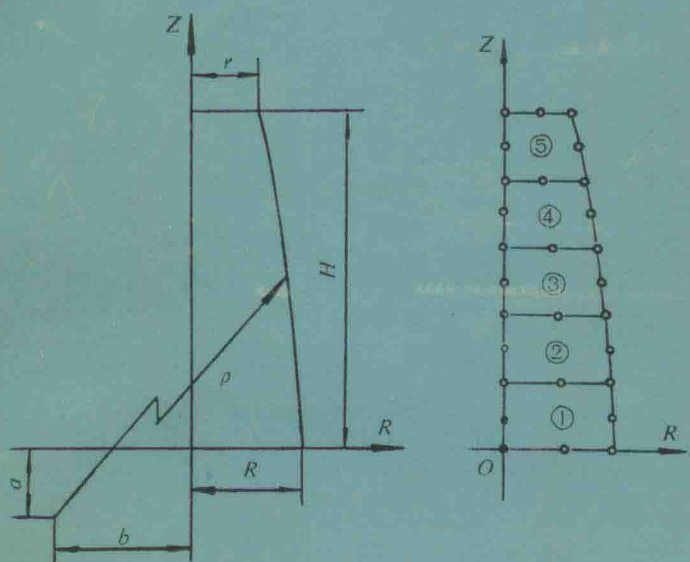
实用有限元法

黄德武 编著



兵器工业出版社

实用有限元法

黄德武　编著

兵器工业出版社

（京）新登字 049 号

内容简介

本书是为高等学校机械类专业编写的一本教材，它侧重于有限元法在机械工程技术中的应用。理论叙述简明扼要，概念清楚，与其他相关课程联接紧密。书中完整讲述了三个典型程序的设计方法及使用说明，还结合实例介绍了有限元法在解决工程实际问题中的作用。本书除了用作本科教材以外，还可供研究生及从事机械专业的工程技术人员作参考书用。

实用有限元法

黄德武　编著

*

兵器工业出版社出版发行

（北京市海淀区车道沟 10 号）

各地新华书店经销

解放军 7212 厂印装

*

开本：787×1092　1/16　印张：13.625　字数：332.28 千字

1992 年 10 月第 1 版　1992 年 10 月第 1 次印刷

印数：1～1500　定价：9.40 元

ISBN　7—80038—502—7/O・30

前　言

机械类专业的学生要学习和掌握现代的机械设计方法，应能利用计算机等工具进行一般机械产品的设计。有限元法是力学理论和近代数字电子计算机上的计算方法相结合的产物。它的产生和发展，对于分析工程中复杂的结构问题发挥了重要作用，是机械产品设计和进行振动分析的必不可少的重要手段。对机械类专业来说，它是学生们要学习的一门重要的专业课。

有限元法的数学基础和理论体系还是比较严谨的。从数学的计算方法、力学的理论到具体计算的程序设计、工程技术问题的处理等，是前后呼应、相互联系的。机械类专业不是计算力学专业，用较少的学时想把这门课讲得体系严谨、理论完备、内容完整是不大可能的。

对机械类专业的学生来说，本门课的重点是应用。即是通过这门课的学习，能在机械产品的设计中会解决诸如强度计算等问题，学会抓住工程技术问题的主要矛盾，进行必要而正确的简化，建立起正确的力学模型，并会选用合适的有限元程序，独立地进行数据准备，实施上机计算，同时也能利用计算结果完成和改进机械产品的设计。

在理论上只讲清最基本的概念和有限元法的基本思路，而对较为复杂的理论问题就不多涉及了，也不要求所有学生都能进行有限元程序设计，因此本门课程叫《实用有限元法》。

这门课程的先行课为线性代数、理论力学、材料力学、算法语言等。这些课程都是机械类专业必修的基础课程。为了进一步培养学生综合运用各种知识分析问题和解决问题的能力，把以上内容连贯起来进行复习和讲授，并且还特别注意紧密联系工程实际问题，以培养学生深入思考和理论联系实际的能力。

《实用有限元法》的实践环节是很重要的。结合教学、科研的需要，我们开发和调试了一些有限元计算程序。在这本教材里，结合理论内容的讲授选编了三个完整的有限元程序。这些程序不但能满足教学的需要，有的还可以满足工程设计的计算需要。学生可以利用这些程序进行实际计算，题目不宜太大，但最好有实际意义。要强调自己动手，数据准备、上机计算、表格设计、结论分析等都要求自己完成。这实际上是一次较为完整的全面训练，通过这样的训练，学生会得到深刻的认识，为今后利用有限元法和CAD技术解决工程实际问题打下较好的基础。

