

高中各科题型及解法指导丛书

高中数学

题型及解法指导

王永建 编

东南大学出版社

GAOZHONG GEKE TIXING JI JIEFA ZHIDAO CONGSHU

高中各科题型及解法指导丛书

高中数学题型及解法指导

(第3版)

王永建 编

东南大学出版社

高中数学题型及解法指导

(第3版)

王永建 编

*

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号 邮编210096)

江苏省新华书店经销

华东有色地质勘查局研究所印刷厂印刷

*

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 8.125 字数 220 千

1997年5月第3版 1997年12月第2次印刷

印数:28001—33000册

ISBN 7—81023—137 —5/G·13

定价:8.20元

(凡因印装质量问题,可直接向承印厂调换)

内 容 提 要

本书重点介绍中学数学高考中常见的题型,对各种题型的解法进行了示范,对解题技巧进行了分析.本书选材合理、适当,有助于学生对数学概念、定理、公式的掌握,也有助于培养学生解决实际问题的能力.

本书主要对象为高中三年级学生,也可供其它年级学生及中学数学教师参考.

丛书第3版说明

“高中各科题型及解法指导丛书”问世以来,受到了广大师生和家长的欢迎,得到了社会的赞誉。许多读者来信反映,这套丛书思路明晰,题例精当,便于阅读,启发很大,是高考复习中难得的良师益友,认真阅读,可以收到事半功倍之效。

“高中各科题型及解法指导丛书”是由本社约请富有教学经验并对考试命题有研究的特级教师和高级教师精心编写的。这套丛书以各科高考试卷中的基本题型为线索,以典型的题目为例题,剖析各种题型的特点和解法,并配有相当数量的经过精选的练习题。这套丛书不同于充斥于书市的各式复习用书的主要点就在于,它重基础,重思路,重能力,体现了应试教育向素质教育的转轨,而不是书本的一般提要、知识的泛泛复述、习题的机械堆积。

鉴于近年来部分学科的教材有所变化,高考要求和命题方向也有所变化,为了满足广大读者的要求,本社特恳请作者根据新情况、新变化和高考命题走势,结合近年来考生在高考答卷中和学生在平时学习中所暴露出来的薄弱环节和失误症结,对丛书中的语文、英语、数学、物理、化学五个分册再次进行了重大修订,在保持原书特色的基础上加以完善,以使这套丛书更富有时效性、针对性和指导性。

丛书由许允主编,各分册分别由以下同志编写:

语文:贡泽培、智仁勇、徐昭武、丁肇熙、许可

英语:杨维中、宋化廷、刘明烨等

数学:王永建

物理:许维亮、刘国钧、钱云才、郁爱莲、石长盛

化学:宋心安、黄英清、石寅初、曹舜宝

东南大学出版社

1997年2月

第3版前言

本书的第3版,主要依据1994年国家教育委员会颁布的《全日制中学数学教学大纲(修订本)高中部分的调整意见》,以及国家教育委员会考试中心制订的《1996年普通高等学校招生全国统一考试说明》的精神,对全书作了一些增删和修改,使其更加符合国家教委的要求.

再版时,对原书中部分题目进行了更新,补充了近4年来全国和上海市高校招生和部分地区的数学试题,以保持习题的新颖,适应形势的需要.

考虑到学生水平的参差不齐,选题时注意从一般学生的实际水平出发,使本书有较广泛的适用性,习题难易有不同的层次,同学解题时要量力而为.

在选题时,曾参考了池伯鼎等编的《高中数学典型错题分析》,赵振威编的《高中数学选择题设计与解法》,北京师范学院数学系等单位编写的《数学习题集》等书,在此谨向原作者致谢.

编 者

1997年2月

目 录

第一部分 数学题型

一、学会分析题型	3
二、数学题型的分类	4
三、标准化数学试题	13
四、近年高考试题题型变化的启迪	15

第二部分 各类数学题的解法

一、数学题的一般解题步骤	21
二、选择题的解法	29
三、其它标准题的解法	38
四、谨防错误	40

第三部分 例题及习题

一、代数	57
(一)数的概念及运算	57
(二)式的运算	66
(三)方程和不等式	78
(四)函数	85
二、三角	103
(一)三角函数	103
(二)三角恒等变形	117
三、立体几何	125
四、解析几何	148

