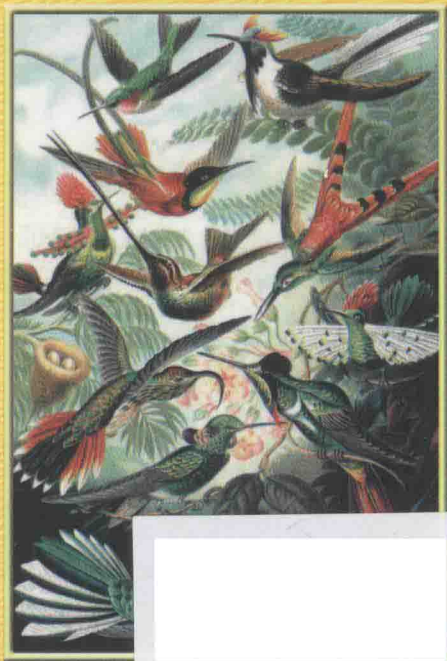


《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

易学与数学奥林匹克

欧阳维诚 著



- ◎ 《周易》对中国古代数学的影响
- ◎ 易卦与现代数学的联系
- ◎ 易卦与数学奥林匹克解题思想
- ◎ 易卦与奇偶性分析
- ◎ 用易卦思想解数学奥林匹克试题 100 例

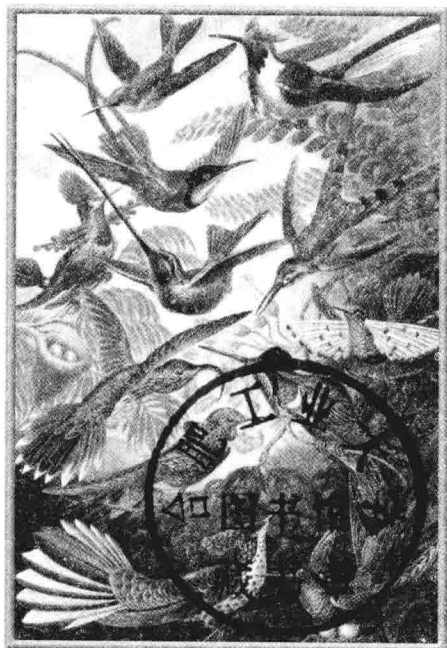


哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

易学与数学奥林匹克

欧阳维诚 著



- ◎ 《周易》对中国古代数学的影响
- ◎ 易卦与现代数学的联系
- ◎ 易卦与数学奥林匹克解题思想
- ◎ 易卦与奇偶性分析
- ◎ 用易卦思想解数学奥林匹克试题 100 例



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

《周易》这部神奇的著作从诞生之日起就与数学结下不解之缘。本书利用《周易》中的思想和符号解答了 100 个数学奥林匹克试题,并同时论述了《周易》对中国古代数学的产生和发展的影响,易卦与现代数学的联系及易卦与数学奥林匹克解题思想。

本书适合中学师生,数学竞赛选手及广大数学爱好者阅读和学习。

图书在版编目(CIP)数据

易学与数学奥林匹克/欧阳维诚著. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社, 2014. 10
ISBN 978-7-5603-4963-3

I. ①易… II. ①欧… III. ①《周易》-关系-数学-研究-中国 IV. ①O112(2)B221.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 237203 号

策划编辑	刘培杰 张永芹
责任编辑	张永芹 李欣
封面设计	孙茵艾
出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社 址	哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真	0451-86414749
网 址	http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷	哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本	787mm×960mm 1/16 印张 15.5 字数 174 千字
版 次	2014 年 10 月第 1 版 2014 年 10 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5603-4963-3
定 价	38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

内 容 提 要

《周易》这部奇书诞生之时即与数学结下不解之缘. 在近年来易学与科学关系讨论中, 易学与数学的关系是其中最基础而又典型的课题.

国际数学奥林匹克是当今世界上规模最大和影响最大的国际中学生学科竞赛活动. 利用《周易》中的思想和符号, 真的能解答现代化的数学奥林匹克试题吗? 本书用易卦思想解答了 100 个数学奥林匹克试题, 回答了这一富有挑战性和趣味性的问题.

本书还论述《周易》对中国古代数学的产生和发展的影响, 易卦与现代数学的联系及易卦与数学奥林匹克解题思想.