这本书是为大学本科机械类专业的学生编写的。以本科生的基础知识为起点，力求反映有限元法与CAD技术的最新发展。同时又尽量避开过多的数学推导，用比较浅显的易于接受的语言叙述，特别注意讲清各种基本概念的物理实际和工程应用背景。多年的教学实践表明，这本书内容的安排是合适的，教学效果也是好的。这本书还可以作为机械类专业研究生参考教材，也可以作为有关的工程技术人员学习有限元法的参考。

本书在编写过程中，参阅了参考文献中的有关内容，在此对这些作者表示衷心感谢。

赵洪青工程师和张凯成副教授参加了本书部分的编写工作，他们丰富的工程实际经验为本书的定稿起到了很好的作用。

限于作者水平，本书错误和不足之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者　1992年4月

目 录

第一章　绪　论

§1-1　有限元法的工程应用

首先介绍有限元法概述及在工程技术上的应用，以使读者对这门课程有个总的概括的了解。

机械类专业是培养机械设计师的，任何一件机械产品的设计都是要达到一定的设计目标，一个良好的设计应该是使设计出的产品性能好、结构简单、工作可靠、制造成本低、外型美观、操作方便，要完成这样的任务是很不容易的，一个设计师必须掌握和通晓现代设计方法，具有坚实的基础知识和丰富的制造工艺方面的经验。为了尽可能采用新的技术和寻求新的作用原理来设计和制造机械产品，经常要把设计任务分解，一般可以如下进行。

$$\text{机械产品设计}\begin{cases}\text{性能设计}\\ \text{强度设计}\\ \text{控制部分设计（电、液等）}\\ \text{制造工艺设计}\\ \text{造型和包装设计}\end{cases}$$

设计一件复杂的机械产品，例如设计一架现代化的飞机就要有不同专业的人员在统一组织下分头进行，然后再经过反复修改、试验、试制、实际操作的考核，最后完成。

现在，对机械产品的性能要求越来越高，对其电气、微机控制等“神经系统”也提出了更高的要求。但是，一件机械产品最终总是由成百上千甚至是几万个机械零件组成的，这些零件机械强度如何，在各种工作条件下是否可靠，能否达到规定的使用寿命等就直接影响到整个机器的性能，甚至是控制部分的工作。这就是说机械强度的设计是机械设计中的一个极其重要的环节，尤其是随着科学技术的发展，研究机器工作状态下的动力特性，进行振动方面的分析，进行动强度计算及可靠性计算就更显得必要。

正如读者在材料力学里学过的那样，强度设计和计算包括有三方面的内容，即强度、刚度和稳定性。应用系统工程的研究方法，可以把一个构件或多个构件的组合看成是一个机械系统，作用在这个系统上的外力或者各部分温度的差异是对系统的激励或者叫输入，构件内各点要产生位移、应力和应变是系统的响应或者叫输出。

载　荷 不均匀温度场	——→	构　件	——→	位移 应力 应变
输　入		系统		输出

构件所用材料的机械力学性质，构件的几何形状和约束支承条件是系统自身的特性，这一直是强度设计时最关心的一个问题。计算出构件在工作状态下（即有输入时）的输出，就是求出各点的位移、应力和应变，就可以顺利地进行强度设计了。在线弹性的情况下输入和输出成线性关系，在塑性力学里输入和输出是非线性关系。现在举大家在材料力学里熟知的

公式来进一步说明这个问题。

$$\varepsilon=\frac{P}{EF},\quad \theta=\frac{M_n}{GJ_\rho},\quad \frac{1}{\rho}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\frac{M}{EJ} \tag{1-1}$$

这里 P 是拉压杆的轴向力，M_n 是轴的扭矩，M 是梁的弯矩，它们是系统的输入；EF 是抗拉刚度，GJ_ρ 是抗扭刚度，EJ 是梁的抗弯刚度，它们反映了系统（构件）自身的特性；而 ε 是正应变，θ 是单位长度的扭转角，$1/\rho$ 是梁弯曲的曲率，它们是系统的输出，输入和输出成正比。

