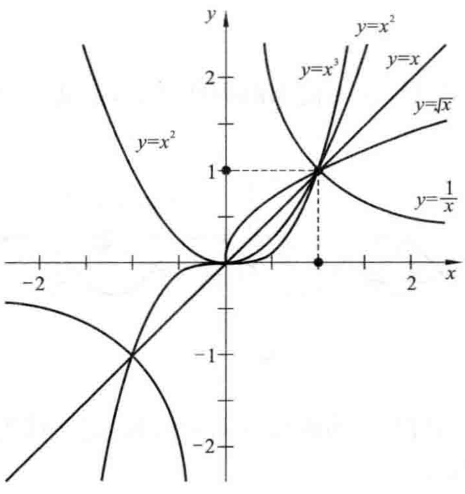

图 1.1.3

2. 指数函数

$$y=a^{x}\quad(a>0,a\neq 1).$$

指数函数 $y=a^x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$. $a>1$ 时，$y=a^x$ 单调增加；$0<a<1$ 时，$y=a^x$ 单调减少. 指数函数的图形如图 1.1.4 所示，它位于 x 轴的上方，且通过点 $(0,1)$.

以无理数 $e=2.718\,281\,8\cdots$ 为底的指数函数 $y=e^x$ 是科学技术中常用的指数函数.

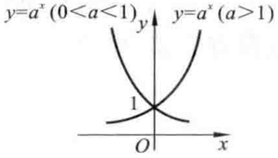

图 1.1.4

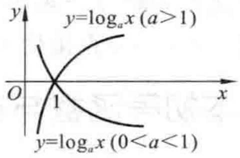

图 1.1.5

3. 对数函数

$$y=\log_a x \quad (a>0,\ a\neq 1).$$

对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数,它的定义域是$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$. $a>1$时,$y=\log_a x$ 单调增加;$0<a<1$时,$y=\log_a x$ 单调减少.对数函数的图形如图 1.1.5 所示,它位于 y 轴的右方,且通过点$(1,0)$.

以无理数 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$ 是科学技术中常用的对数函数,称为**自然对数函数**,简记为 $y=\ln x$.

4. 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,如图 1.1.6 所示.

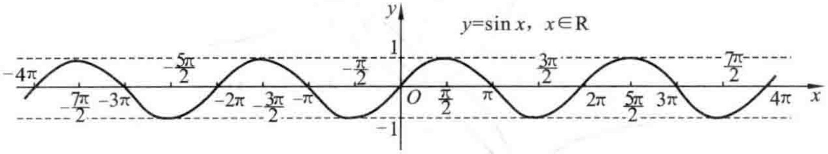

图 1.1.6

余弦函数 $y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,如图 1.1.7 所示.

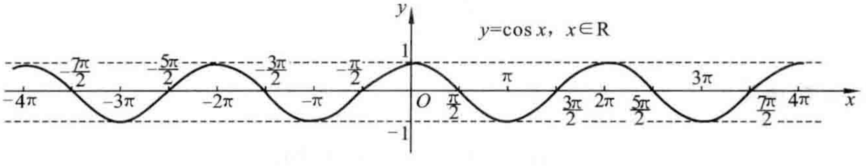

图 1.1.7

正切函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数,定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$,

值域为$(-\infty,+\infty)$,如图 1.1.8 所示.

余切函数 $y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数,定义域为 $x\neq k\pi\ (k\in \mathbf{Z})$,值域为$(-\infty,+\infty)$,如图 1.1.9 所示.

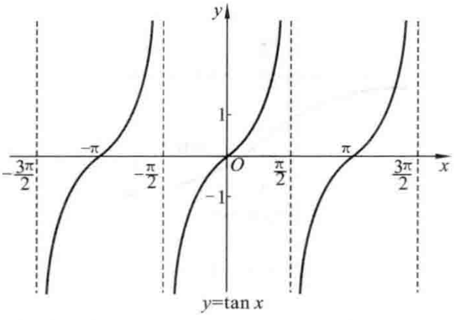

图 1.1.8

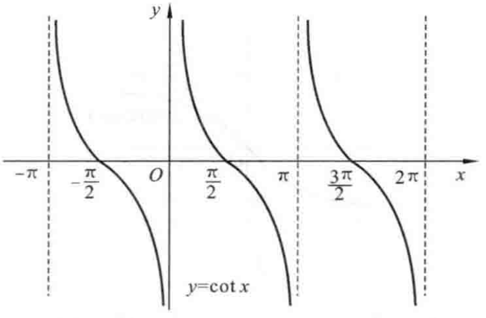

图 1.1.9

正割函数 $y=\sec x$ 是余弦函数的倒数,即 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$.

余割函数 $y=\csc x$ 是正弦函数的倒数,即 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

6 个三角函数中,只有余弦函数 $y=\cos x$、正割函数 $y=\sec x$ 是偶函数,其余 4 个都是奇函数.

5. 反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是正弦函数 $y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的反函数,它的定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,如图 1.1.10 所示.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 是余弦函数 $y=\cos x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 的反函数,它的定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,如图 1.1.11 所示.

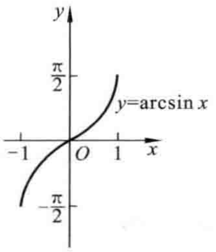

图 1.1.10

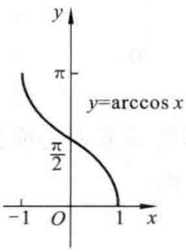

图 1.1.11

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com