



河南省“十二五”普通高等教育规划教材
理工类大学数学教学丛书
河南省精品课程配套教材

曹殿立 主编



线性代数

(第二版)



科学出版社

河南省“十二五”普通高等教育规划教材
理工类大学数学教学丛书
河南省精品课程配套教材

线性代数

(第二版)

曹殿立 主编

科学出版社

北京

50.00元(定价)

内 容 简 介

本书是河南省“十二五”普通高等教育规划教材、河南省精品课程配套教材。在第一版的基础上,本书吸取了广大读者的意见,作了局部调整和修改。仍然保持第一版的行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换、线性方程组、矩阵的相似变换、二次型共6章的基本结构,而对部分内容作了修改,使之更加系统,便于消化和理解。保留了每章与教学内容相关的数学文化欣赏,删去了数学软件应用,精简了篇幅。

本书注重内容的科学性、系统性、文化性和时代性,注重教材的适用性和通用性。在内容的编排上,注意概念实际背景的介绍,突出对基本概念的系统理解和对解题方法的把握。本书起点低、坡度缓、难点分散、脉络清晰、详略适当、重点突出。例题和习题参考最新的全国硕士研究生入学考试大纲和历年硕士研究生入学试题,题型丰富,难度适中。习题除按小节配置外,各章末还设有两类不同难度的测试题,并附有答案。

本书可作为高等学校非数学专业线性代数课程教材,也可以作为相关专业的教材、教学参考书及考研学习或自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/曹殿立主编.—2版.—北京:科学出版社,2015.6

(理工类大学数学教学丛书)

河南省“十二五”普通高等教育规划教材 河南省精品课程配套教材

ISBN 978-7-03-044454-7

I. ①线… II. ①曹… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第114483号

责任编辑:张中兴 胡海霞 / 责任校对:张怡君

责任印制:霍兵 / 封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年3月第一版 开本:720×1000 1/16

2015年6月第二版 印张:15 3/4

2015年6月第五次印刷 字数:317 000

定价:33.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



“理工类大学数学教学丛书”编委会

主 任 郭运瑞 曹殿立

副主任 陈荣江 王建平 马巧云 马宝林 胡丽平

张建林 姬利娜 李巧萍 苏克勤 宋林森

委 员 (按姓氏拼音排序)

白春阳 陈志成 葛 立 何春花 李艳华

李战国 刘 娟 陆 博 马文雅 潘全香

孙成金 杨小飞 原冠秀 张建军 张清山

河南省“十二五”普通高等教育规划教材
理工类大学数学教学丛书
河南省精品课程配套教材



《线性代数（第二版）》编委会

主 编 曹殿立
副主编 姬利娜 马宝林
编 者 潘全香 李战国

丛书序



随着我国高等教育“大众化”阶段的到来,尤其是2004年高中施行新课改以来,高等教育在培养目标和教学要求等方面已呈现出多层次、多元化的新情况,不同层次高校的学生和学科对数学的需求也是多样化的.如何保证和提高地方普通高校大学数学的教学质量,以及如何进行地方普通高校创新性人才培养,成为当前我国地方普通高校最重要的研究课题之一.尤其是作为地方普通高校教学第一线的教师来说,十分需要适用于这一层次的生源特点和基础水平的大学数学教材.河南省教学名师奖获得者,河南省精品课程的主持人郭运瑞教授,2005年以来主持的“大学数学分层次教学的研究与改革实践”和“高中新课改后大学数学教学改革的研究与实践”作为重要的研究课题,被列入河南省普通高等教育教学改革项目,并获得了河南省普通高等教育省级教学改革成果奖.这套教材是她带领的教学团队多年奋斗在教学和教学改革第一线的研究和实践成果.