大家学过的材料力学虽然也是解决强度设计的，但是它能解决的工程实际问题是很有限的，仅是杆、轴、梁等一维问题，它的外形特点是长度比宽度和高度要大得多，工程实际中大量碰到的是非杆状物体，如齿轮、法兰盘、飞机机翼等，这些问题则在弹性力学里加以研究。弹性力学是从研究连续体的微元体着手，在分析中取无限多个微元体，而令它的体积接近零，通过几何和力学分析得到描述弹性体性质的偏微分方程。在一定的条件下，用严格的数学方法解该微分方程，所得到的是解析解，它是一组数学表达式，能够给出弹性体内任何一点的位移、应力和应变。然而物体的几何形状、材料性质和作用载荷是各式各样的，是极其复杂的。基于这一原因，能够得到解析解的问题实在是太少了，对于绝大多数的实际工程问题，弹性力学的解析法是无能为力的。

由于强度设计及其他工程技术问题的需要，弹性力学偏微分方程的数值解法长期以来一直吸引着人们的注意，一种数值方法包括它的数学基础和它的实现，都紧紧地依赖于理论数学的发展和计算手段的改善。计算机科学的发展，现代大型高速电子计算机的出现，对数值方法冲击之大，是历史上从来未有过的。作为求解偏微分方程的一个强有力的手段——有限元方法，正是电子计算机时代的产物。换句话说，没有计算机就没有有限元法，它是为了满足工程实际的需要而发展起来的，至今，这一方法解决问题的能力和适用范围都有了极大的发展，除了在结构力学领域中充分显示出它的实用性外，这一方法也已经用于研究诸如断裂力学、传热学、流体力学和电磁学等连续介质力学的问题中。

§1-2　有限元法的基本概念

弹性力学中的有限元法解题的思路是这样的，首先人为地把弹性体划分成有限个有限大小的构件，并在有限个节点上相互连接组成。有限大小的构件称为有限单元，简称单元。

在有限元法中，把剖分成许多单元的分割线（面）称为网格。网格越密，替代结构物就越接近于原结构物。对于离散化以后的计算简图，先取出一个单元进行单元分析，再综合起来，进行整体分析，由此求出离散体的应力，这样就得出了连续体应力状态的近似解答。