本书对易学与数学奥林匹克这一古代智慧与现代科学的关系的探讨, 对于古代文化与现代科学的普及传播具有特殊意义.

作者简介

欧阳维诚，男，1935年10月生，湖南宁远县人，1960年毕业于湖南师范大学数学系。曾在大、中学校任教，现为湖南教育出版社编审，中国数学奥林匹克高级教练。著有《周易新解》、《周易的数学原理》、《数学奥林匹克的理论、方法和技巧》、《文学中的数学》、《数学——科学与人文的共同基因》、《寓言与数学》、《唐诗与数学》等书。

◎ 引

论 (代前言)

《周易》这部神奇的著作,从它诞生之日起就与数学有着不解之缘.所以,在近年来关于易学与科学关系的讨论中,涉及得最多的大概是易学与数学的关系.毋庸讳言,在《周易》的《经》、《传》中不大可能包含现代科学的论述或预见,把《周易》与数学做肤浅的类比,把《周易》无限地神秘化的作法本身就是不科学的.不过,我们也必须看到,《周易》与数学在以下几个方面确有着密切的联系:

1.《周易》对中国古代数学产生过重大影响

中国古代数学家大抵都认为《周易》是中国古代数学思想的源泉.如著名数学家刘徽在为《九章算术》作注时的序言中写道:“昔在包牺氏始画八卦,以通神明之德,以类万物之情,作九九之术以合六爻之变.”他就认为,“九九之术”(即数学)是圣人为了合“六爻之变”(即《周易》)而作的.他还说:“徽幼习九章,长再详览,观阴阳之割裂,总算术之根源,探赜之暇,遂悟其意.”他认为数学的根源在于阴阳的割裂,《周易》中的阴阳变化是研究数学的基础.

另一位著名数学家秦九韶(1202—1261)也认为数学的产生“爰自河图洛书”。他发明了一次同余式组的解法,那是数学史上一项重要的成果.国际上称它为“中国剩余定理”,而秦九韶却认为它是《周易》的产物,因而称它为“大衍求一术”。

2.《周易》经传中蕴含有现代数学问题

《周易》经传本身虽然没有讨论数学的内容,但这并不排斥其中蕴含有现代数学问题.例如,揲著成卦的方法,那一套程序就与现代数学密切相关.它不仅涉及数论中的同余式,而且涉及概率分布的合理运用.又如《系辞》说:“方以类聚,物以群分.”这里所说的群未必包含了现代数学中群的概念,也不涉及用群来分类的理论(在现代科学中,群是许多事物分类的标准),但是,无论是通行本卦序,还是帛书卦序或京房卦序,其中都有许多“合群”的例子.河图洛书虽然只是简单的纵横图,但由此可导出高阶幻方的研究,那是组合学中一个重要而困难的课题,等等。

这种情况是不足为怪的.例如,用瓷砖铺地形成各种对称图案,它们都是由一个基本图案通过不同方式的延展和重复而形成的,把重复的方式当作元素,这些元素构成一种变换群,称为平面对称群.直到19世纪末期,数学家才证明,用群来分类,标准形式的对称图案只有17种.但早在13世纪以前,当数学家还没有建立群的概念的时候,在西班牙的阿尔汗布拉宫就把其中11种群表示的图案都用上了.另外6个,也很早就出现在非洲的巴库巴与贝宁部族的编织物或陶器以及中国古代的一件工艺品上.不仅是人,即使是动植物的某些现象,也严格地服从数学的原理.例如蜂巢都是六

角形的,数学上可以证明,在原料一定的前提下,这种形状的巢容积最大.某些植物的叶片在茎上的排列方式,与数学上的著名的斐波那契数列有关.因此,古老的《周易》中虽然没有明确的现代数学概念,但却可能隐含着某些现代数学的内容.不同的只是,今天的人自觉地运用数学,古人不自觉地涉及或遵循数学而已.

3. 易卦的符号系统可用以建构现代数学

现代数学研究抽象的运算和结构.易卦作为一种符号系统,是一个良好的代数结构,从易卦符号系统出发,可以建立现代数学的许多重要内容.例如,易卦的符号系统可以作为建立诸如二进制数、布尔向量、集合论、组合论、概率论、图论等现代数学分支的合适的符号或对象.在本书第2章中还要对这个问题做稍为详细的论述.