这套教材的特色在于它适应大众教育时代地方普通高校的学生和学科的特点和要求,能更好地适应学生专业学习与发展的要求,适应学生自身条件和发展目标的个性化需求,为地方普通高校大学数学分层次教学提供了很好的教材.教材内容加强了数学概念与实际问题的联系,将数学建模的思想和方法渗透到教材中去,重视培养学生应用数学知识以及数学软件解决实际问题的意识与能力.同时本套教材注意到对教材内容主线的适当延伸,这有助于开拓学生的思路 and 眼界,加强数学与其他学科和实践之间的联系,体现了数学的应用性.教材贯穿了大学数学中渗透数学文化的理念,注重学生数学素质的培养.教材内容编写简繁得当,叙述简洁,明了到位,前后衔接自然,对学生把握知识间的联系十分有益.

作者借鉴了国内外同类教材之长,吸收了众多最新的教学和科研成果,融入了自己多年的科研成果和专业工作经验,使教材内容更加充实和有新意.相信该教材会在我国大学数学课程教学改革和发展的过程中发挥积极有益的作用,同时也会满足广大读者的学习需要.

感谢作者和她的团队为我国大学数学教学改革和发展所作的努力.

顾沛

2012年3月于南开大学

第二版前言



本书第一版自 2012 年出版以来,已累计印刷 4 次,广大读者对本书提出了许多好的意见和建议. 2013 年年底,本书被评为第一批河南省“十二五”普通高等教育规划教材,借此东风,编委会对本书进行了修订. 本书保持第一版的行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换、线性方程组、矩阵的相似变换、二次型共 6 章的基本结构,仅对部分章节的内容作调整和修改,使本书更系统、更易理解,更有利于教学. 本书保留每章的数学文化欣赏部分,删去数学软件应用,精简篇幅.

线性代数是高等学校理工、经管等专业的一门重要基础课,也是自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学基础. 在科学技术,特别是在计算机技术日新月异的今天,线性代数在理论和应用上的重要性更显突出. 因此各专业不但对线性代数的内容在深度和广度上提出了要求,更在如何提高学生把握知识和运用知识解决实际问题的能力方面给予了更多的关注.

本书按照教育部高等学校非数学类专业线性代数课程基本要求和最新的全国硕士研究生入学统一考试大纲,结合作者长期的线性代数教学实践及线性代数教材建设的经验,并在充分借鉴当前国内外同类教材的基础上编写而成. 在编写过程中,集思广益、精益求精,并在内容上着力突出以下 7 个特点.

1. 体系结构完整. 本书依照教育部对高等学校非数学类专业线性代数课程教学内容的全国硕士研究生入学统一考试大纲组织内容,涵盖全国硕士研究生入学统一考试数学大纲中有关线性代数的全部内容,且在核心部分有所展开与加强,力求使学生全面地掌握线性代数的知识体系,为进一步深造打好基础.

2. 适用性、通用性强. 在内容的编排上,选择符合学生认知规律且已获得众多教师普遍认同的从行列式、矩阵、消元法解线性方程组、向量组的线性相关性、线性方程组解的结构、矩阵的相似变换到二次型的体系结构. 该体系起点低、坡度缓、难点分散、脉络清晰,便于教师教学和学生学学习. 虽然部分背景的引入是以工科为基础的,但整体内容对其他学科也是适用的.

3. 强调应用背景的引入. 对于重要的概念和理论,加强实际背景的介绍. 利用对实际问题的讨论,帮助学生理解抽象的代数概念,提高学生运用知识解决实际问题的能力.

4. 突出基本概念的教学. 针对线性代数概念多、概念之间关系复杂的特点,

首先在正文讲清概念的基础上,设置较多的实例来进一步强化;其次在每节后习题中设置较多的判断题,更在每一章的分层次测试题中安排大量的填空题和选择题.

5. 加强解题训练. 对于重要的计算和证明问题,一方面从问题的不同角度设置不同的例题;另一方面给出同一问题的多种解法,并给出数目较多的习题以强化练习.