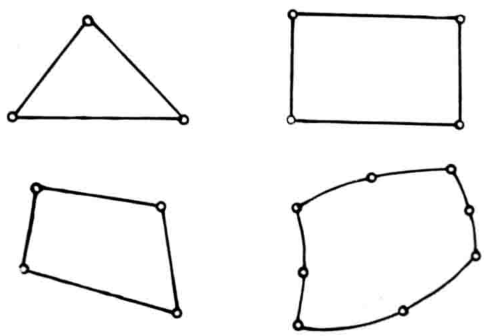


图 1-1　各种平面单元

应用有限元法，确实使许多过去用材料力学解决不了的问题得到迅速而又可靠的解答，它的成功运用为工程技术问题的解决开辟了一个广

泛的前景。

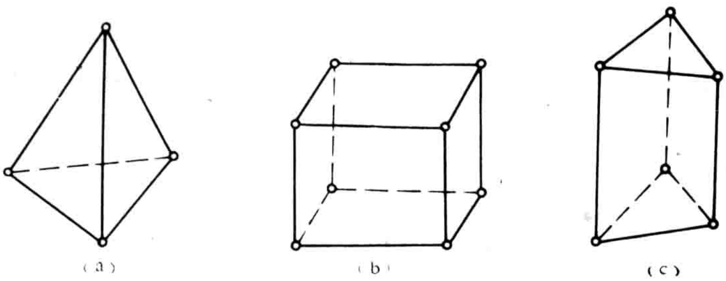


图 1-2 实体单元

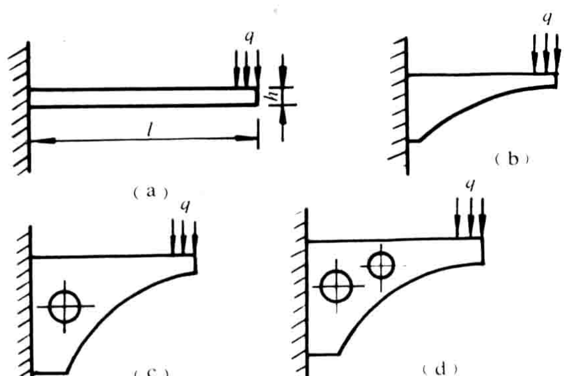


图 1-3 悬臂梁

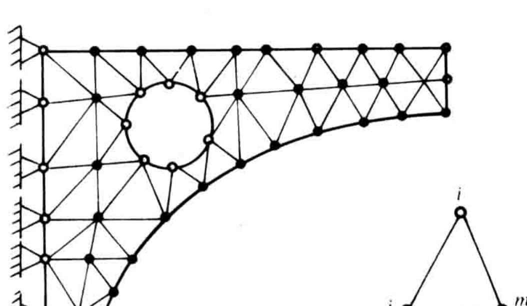


图 1-4 悬臂梁网格图

图 1-3 (a) 是一个悬臂梁，梁端受均布载荷 q，要计算梁端的最大位移（挠度）和危险点的应力，利用材料力学的公式是完全可行的，它符合材力中梁所要求的假设条件。但要计算图 1-3 (b)，再用材力的公式就要产生较大的误差，它已不符合材力的假定条件，即 $l \not> 5h$，对于图 1-3 (c) 和 (d)，不但几何形状复杂，还有圆孔的应力集中问题，再用材料力学的公式计算就几乎是不可能的，但如果要用有限元法计算却是比较简单的，工程技术上大量碰到的是这类形状和载荷较为复杂的问题，这就使得有限元法在构件的强度设计上日益发挥重要的作用。剖分网格可以如图 1-4，将所有的单元及节点编上号码，并准备计算用的数据，主要有单元和节点总数、单元编号、各单元的节点组成、单元体厚度、弹性系数、泊松系数、节点坐标值；还应准备有外载荷作用的有关信息，如集中力、体积力、面力数值；给定位移的节点号及位移值。这些数据按程序要求依次输入计算机。只要把计算一道题目需要的全部信息都输入给计算机，计算机才能为我们工作。如果从实际结构抽象出了合理的模型，数据输入没有错误，那么计算机就能打印出各节点及单元形心的位移和应力，有条件时机器还能把计算结果转换成图像由绘图仪绘出，机械设计师就可以根据这些结果完成和修改设计。

近十多年来，机械系统的计算机辅助设计和计算机辅助制造即 CAD、CAM 技术得到了迅

速的发展，有限元分析软件已成为CAD常用计算方法库中不可缺少的内容之一，并与优化设计形成集成系统，再为有限元程序配备功能较强的前后置处理程序块，通过人机交互作用，自动建模和生成数据文件，计算结果以图形方式输出，这样的有限元分析系统反映了当前世界上有限元方法的发展及应用水平，更进一步还可以总结工程师们利用有限元法进行工程设计的经验，利用人工智能技术，形成智能性的有限元分析专家系统，这是有限元法今后发展的趋势。

我国在航空、造船、土建、水利和机械制造等各行业中应用有限元法已日益增多，许多厂矿、科研单位、高等院校在有限元法理论研究和实际应用中都做出了不少成绩，取得了丰富经验，随着我国国民经济的迅速发展，有限元法的研究必将进入一个新的阶段，它在工程技术各个领域的应用也将越来越广泛。

第二章　弹性力学基础

§2-1　应力分量，应力分量的记号和平面应力

读者在材料力学里曾经学过应力状态理论，二向应力状态和三向应力状态合起来又叫复杂应力状态。为了研究的方便，在弹性力学里要对物体内一点的应力扩充定义。

现在我们来研究一个如图 2-1 所示的受外力作用的物体中某点 $A(x,y,z)$ 的应力状态。为此用截面法取出一个包围 A 点的微单元体。当用直角坐标时，可以取成各平行面与坐标面平行的正六面体。如果 A 点为正六面体的形心，由于物体各部分间的作用，单元体的各个截面上都有应力存在。如果这些应力为已知，根据截面法平衡条件，就可以求得通过该点任意斜面上的应力。因此，我们常常用单元体三对相互垂直面上的应力来表示一点的应力状态。如果应力状态是均匀的，则可以取有限大小的单元体，否则应该取微小的单元体简称微元体。其边长分别为 dx、dy、dz，此时则可以认为作用在各微面上的应力是均匀分布的，而且每个微面上的总应力可以分别向三个坐标轴 x、y、z 投影得到三个应力分量，其中一个是正应力，二个是剪应力分量，图 2-2 表示各个微面上的应力分量。