4. 易学研究可借助现代数学方法

数学方法对社会科学研究的渗透,推动了社会科学研究的现代化,也有可能促进易学研究的现代化.易学研究中有许多只涉及卦画而较少地涉及义理的课题,就可以把周易思维通过易卦来表述,易卦又可转化为数学形式,于是就可以借助于数理统计、概率分析、矩阵方法、模糊数学等数学工具对所研究的问题进行数学分析,帮助做出正确的结论.

5. 以易卦的符号为工具可以解决某些数学问题

如前所述,利用易卦符号系统可以构建某些现代数学(主要是离散数学)的内容,自然也就可以用易卦符号系统为工具,以它所能构建的数学内容为基础,解答某些特殊的数学问题.特别值得一提的是,以《周易》的阴阳对立思想为指导,以易卦符号系统为工具,可以

解答许多数学奥林匹克试题.

国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad 简称 IMO)是当今世界上规模最大和影响最大的国际中学生学科竞赛活动.如果说体育奥林匹克是人类体能的大赛,那么数学奥林匹克则是中学生智能的大赛. IMO 竞赛自 1959 年在罗马尼亚开展以来,已经进行了 40 多届.为了准备这一年一度的大赛,各国还要举行一些选拔赛、热身赛等等.各级数学奥林匹克(特别是 IMO)的试题一般地说是很难的.

利用古老的《周易》中的思想和符号,真的能解答现代化的数学奥林匹克试题吗?这是一个富有挑战性和趣味性的问题.

要回答这个问题,正是作者写作此书的原因.

1997 年全国高中数学联赛的命题工作由湖南省数学学会承担,笔者有幸参加了命题工作.在那山花似火、江水如蓝的岳麓山下,来自全国各地的数学奥林匹克专家们正在紧张地讨论备选试题.南开大学的黄玉民教授在会上提出了一个供选用的试题:

“有一个剧团计划下乡为农民连续演出两个月,他们准备了一批节目,要求每天演出的节目安排做到:

(1)每天至少要上演一个节目;

(2)任何两天上演的节目不能完全相同(可以有一部分相同);

(3)因为人员有限,不能在一天内上演全部节目.

请问:这个剧团最少要准备多少节目,才能保证完成上述计划?”

黄教授的问题一提出,在座的人都觉得很新鲜,怎样来解答这道题目,有人一时还没有反应过来.事后,

我突然想到,如果利用易卦的思想,是很容易解答这道问题的.问题的答案是最少要准备6个节目.我们不妨把6个节目依次编号为①,②,③,④,⑤,⑥,把每天的节目单与易卦联系起来.如果这天上演第 i 个节目,我们就将易卦的第 i 爻取阳爻,如果这天不上演第 j 个节目,就将易卦的第 j 爻取阴爻.于是,每天的节目单就对应一个易卦.例如,颐卦䷚第一爻和第六爻(由下往上数)是阳爻,其余的第二、第三、第四、第五爻是阴爻,就表示今天上演节目①和⑥,其余的②,③,④,⑤四个节目不上演.

由于易卦共有64卦,它们彼此不同,除了坤卦䷁(相当于一个节目都不上演)和乾卦䷀(相当于6个节目都上演)之外,其余的62卦,每一卦都可作为一天的节目单,两个月最多也只有62天,所以有6个节目就足够了.但很明显,少于6个节目是不够的.所以,本题的答案是最少要6个节目.

在这个问题的启示之下,笔者写了一篇文章,题目叫作“易卦与趣味数学”,文中选择了一批趣味数学问题,用易卦的方法给予解答,发表于1998年第一期的《周易研究》上.

后来作者与中国科学院自然科学史研究所的董光壁教授在交流中谈到了用易卦思想可解一些数学题,特别是可解一些数学奥林匹克试题,董先生当即提示我:是否可以写一本《易学与数学奥林匹克》的书.董教授本人在10多年前就出版过《易图的数学结构》一书,对易卦与数学的关系做过深刻的论述,曾给作者以很大的启示.今天又是在董教授的启示之下,作者才有了写作本书的计划,挑选了国内外历年数学奥林匹克试

题中的 100 个问题,用易卦思想方法给出了严格的解答.