6. 适应不同能力学生的学习要求. 每章末安排的分层次测试题 A 难易适中,通过测试的学生即达到了教学要求. 对于学有余力的学生,可进一步尝试完成测试题 B,这些题目多为历年来硕士研究生入学的全国统考试题. 对准备参加考研的同学来说,测试题 B 是很好的练习题.

7. 重视数学文化的熏陶. 在本书的每一章中,设置数学文化欣赏内容. 内容多与课程相结合,不但有助于学生对知识背景的理解,而且培养学生的数学素质,同时也是舒缓学生紧张学习的一杯香茗.

本书可作为高等学校非数学专业线性代数课程教材,也可以作为相关专业的教材教学参考书以及考研学习或自学用书.

参加本书编写的有河南农业大学的曹殿立、姬利娜、李战国,河南科技学院的马宝林、潘全香,最后由曹殿立统一定稿. 东华大学秦玉明教授仔细审阅了全稿,并提出了许多建设性的意见和建议,在此谨表示由衷的谢意! 向参考文献的作者们致敬!

虽然我们十分努力,但由于水平所限,书中不妥之处在所难免,恳请广大师生和读者批评指正.

编者

2014年9月10日

第一版前言



本书是科学出版社普通高等教育“十二五”规划教材、科学出版社工科大学数学系列课程教材的《线性代数》教材。

线性代数是高等院校理工、经管等专业的一门重要基础课,也是自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学基础。在科学技术特别是在计算机技术日新月异的今天,线性代数在理论和应用上的重要性更显突出。因此各专业不但对线性代数的内容在深度和广度上提出了要求,更在如何提高学生把握知识和运用知识解决实际问题的能力方面给予了更多的关注。

本教材按照教育部高等学校非数学类专业线性代数课程基本要求和最新的全国硕士研究生入学统一考试大纲,结合作者长期的线性代数教学实践以及线性代数教材建设的经验,并在充分借鉴当前国内外同类教材的基础上编写而成。在编写过程中,集思广益、精益求精,并在内容上着力突出以下几个特点:

1. 体系结构完整。全书依照教育部对高等学校非数学类专业线性代数课程教学内容的基本要求和全国硕士研究生入学统一考试大纲组织内容,涵盖了全国硕士研究生入学统一考试数学大纲中有关线性代数的全部内容,且在核心部分有所展开与加强,力求使学生全面地掌握线性代数的知识体系,为进一步深造打好基础。

2. 适用性、通用性强。在内容的编排上,选择符合学生认知规律且已获得众多教师普遍认同的从行列式、矩阵、消元法解线性方程组、向量组的线性相关性、线性方程组解的结构、矩阵的相似变换到二次型的体系结构。该体系起点低、坡度平缓、难点分散、脉络清晰,便于教师教学和学生学习。虽然部分背景的引入是以工科为基础的,但整体内容对其他学科也是适用的。

3. 强调应用背景的引入。对于重要的概念和理论,加强实际背景的介绍。利用对实际问题的讨论,帮助学生理解抽象的代数概念,提高学生运用知识解决实际问题的能力。

4. 突出基本概念的教学。针对线性代数概念多、概念之间关系复杂的特点,首先在正文讲清概念的基础上,设置较多的实例来进一步强化;其次在节后习题中设置了较多的判断题,更在每一章的分层次测试题中安排了大量的填空题和选择题。

5. 加强解题训练. 对于重要的计算和证明问题,一方面从问题的不同角度设置不同的例题,另一方面给出同一问题的多种解法,并给出数目较多的习题以强化练习.

6. 适应不同能力学生的学习要求. 每章末安排的分层次测试题 难易适中,通过测试的学生即达到了教学要求. 对于学有余力的学生,可进一步尝试完成测试题 B,这些题目多为近年来研究生入学的全国统考试题. 对于准备参加考研的同学来说,测试题 B 是很好的练习题.

7. 加强与数学软件的结合. 当前,能够使用数学软件进行数学计算和证明已成为大学生应该具备的能力. 本书在每一章末,针对本章内容,安排了 Mathematica 数学软件的应用,以方便教师的实验数学. 虽然限于课时,很多老师没有时间去讲授这部分内容,但也能方便学生自学.