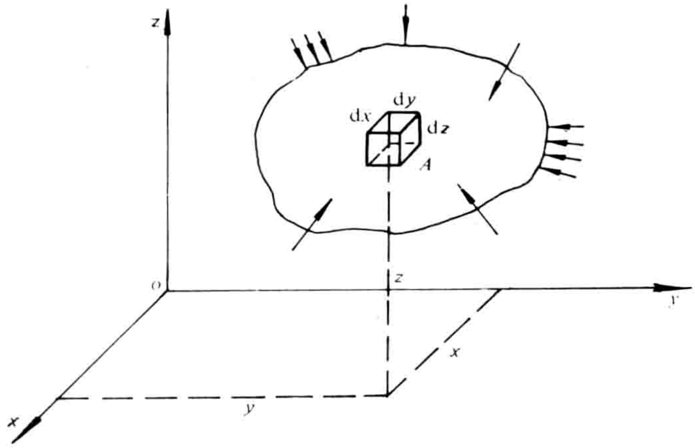


图 2-1　物体中的微单元体

在微元体的六个面上共有九个应力分量。即 σ_x、τ_{xy}、τ_{xz}、σ_y、τ_{yz}、τ_{yx}、σ_z、τ_{zx}、τ_{zy}

我们现在规定微元体的前面、右面、上面为正面；后面、左面、下面为负面。正面上的正应力与坐标轴的正向相同时为正，反之为负；负面上的正应力与坐标轴反方向一致时为正，反之为负，这与材料力学中所习惯使用的拉伸为正，压缩为负是一致的。剪应力分量具有两个下标，其中第一个下标表示截面的法线方向，第二个下标表示应力分量的方向。我们规定正面上剪应力顺着坐标轴正向时为正，反之为负；负面上剪应力顺着坐标轴负方向时为正，反之为负；这种剪应力符号规定与材料力学规定的相反，材料力学规定的以后这里不再使用。按此规定，图 2-2 上的应力全系正值。

可以证明，该微元体上的九个分量只有六个是独立的。

现在将微元体上所作用的力对通过角点的与 x、y、z 轴的平行轴取矩，如对平行于 x 轴的左下角的棱取矩，则

$$\sum M_x = 0$$

得 $(\tau_{zy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\mathrm{d}z = (\tau_{yz}\mathrm{d}x\mathrm{d}z)\mathrm{d}y$

所以 $\tau_{zy} = \tau_{yz}$

$$\left.\begin{aligned} &\text{同理可由} \sum M_y = 0 \text{ 得 } \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ &\sum M_z = 0 \text{ 得 } \tau_{xy} = \tau_{yx} \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}1)$$

(2-1) 式被称为剪应力互等定理。则对应力分量矩阵（应力张量）用了剪应力互等定理后将成为对称矩阵。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

有了六个分量，我们可以进一步去计算主应力或任一斜截面上的应力，还可以把这六个分量写成列阵形式，称为应力列阵。

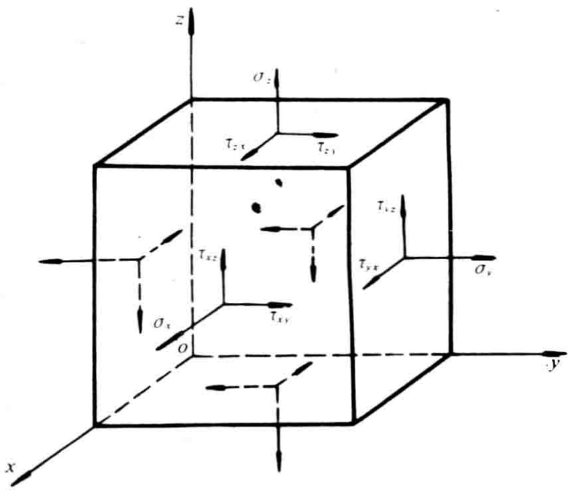


图 2-2 单元体应力分量

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

有许多机械零件，如内燃机的飞轮、链条的链板、火箭、导弹的尾翼等，其一个方向的尺寸远较另两个方向为小，即零件是“板”形的。若外力作用在与板面平行的平面内，沿厚度方向（垂直板面的方向）均匀分布，而在两底面上无任何外力作用，如图 2-3 所示。我们来讨论此时零件内各点的应力状态。

由于在两底面（图 2-3）中平行于 xoy 的表面上无外力作用，故在这两个平面上应有

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

因为板较薄，且外力沿 z 轴方向无变化，故可以认为，在整个板内，应力不随 z 改变，仅随 x、y 而变化。由此可进一步推知，在全板内，

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

由剪应力互等定理，得

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0 \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