为什么利用古老的易卦符号能解决现代化的数学奥林匹克试题呢?说来也不奇怪.因为前面提到过,利用易卦符号系统可以建立二进制数及许多离散数学的内容,这些数学的基础部分正是当今各级数学奥林匹克命题的热点.并且,数学奥林匹克试题中,还有很大一部分是所谓“智力型问题”,这类问题一般不需要太多的具体数学预备知识,也不涉及太多的数学运算,但却需要某种深刻的数学思想,找到了这个思想,问题一点就破,这正是所谓奥林匹克数学的特征.对于这类问题,有些是可以用阴阳对立等思想来解决的,并且由于有易卦图形的直观帮助,有时甚至比使用现代数学工具还要简便一些.

但必须指出的是,我们说利用易卦可以解某些数学奥林匹克试题,并不是说可以解所有的奥林匹克试题,也不是说那些问题只能用易卦的思想才能解决,更不是说,易卦中的思想比现代数学更高明,像某些易学家所说的那样.

当然也必须指出的是,如果认为本书中列举的那些数学奥林匹克试题,既然可以用现代数学的方法来解,用易卦思想去解,只不过是把现代数学的语言“翻译”为易卦的语言而已,因此没有什么实际的意义.这种观点也是不正确的.本来数学证明从某种意义上讲就是同义反复.现代数学的一些语言,既然可以“翻译”为易卦的语言,反过来就说明了易卦中的确蕴含了某些现代数学的思想.

谈到《周易》与自然科学思想的关系,学术界有两

种截然相反的意见.有的人认为,“近现代一些重大的自然科学的进展,都与《周易》的思想有密切关系,如新型电脑的软硬件改进,生物遗传密码研究的进展,特别是现代混沌理论的产生,耗散结构的问世,都受到《周易》思想的启示.”^①也有人认为,“歌颂《周易》重要性者太多,真能说出其所以然者太少,尤其是讲《周易》与西洋近现代的自然科学相符合者,都未能提出很可靠的具体证据.”^②我们当然不能盲目附和第一种意见,那是言过其实的夸张;也不能完全赞同第二种意见.本书的写作大概可以算得上一个小小的“可靠的具体证据”,因为在本书中用易卦思想解答的100个数学奥林匹克试题,都是国内外历年采用了的正式数学奥林匹克试题,都是真枪实弹的东西.

本书的内容共分4章,除其中第4章是用易卦思想解答100道数学奥林匹克试题外,第2章和第3章分别论述易卦与现代数学的联系及易卦与数学奥林匹克解题思想,这3章都是与数学奥林匹克直接有关的课题.此外,还专门在第1章论述《周易》对中国古代数学的产生和发展的影响,它与本书的重点解奥赛题似乎没有直接的联系,但它有助于我们了解《周易》与中国古代数学的关系,从而也有助于理解我们今天利用易卦思想解奥赛题的思维承袭关系.

① 刘书民.推翻传统偏见,恢复《周易》真貌.文汇报,1989-06-05.

② 蔡尚思.周易要论.长沙:湖南教育出版社,1991:1.

第 1 章 《周易》对中国古代数学的影响 //1

第 1 节 模式——《周易》的精髓 //1

第 2 节 模式化——中国古代数学发展的道路 //4

第 3 节 《周易》的模式造成了中国古代数学的模式化 //7

第 4 节 成也于斯,败也于斯——李约瑟之迷 //14

第 2 章 易卦与现代数学的联系 //25

第 1 节 易卦与二进数的关系 //26

第 2 节 易卦与集合论的联系 //27

第 3 节 易卦与布尔代数的联系 //33

第 4 节 易卦与群论的联系 //38

第 5 节 易卦与组合论、图论、数论、概率论等的联系 //42

第 3 章 易卦与数学奥林匹克解题思想 //52

第 1 节 易卦与染色思想 //53

第 2 节 易卦与映射思想 //55

第 3 节 易卦与赋值方法 //59

第 4 节 易卦与二进数方法 //63

第 5 节 易卦与奇偶性分析 //69

第 6 节 易卦与图论思想 //74

第 7 节 易卦与其他解题思想 //76

第 4 章 用易卦思想解数学奥林匹克试题

100 例 //81

第 1 节 中国数学奥林匹克试题选解 //82

第 2 节 苏联与俄罗斯数学奥林匹克试题选解
//92

第 3 节 东欧诸国数学奥林匹克试题选解 //144

第 4 节 英、美等国数学奥林匹克试题选解 //174

第 5 节 国际数学奥林匹克试题选解 //198

《周易》对中国古代数学的影响

第 1 章

李约瑟博士在 20 世纪 30 年代末期酝酿写作《中国科学技术史》时提出了一个发人深思的问题：“中国古代有杰出的科学成就，何以近代科学却崛起于西方而不是在中国？”这就是著名的所谓“李约瑟之谜”。