(一)坐标系与直线	148
(二)圆锥曲线	156
答案、提示或简解	
一、代数	174
(一)数的概念及运算	174
(二)式的运算	176
(三)方程和不等式	185
(四)函数	196
二、三角	202
(一)三角函数	202
(二)三角恒等变形	209
三、立体几何	220
四、解析几何	233
(一)坐标系与直线	233
(二)圆锥曲线	236

第一部分

数学题型

一、学会分析题型

1. 解题的重要性

数学在现实生活、工农业生产和科学技术中具有非常重要的意义。同学们今后无论从事什么职业，要想在工作中有所成就，往往离不开数学的帮助。因此，在中学阶段应该学好数学，打好基础。而学习的目的全在于应用，中学生学习数学的应用，主要表现为解题。通过解题，巩固所学的知识，培养技能和技巧，更重要的是发展自己分析问题、解决问题的能力。

2. 题型的诊断

医生给病人治疗，首先要对病情进行诊断，因为只有明确了是什么病，才能对症下药，采取有效的治疗方案，取得良好治疗效果。

解一道数学题，首先要确定这道题的题型，不同类型的数学题，要求有不同的解题思路和方法。只有确定了题型以后，才能着手去解这道题。

因此，学会区分数学题型，以及掌握各种不同类型习题的解题规律，对提高数学解题能力来说，是很重要的。

二、数学题型的分类

数学题的形式千变万化,题量不计其数,但就其题型而言,是有一定的规律可循的.本书将系统地介绍数学题型的分类.

从实质上来看,数学题不外以下四种类型,即:求解题,变换题,证明题及作图题.从形式上来看,人们把历史上长期以来形成的数学题型称之为传统题;把近几十年来为了弥补传统题之不足及适应现代化考试需要而形成的一些新数学题型称之为客观性试题,又叫做标准化试题.传统题与标准化试题从实质上来看,没有什么区别,它们都没有超出求解题、变换题、证明题及作图题四种类型的范畴,但在解题要求和解题格式上来讲,有着较大的不同.

1. 求解题

这类习题的要求是求出某些未知数的值.具体又可分为以下几种类型.

(1) 计算各种表达式的值:如已知某个表达式以及这个表达式中所含未知数的数值(或未知数的变化趋势),要求计算出这个表达式的值;已知某个函数关系式及自变量的数值(或数值范围),求函数的值;利用各种数学用表或计算器等计算工具进行运算,求出结果.

例1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}{n+2}$ 的值.

这是一个求数列极限的问题,需要用极限定理来解决.

例2 已知 $f(x^*) = \ln x$, 求 $f(2)$ 的值.

这是一个求函数值的问题,首先要由已知函数表达式 $f(x^*) = \ln x$ 求出 $f(x)$ 的表达式,然后才能求出 $f(2)$.

(2) 解一元方程:一元一次方程,一元二次方程,某些特殊的一元高次方程、分式方程、无理方程,某些特殊的指数方程和对数方程、三角方程等.

(3) 解方程组:线性方程组,一次以上的方程组,含有分式方程、无理方程、指数方程、对数方程和三角方程等在内的方程组.

例3 解方程 $(x+1)^8 = (1+i)^8$.

这是一个8次代数方程,先要将 $1+i$ 化为三角函数式,然后利用棣美佛定理将方程两边开8次方,得到所求的8个根.

例4 求方程 $\sqrt{25^{(x^2+x-0.5)}} = \sqrt[4]{5}$ 的解.

这是一个指数方程,先将方程两边化为以5为底的幂,然后转化为代数方程来解.

例5 求方程 $2\sin(x + \frac{\pi}{6}) = 1$ 的解集.

这是一个三角方程,原方程就是 $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, 先视 $x + \frac{\pi}{6}$ 为未知数,求出它的值后,不难得到 x 的值.

例6 k 为什么整数时,方程组

$$\begin{cases} 4x + 3y = 60, \\ kx + (k+2)y = 60 \end{cases}$$

的解满足 $x > y > 0$ 的条件?

这是一个含参变数 k 的二元一次方程组, 先视 k 为常量, 求出方程组的解 $x = f(k), y = g(k)$, 然后依题意解不等式 $f(k) > g(k)$, 便得到 k 的范围.

(4) 解不等式(组): 含一个变量的一次不等式或不等式组, 含一个变量的二次不等式或不等式组, 分式不等式, 无理不等式, 指数不等式, 对数不等式, 三角不等式以及含绝对值的不等式等.