应力矩阵为

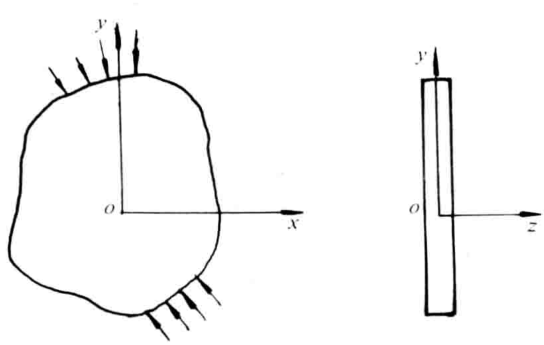


图 2-3 平面应力问题

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

划去第三行和第三列的零元素，则

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

写成列阵的形式，则应力列阵为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

这就是材料力学中的平面应力状态。

2-2　应变分量，应变分量的记号和平面应变

物体变形时，各点位置的改变量称为位移。一般情况下有两种不同性质的位移：

1. 刚体位移：整个物体像一个刚体一样进行的运动所引起的位移，一般包括平移和转动。这种位移并不使物体的形状与质点间的相对距离发生变化。

2. 相对位移：由于物体受力后发生了变形，物体的各点间有相对位移。

我们在固体力学里主要研究由变形而引起的相对位移，以后简称位移。

要消除物体的刚体位移，则须将物体加以足够的约束，使其成为几何不可变的结构。

图 2-4 中的 M 点移动至 M' 点，我们用带箭头的线段（矢量）MM' 来表示它的位移。物体内任一点的位移，通常也是用它在 x、y、z 三个坐标轴方向上的投影来表示，分别记为 u、v、w。这三个量统称为一点的位移分量，它们以沿坐标轴正方向为正，反之为负。记为

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

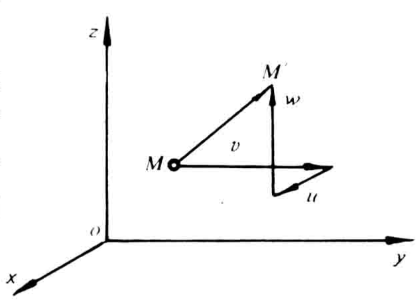


图 2-4　一点的位移分量

再来研究应变。在材料力学中已经定义过，任一线段上每单位长度的伸长或缩短叫正应变（或线应变）。任意两个线段之间原为直角的角度改变叫做剪应变（或角应变）。

正应变用 ϵ 表示，加一个下标，例如，ϵ_y 表示沿 y 方向的正应变。

剪应变用 γ 表示，再加两个下

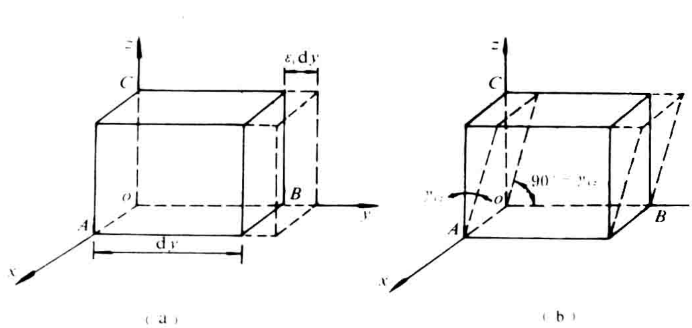


图 2-5　应变分量

标。例如，γ_{yz}表示沿 y 和 z 两个方向的线段之间的剪应变，如图 2-5 (b)，其余类推。与应力分量相仿，我们将三个正应变 ε_x、ε_y、ε_z 和三个剪应变 γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}统称为一点的应变分量。

正应变以伸长为正，缩短为负；剪应变以使直角变小时为正，反之为负。图 2-5 所示的 ε_y 和 γ_{yz}都是正的。因为正应变和剪应变都是表示相对变形，所以它们都是无量纲的量。

将应变分量写成矩阵（应变张量）

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

剪应变前有$\frac{1}{2}$，使得以后推导公式方便。应变张量也和应力张量一样，是二阶实数对称张量。

类似剪应力互等定理，有

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \qquad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}$$

也可以写成列阵形式

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

在工程上我们会遇到另一类的物体，例如挡土墙、火炮身管等，如图 2-6。

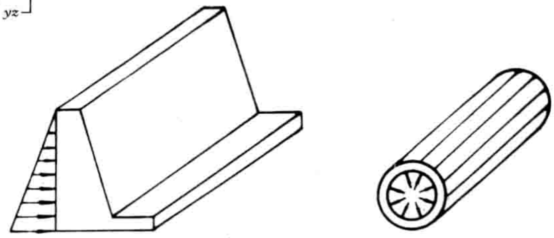


图 2-6 平面应变

在几何形状上，它们都是一个等截面的长柱体；在受力情况上，它们都只受到平行于横截面，并且沿长度不变的面力（体力也是如此）。

任取一横截面作为 xoy 坐标面，如图 2-7 所示。沿长度方向取为 z 轴。对于这一类物体，我们可以设想它是由这些横截面切成的许多薄片所组成。那么，由于各个薄片的几何形状和受力情况都是相同的，所以，显而易见，这些薄片的应力、应变和位移分量也都彼此相同，换句话说，这些物理量也都与 z 坐标无关，而只是 x、y 的函数。