8. 重视数学文化的熏陶. 在教材的每一章中,设置了数学文化欣赏内容. 内容多与课程相结合. 不但有助于学生对知识背景的理解,而且培养了学生的数学素质,同时也是舒缓学生紧张学习的一杯香茶.

本书可作为高等学校非数学专业理工类线性代数课程教材,也可以作为经管等各专业的教材、教学参考书以及考研学习或自学用书.

参加本教材编写的有河南农业大学的曹殿立、温建、李艳华,河南科技学院的马宝林、潘全香,最后由曹殿立统一定稿.

河南农业大学梁保松教授仔细审阅了全稿,并提出了许多建设性的意见和建议,在此谨表示由衷的谢意!

该教材的出版得到了科学出版社数理分社昌盛社长以及张中兴、贾明睿、胡志强等同志的关心和大力支持,在此深表感谢!

向参考文献的作者们表示感谢!

虽然我们十分努力,但由于水平所限,定有错误与不妥之处,恳请广大师生和读者批评指正.

编 者

2011年12月16日

目 录



丛书序	
第二版前言	
第一版前言	
第 1 章 行列式	1
1.1 二、三阶行列式	1
1.2 n 阶行列式	4
1.3 行列式的性质	8
1.4 行列式按行(列)展开	15
1.5 克拉默法则	23
第 1 章分层次测试题	25
数学文化欣赏 行列式的产生与发展	28
第 2 章 矩阵及其运算	31
2.1 矩阵的基本概念	31
2.2 矩阵的线性运算、乘法和转置运算	35
2.3 逆矩阵	45
2.4 分块矩阵	53
第 2 章分层次测试题	63
数学文化欣赏 矩阵的发展历程	66
第 3 章 矩阵的初等变换	71
3.1 初等变换与初等矩阵	71
3.2 用初等变换法求逆矩阵	76
3.3 矩阵的秩	79
第 3 章分层次测试题	89
数学文化欣赏 数不尽的 π	92
第 4 章 线性方程组	95
4.1 高斯消元法	95
4.2 向量组的线性相关性	106
4.3 向量组的秩和极大线性无关组	117

4.4	向量空间	125
4.5	线性方程组解的结构	133
	第4章分层次测试题	144
	数学文化欣赏 华罗庚与联立线性方程组	149
第5章	矩阵的相似变换	153
5.1	矩阵的特征值与特征向量	153
5.2	矩阵相似对角化的条件	163
	第5章分层次测试题	171
	数学文化欣赏 从高次代数方程的求根公式到伽罗瓦理论	175
第6章	二次型	180
6.1	向量的内积	180
6.2	二次型	189
6.3	用正交变换化二次型为标准形	199
6.4	二次型的正定性	207
	第6章分层次测试题	214
	数学文化欣赏 数学也需要实验	219
	各章习题与分层次测试题参考答案	221
	参考文献	237



第1章 行列式

行列式是线性代数的重要工具之一,它在数学的许多分支中有着广泛的应用.本章通过引入二、三阶行列式和 n 元排列的概念,给出 n 阶行列式的定义和性质,最后介绍用行列式求解线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1 二、三阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,用消元法求得解为

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.2)$$

为了便于记忆,将方程组(1.1)中的未知量的系数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 依它们在方程组中的位置排成两行两列,引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,称为二阶行列式,用来表示数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.3)$$

构成二阶行列式的4个数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为行列式的元素.它们排成两行两列,横的各排称为行,纵的各排称为列.数 a_{ij} ($i, j = 1, 2$) 称为行列式的第 i 行第 j 列元素.

如果把元素 a_{11} 到 a_{22} 的连线称为行列式的主对角线,而 a_{12} 到 a_{21} 的连线称为行列式的次对角线,则二阶行列式的值就等于主对角线上元素之积减去次对角线上元素之积.这种算法称为对角线法则.