例 7 已知 $0 < p < \frac{1}{4}$, 解关于 x 的不等式:

$$\log_{(x+p)} 2 < \log_x 4.$$

这是一个对数不等式, 若将左边化为 $\log_{(x+p)} 2^4$, 由于左、右两边真数相等, 在 $x > 0$ 且 $x + p \neq 1$ 的条件下, 就可以根据对数的性质得知 $(x + p)^2$ 与 x 的大小关系, 解有关的不等式就得到 x 的范围.

例 8 求不等式组

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} \leq 4, \\ x > 0 \end{cases}$$

的解.

这是一个含二次根式的不等式组的问题, 在 $x^2 - 9 \geq 0$ 的前提下, 将第一个无理不等式两边平方, 有理化以后得到与原不等式等价的不等式组:

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0, \\ x^2 - 9 \leq 16, \\ x > 0. \end{cases}$$

这个不等式组不难求解.

(5) 空间图形计算题.

例 9 已知二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的平面角是锐角 θ , α 内一点 C 到 β 的距离为 3, 点 C 到棱 AB 的距离为 4 (图 1.1), 那么 $\operatorname{tg} \theta$ 的值等于 ().

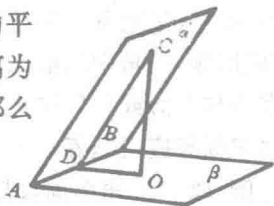


图 1.1

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{3}{5}$
(C) $\frac{3}{7} \sqrt{7}$ (D) $\frac{1}{3} \sqrt{7}$

这是一个关于二面角的计算题, 解题时需要用到三垂线定理的逆定理、二面角的平面角的概念以及勾股定理.

例 10 在高为 h , 母线为 l 的圆锥内作一个内接圆柱, 已知圆锥的侧面积等于圆柱侧面积的四倍, 求圆柱的高, 并指出在什么条件下本题才能有解.

这是一个有关圆柱、圆锥的求积问题, 需要用到相似形的原理、圆柱和圆锥的侧面积公式以及一元二次方程求根公式.

(6) 求函数的特殊值或特殊区间; 求函数的最大值和最小值, 函数的递增或递减区间等.

例 11 已知 $x > 0$, 求 $2 - \frac{x}{1+x^2}$ 的最小值.

这是一个求函数极值的问题, 可以令原式为 y , 然后化为关于 x 的二次方程, 解这个方程并由 $x > 0$ 可算得所求 y 的值.

例 12 求函数 $y = \log_{\alpha}(2x^2 - 3x + 1)$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$) 为减函数的区间.

这是一个函数增减性的问题, 鉴于 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, 所以 $0 < \operatorname{tg} \alpha < 1$. 由对数函数性质可知, 在二次函数 $2x^2 - 3x + 1$ 为增函数所取自变量的区间上, 原对数函数为减函数.

(7) 解文字题或应用题:如代数中的某些计算速度、距离、时间、价格、工效等文字题或应用题,有关数列、排列组合的文字题、应用题,三角中的解三角形的文字题、应用题,立体几何中有关直线与平面或几何体的文字题、应用题,解析几何中有关曲线的文字题与应用题等.

例 13 三角形周长是 x cm, 连结它三边的中点又成为一个较小的三角形, 若这样的过程无限地继续下去, 求所有这些三角形的周长之和.

假设原三角形的周长为 S_1 , 并设依次取三边中点所得新的三角形的周长分别为 $S_2, S_3, \dots, S_n$, 则问题变为求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n)$. 这里, 关键在于找到 S_1 与 S_2 之间的关系.

例 14 甲、乙、丙、丁四个公司承包 8 项工程, 甲公司承包 3 项, 乙公司承包 1 项, 丙、丁两公司各承包 2 项, 问共有多少种承包方式?

这是一个排列、组合的计算题.

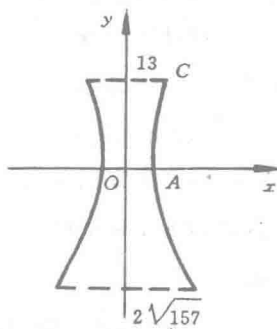
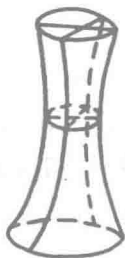


图 1.2