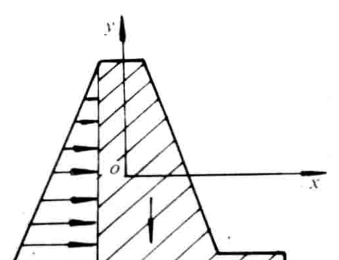


图 2-7 挡土墙横截面

今设柱体的两端面受到约束（例如，水坝两端受到岩层的限制），那么，柱体的两端面就不能沿轴向（z 方向）移动。另外，在柱体的中央横截面上，由于其对称性，它也只能沿 x 和 y 方向移动，而不会产生轴向位移。这样我们就可以近似地认为柱体任一横截面上所有各点的轴向位移等于零，即

$$w = 0$$

从而，沿 z 方向的正应变也等于零：$\varepsilon_z=0$。另外，由于相邻薄片之间互相挤压的结果，使得各薄片的两侧面仍保持为平面，可见与 z 方向有关的两个剪应变 τ_{yz}和 τ_{xz}必然等于零，这样就只剩下平行于 xoy 坐标面的 ε_x、ε_y、γ_{xy}三个应变量了。

应变张量为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

写成列阵形式

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

上面的结论是假设柱体的两端受到约束而得出的。如果柱体两端可以自由伸缩，仍然可以近似地将它当作平面应变问题来处理。

最后还应注意，对于平面应力问题，$\sigma_z=0$，但 $\varepsilon_z\neq0$；对于平面应变问题，$\varepsilon_z=0$，但$\sigma_z\neq0$。

§2-3　矢量、矩阵和张量

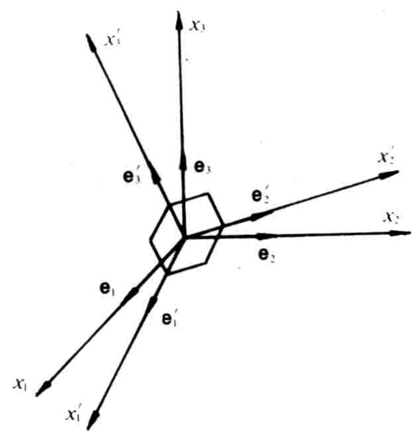


图 2-8　直角坐标系下张量定义

假定读者在矢量代数和线性代数里学过矢量和矩阵的代数性质及其运算，这些在固体力学及有限元法的学习里是很有用的，例如应力和应变都可以看成是张量，并可以写成张量的矩阵形式，我们想在读者过去学过的知识的基础上，对张量做些简介。这是因为坐标变换在有限元法中有重要的应用，它可以使有限元列式简捷明了，而张量是研究这些问题最适合的数学工具。

我们仅限于在直角坐标系下来研究，假设在新坐标系下一点的坐标是 x_i，$i=1,2,3$。在原坐标系下的坐标是 x_i'，$i=1$，2，3。新坐标系和原坐标系的单位矢量分别是 $\mathbf{e_i}$ 和 $\mathbf{e_i}'$，如图 2-8 所示。

令原坐标系和新坐标系单位矢量之间夹角的余弦是 P_{ij}，即

$$P_{ij} = \cos(\mathbf{e_i}', \mathbf{e_i}) \tag{2-2}$$

展开地写，P_{ij}为

新 \ 老	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1'$	$\cos\alpha_1$	$\cos\alpha_2$	$\cos\alpha_3$
$\mathbf{e}_2'$	$\cos\beta_1$	$\cos\beta_2$	$\cos\beta_3$
$\mathbf{e}_3'$	$\cos\gamma_1$	$\cos\gamma_2$	$\cos\gamma_3$