线性方程组(1.1)的系数构成的行列式 D 称为方程组(1.1)的系数行列式.

按照二阶行列式的定义,式(1.2)中 x_1, x_2 的表达式中的分子可分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}b_1 - a_{12}b_2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

显然, $D_i (i=1, 2)$ 即为 D 中的第 i 列换成方程组(1.1)的常数项所得到的行列式.

于是, 当 $D \neq 0$ 时, 线性方程组(1.1)的解可唯一地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \quad (1.4)$$

例 1.1 求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 10, \\ x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$$

解 由于 $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, 且

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -40, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5,$$

由式(1.4)得

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 4, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{1}{2}.$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (1.5)$$

将未知量的系数按它们在方程组中的位置排成 3 行 3 列, 引入三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (1.6)$$

称 D 为线性方程组(1.5)的系数行列式. 再将 D 中的第 1 列、第 2 列、第 3 列分别换成方程组(1.5)的常数项, 分别引入三阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

其中, D, D_1, D_2, D_3 分别定义为

$$\begin{aligned} D &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \\ D_1 &= b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_3a_{13}a_{22} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32}, \\ D_2 &= b_2a_{11}a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + b_3a_{13}a_{21} - b_2a_{13}a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - b_3a_{11}a_{23}, \\ D_3 &= b_3a_{11}a_{22} + b_2a_{12}a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - b_3a_{12}a_{21} - b_2a_{11}a_{32}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

则当 $D \neq 0$ 时,

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

正是线性方程组(1.5)的唯一解.

三阶行列式的值仍可由对角线法则来记忆. 以 D 为例. 由式(1.7)知, D 由 6 项构成, 每一项均为行列式 D 的不同行不同列的 3 个元素的乘积再冠以正负号, 其规律如图 1.1 所示.

图 1.1 中的 3 条实线平行于主对角线, 实线上 3 个元素之积冠以正号; 3 条虚线平行于次对角线, 虚线上 3 个元素之积冠以负号.

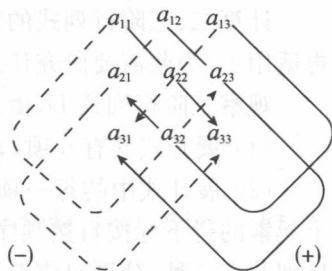


图 1.1

例 1.2 计算

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D &= 2 \times 2 \times (-1) + 3 \times 3 \times 1 + (-1) \times 1 \times (-1) - (-1) \times 2 \times 1 \\ &\quad - 3 \times (-1) \times (-1) - 2 \times 1 \times 3 \\ &= (-4) + 9 + 1 - (-2) - 3 - 6 = -1. \end{aligned}$$

习题 1.1

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(6) \begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}.$$

2. 求解下列线性方程组:

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8, \\ x_1 - 2x_2 = -3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3. \text{ 解方程: } \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0.$$

1.2 n 阶行列式

计算二、三阶行列式的对角线法,虽然简单直观,但对高于三阶的行列式就不再适用了.为此需要研究任意阶行列式的一般算法.

观察三阶行列式 D ,由式(1.7)可见:

(1) 展开式共有 6 项,其中 3 个正项、3 个负项.

(2) 展开式中的每一项都是行列式位于不同行不同列的 3 个元素之积,这 3 个元素的行下标按自然顺序排列时,其列下标都是 1,2,3 的某个排列.1,2,3 的全排列共有 6 种,分别对应着展开式中的每一项.

(3) 展开式中带正号的 3 项,其列下标的排列分别为 123,312,231,它们都是排列 123 中的任意两个数经零次或两次(偶数次)交换得到的;而带负号的 3 项,其列下标是排列 123 中的任意两个数经 1 次(奇数次)交换得到的.也就是说,行列式的展开式每一项的符号与排列 123 中数字的交换次数(奇数次或偶数次)有关.