这个问题触及了中国人民的伤心之处，不少学者对它进行过热烈的讨论，见仁见智，众说纷纭。作者认为，其中有一个不容忽视的原因，就是《周易》对中国古代科技（特别是数学）的影响。

第 1 节 模式——《周易》的精髓

《周易》是一部什么样的书？《系辞下传》说：“昔者包牺氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情。”这说明了，伏羲所作的卦，是通过对于天地间一切事物的

观察,从各种不同的方面抽象出来的一种“类万物”的综合性的模式.《系辞上传》说:“圣人有以见天下之赜,而拟诸其形容,象其物宜,是故谓之象.圣人有以见天下之动而观其会通,以行其典礼,系辞焉而断其吉凶,是故谓之爻.”这是说,圣人看到了天下事物的复杂性,便模拟天下万物的形象,抽象之而成为卦象.圣人看到天下事物的变化,乃于错综复杂的变化中,体会出其融会贯通的道理,当作处理事物的规律,并用文字记录帮助人们趋吉避凶,这些文字称为爻辞.所以,卦爻都是一种处理事物的模式.东汉经学家郑玄将其概括为:“《易》一名而含三义:易简,一也;变易,二也;不易,三也.”这就是说,《易》提出了宇宙人生、万事万物的一种简化了的模式(易简),通过模式以帮助人们了解事物变化的规律(变易),研究其中不变的原理(不易),从而解决各种疑难问题.

古人把《周易》的模式看得极为重要,认为掌握了这个模式,天下所有的道理都掌握了,掌握了天下的道理,成功也就在其中了(“易简而天下之理得矣;天下之理得,而成位乎其中矣.”——《系辞上传》).《周易》是开启智慧,成就事业,包括天下一切道理的模式,圣人可以凭借它来了解天下的动态,奠定天下的事业,判断天下的疑问(“夫易何为者也?夫易开物成务,冒天下之道,如斯而已者也.是故,圣人以通天下之志,以定天下之业,以断天下之疑.”——《系辞上传》).

古人不仅认为易的模式极为重要,还认为人类时时刻刻都在从不同的角度使用这一模式,只是不自觉而已(“仁者见之谓之仁,智者见之谓之智,百姓日用而不知,故君子之道鲜矣!”——《系辞上传》)更有甚者,

古人还认为天下一切事物,虽然变化无穷,但都不能超越易的模式;人的思维方法,虽然千差万别,但都统一于易的模式(“范围天地之化而不过,曲成万物而不遗。”——《系辞上传》;“天下何思何虑,天下同归而殊途,一致而百虑,天下何思何虑?”——《系辞下传》)。

综上所述,古人曾经把易卦当作一种万能的模式,有“范围天地”、“曲成万物”的作用,有“万方一致”、“天下同归”的威力。我们今天用科学的眼光来考察《周易》,当然不能盲目照搬古人的论点,但是仍然不得不承认,《周易》的确是为人们提供一种思维模式的书。

德国数学家莱布尼兹(Leibniz, 1646—1716)曾惊奇地发现,他发明的二进数与易卦具有同构关系。其实,易卦作为一种抽象的符号系统,不仅与二进数具有同构关系,而且可以从它出发构建起现代数学的许多内容,其中最值得注意的是易卦与布尔向量的关系。布尔向量是现代数学中一种重要的概念,它被广泛地采用为描述具有若干因素,而且每种因素都有两种对立状态的事物的数学模型。若干布尔向量排在一起就构成布尔矩阵(也称0—1矩阵),布尔矩阵是现代决策理论中常用的重要数学工具。如果我们把一个易卦的爻与布尔向量的分量对应,阳爻与1对应,阴爻与0对应,则易卦与布尔向量也具有同构关系。几个易卦并列一起就成为布尔矩阵。换言之,从某种意义上讲,易卦与布尔向量可以看成是二而一的东西。既然布尔向量可以作为今天人们决策中的数学模型,与之同构的易卦也就有可能是古人思维决策的数学模型。因此,笔者曾经提出了这样一个论点:“易卦是古人思维决策的数