因此，

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} P_{ij} x_j \tag{2-3}$$

若把一点的坐标值写成矢量 $\{x_i'\}$ 和 $\{x_i\}$

则

$$\{x_i'\} = [P]\{x_i\} \tag{2-4}$$

这里 $[P]$ 是正交矩阵，因为在任何正交坐标系下单位矢量是互相垂直的，即

$$[P]^T[P] = [P][P]^T = 1, [P]^{-1} = [P]^T$$

故

$$\{x_i\} = [P]^T\{x_i'\} \tag{2-5}$$

在张量代数里根据求和约定来计算是非常方便的，(2-3) 式可以简写为

$$x_i' = P_{ij} x_j \tag{2-6}$$

这个式子中已没有求和号了，在这里重复的下标 $j=1$，2，3 意味着求和，这就是求和约定，它在张量表示时是非常方便的，我们在以后约定，凡是同一项中变量下标的指标符号重复时，即代表各该标号的数从 1 到 3 求和，而把$\sum$号略去，并称这种重复的指标为哑标。

下面我们来定义什么是标量、矢量和张量。

有一类量叫标量，在一种坐标系下它仅有一个分量，并且这个分量不随坐标的变换而改变。

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi'(x_1', x_2', x_3') \tag{2-7}$$

标量又叫零阶张量，例如物体内各点的温度就是标量。

一类量叫矢量或叫一阶张量，它在新坐标系或老坐标系下都有三个分量 ξ_i 和 ξ_i' ($i=1$，2，3)，并且这些分量都存在一种特殊的关系，利用求和约定写成

$$\xi_i' = P_{ik}\xi_k \quad (i,k = 1,2,3) \tag{2-8}$$

或

$$\begin{Bmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix}$$

这个关系式对应于这类量表示的基的变化而变化，例如力就是一阶张量。

例 2-1　一个力的分量在新坐标系下如图 2-9 所示。

$$\{R\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

计算原坐标系下力的分量。

解：求转换矩阵 $[P]$

$$[P] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \tag{2-9}$$

这里 l_1，m_1 和 n_1 表示新坐标系的 x 轴在原坐标系下的三个方向余弦，同样 l_2，m_2，n_2 和

l_3, m_3, n_3 表示新坐标系的 y 轴及 z 轴在原坐标系下的方向余弦。

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

又

$$\{R'\} = [P]\{R\} \qquad (2\text{-}10)$$

$\{R'\}$ 给出的是原坐标系下的力分量，如图 $\theta = 30°$，由（2-10）式，得到

$$\{R'\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

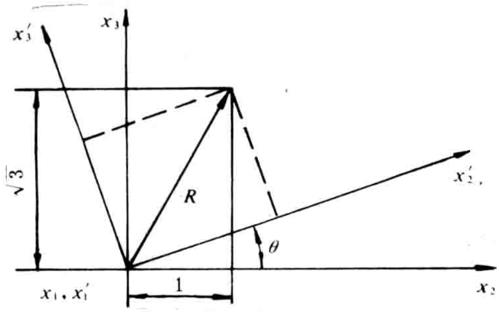


图 2-9 不同坐标系下力的分量

例 2-2 用求和约定表示矩阵乘法，设 $A = (a_{ik})_{s\times n}$，$B = (b_{kj})_{n\times m}$，$C = (c_{ij})_{s\times m}$ 由矩阵乘法规则

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{s1} & c_{s2} & c_{s3} & \cdots & c_{sm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

即是 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

矩阵可以表示二阶张量，这种矩阵的乘法由求和约定可以写作

$$c_{ij} = a_{ik}b_{kj}$$

（$i=1$，2，$\cdots s$；$j=1$，2，$\cdots m$；$k=1$，2，$\cdots n$）

这里特别要指出，二阶张量可以用矩阵表示，但不是所有矩阵都表示二阶张量。

在三维空间里，求和约定用于矢量代数也是很有效的。

矢量 u 和 v 的数乘（点乘）定义为

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |u||v|\cos\theta \qquad (2\text{-}11)$$

矢量是一阶张量，用求和约定写作

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i \qquad (i = 1,2,3) \qquad (2\text{-}12)$$

下面再结合弹性力学的应用来定义二阶张量，弹性体内任一点的应力状态可以用九个应力来表示，写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

二阶张量的定义与坐标变换直接有关，这里我们仅限于讨论三维直角坐标系下的张量，对于维数较高而非直角坐标系的张量，请参阅有关张量的书籍。

任意九个量如果适当地排成一个次序，例如 t_{ij}（$i=1$，2，3；$j=1$，2，3），这组量的存在是与相应的坐标系有关，当坐标系按（2-2）式变换后，如果这组量在新坐标系下的各量 t_{ij} 与原坐标系下各量 t'_{ij} 满足下列关系