为阐明 n 阶行列式展开项的符号规律,引入逆序数的概念.

1.2.1 排列的逆序与奇偶性

n 个自然数 $1,2,\dots,n$ 按一定的次序排成的一个无重复数字的有序数组称为一个 n 级排列,记为 $i_1 i_2 \cdots i_n$.

显然, n 级排列共有 $n!$ 个,其中,称排列 $12\cdots n$ 为自然排列.

定义 1.1 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中,若一个较大的数排在一个较小数的前面,则这两个数构成一个逆序.一个排列中逆序的总数,称为这个排列的逆序数,记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例 1.3 求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

(1) 352461; (2) $n(n-1)\cdots 21$.

解 由逆序数的定义,任一排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 + i_2 后面比 i_2 小的数的个数 + \cdots + i_{n-1} 后面比 i_{n-1} 小的数的个数,故

(1) $\tau(352461) = 2 + 3 + 1 + 1 + 1 = 8$,352461 为偶排列;

(2) $\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$,而 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的

奇偶性由 n 而定:

当 $n=4k$ 时, $\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$ 是偶数;

当 $n=4k+1$ 时, $\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$ 是偶数;

当 $n=4k+2$ 时, $\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 是奇数;

当 $n=4k+3$ 时, $\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 是奇数.

所以, 当 $n=4k, n=4k+1$ 时, 此排列为偶排列; 当 $n=4k+2, n=4k+3$ 时, 此排列为奇排列.

定义 1.2 一个排列中的某两个数 i, j 位置对调, 而其余数不动, 这样得到一个排列的实施过程称为一次对换, 用 (i, j) 表示. 相邻两个数的对换称为邻换.

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证 首先证明一次邻换改变排列的奇偶性.

设 n 级排列为 $\cdots ij \cdots$, 将相邻的两个数 i, j 对换, 得到一个新的排列 $\cdots ji \cdots$. 由于除 i, j 之外其余的数不动, 所以其余数之间的顺序没有变化.

若 $i > j$, 则新排列的逆序数比原排列减少 1; 若 $i < j$, 则新排列的逆序数比原排列增加 1. 所以一次邻换改变了排列的奇偶性.

再证明对换的一般情形.

设 n 级排列为 $\cdots ia_1 a_2 \cdots a_k j \cdots$, i, j 之间相隔 k 个数. 要实现 i, j 的对换, 得到新排列 $\cdots ja_1 a_2 \cdots a_k i \cdots$, 可先将 i 与 a_1 对换, 再把 i 与 a_2 对换, \cdots , 这样, 经过 $k+1$ 次邻换, 就可以将 i 调换到 j 之后, 得到排列 $\cdots a_1 a_2 \cdots a_k j i \cdots$; 然后再把 j 对换到 a_1 之前, 这需要经过 k 次邻换. 这样, 共经过 $2k+1$ 次邻换, 完成了 i 与 j 的对换. 所以原排列与新排列的奇偶性相反.

推论 1.1 奇排列变成自然排列的对换次数为奇数, 偶排列变成自然排列的对换次数为偶数.

由定理 1.1 知, 对换的次数就是排列奇偶性的改变次数, 而 $12\cdots n$ 是偶排列, 所以若排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是奇(偶)排列, 则必须经奇(偶)数次对换才能变成自然排列.

推论 1.2 n 个自然数 ($n \geq 2$) 共有 $n!$ 个 n 级排列, 其中奇排列和偶排列各占一半.

证 n 级排列的总数为 $n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$ 个.

设其中奇排列为 p 个, 偶排列为 q 个. 若对这 p 个奇排列施行对换 $(1, 2)$, 由定理 1.1 知, p 个奇排列均变为偶排列, 故 $p \leq q$; 同理若对 q 个偶排列施行对换 $(1, 2)$, 则 q 个偶排列变为奇排列, 故 $q \leq p$. 所以 $p = q$, 从而 $p = q = \frac{n!}{2}$.