解题思路与自测

〔第二册〕

初中新教材代数同步标准化考试

海洋出版社

初中新教材代数同步标准化考试

解题思路与自测

（第二册）

刘申有　秦迎昌
旭　红　谭叔康　编著

海洋出版社

智力就是財富

嚴濟慈題

一九八七年十月

前 言

本丛书根据国家教委的有关规定和精神编写而成。各试均由“学习内容与重点”、“解题思路”、“标准化自测册题”、“综合标准化试题”、“标准化自测试题答案”、“综合试题答案等部分组成。

编写本丛书旨在帮助广大初中学生和自学青年学习初中各科份担，提高分析、综合和解决问题的能力。但因编者水平有限，难免出现错误和问题，望广大读者批批指正。

编　　者

浅谈标准化试题的解法

本书除部分例题外，自我测试题全部选用标准化试题。在例题中编选了一般题型，主要目的是为了分析各类题的解题思路及培养各种能力，是为解标准化试题服务的。

关于标准化试题，主要可分为填空、判断、选择填空题。为了增强解标准化试题的能力，下面略谈标准化试题的解法，以便解各种类型标准化题时，应用恰当的方法。

1．填空题：填空题主要包括一般求解题与证明题。主要解法是用直接法，有时也可能用分析法和观察法。

2．判断题：包括概念题、计算题、论证题。比较简单的题，可用直接法解。证明题可用直接法或分析法解。比较复杂的题可用特殊值的方法探求。对于多项判断且概念较为邻近的判断题，可用比较法判断。

对直接法、分析法、观察法、特殊值法等，在下面选择填空部分中，有较详细的说明。

3．选择填空：

（1）直接法（推演法）：直接从条件出发，运用数学概念与法则、公式、定义、公理、定理，进行运算或推理论证，求得结果，再把它与各选择项（支）加以比较，做出正确选择。

（2）筛选法（淘汰法）：是把已知条件与各选择项结合起来，根据有关基础知识进行思考与观察，将不可能成立的答案一个一个否定。在单项选择题中所剩下的一个答案就是正确的。

（3）分析法（逆推法）：是果索因法，从结论着手思考，把结论当作条件，经过演算或推理，所得的结果若满足题目条件的要求，就可以选择这项答案。

（4）检验法：包括一般检验法和特殊值检验法。

一般代入法：在单项选择题中，根据正确结论的唯一性，把选择项一一代入干题，根据计算决定正确与错误。

特殊值代入法：按题目已知条件，找到符合条件的特殊值，代入进行检验，看结论是否正确，以便淘汰不正确的答案，选择正确答案。

（5）观察法：一些简单题或用图形表示各选择项的题中，可以直接思考或借助于图形性质进行观察，最后做出正确的选择。

目　　录

第五章　二元一次方程组

（一）学习内容与重点、难点

1. 内容：了解二元一次方程、二元一次方程的一个解、二元一次方程的解集。理解方程组、方程组的解、解方程组。掌握一次方程组的解法。熟练地列一次方程组解应用题。

2. 重点难点：解二元一次、三元一次方程组是重点。列方程组解应用是重点和难点。

（二）解题思路与分析

1. 应能迅速而正确地判断一个方程是不是二元一次方程。解有关定义或概念的判断问题，首先需要理解定义的意义，认真记忆定义。然后逐个分析判断其对与错。

例1　下列各方程为二元一次方程的是（　　）。

（A）$3xy+2x=1$　　（B）$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=3$

（C）$x^2-4y=0$　　（D）$3x+y=5$

怎样理解“含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是1，这样的方程叫做二元一次方程”，除以后要学的分式方程外，所指方程均表示整式方程，所以（B）所指不是二元一次方程。“含有未知数的项的次数都是1”，项的次数是指一项中字母指数的和是1，而（A）中的$3xy$项的次数是2，（C）中x^2的次数也是2，因此它们都不是二元一次方程，这样只有（D）是符合二元一次方程的定义的。本题用的是筛选法。

2. 什么叫二元一次方程的一个解？解这一类题，首先要认真理解其定义。“适合一个二元一次方程的每一对未知数的值，叫做这个二元一次方程的一个解。”对适合的理解是，能使方程成立的每一对未知数的值，就是能使方程左右两边相等的一对未知数的值。只有正确理解了这个定义，才有可能解这类题，解这类题还要求有一定的计算能力，可以这样说，理解定义之后，计算过程也就是分析过程。

例2 $\begin{cases}x=-1\\y=-4\end{cases}$ 是方程组（　　）的解。

(A) $\begin{cases}x-2y=-3\\3x+y=5\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2x-y=1\\3x+y=7\end{cases}$

(C) $\begin{cases}x-y=3\\3x-y=1\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2x-y=-2\\x+3y=5\end{cases}$

把$\begin{cases}x=-1\\y=-4\end{cases}$一一代入方程组（A）、(B)、(C)、(D)中的各方程检验，可知只有当代入到（C）时，才符合使两个方程的左、右两边都相等。这样问题就得解了。本题用的是一般代入法。

3. 用代入消元法解二元一次方程组，是本章的重点，也是解二元、三元一次方程，解二元二次方程组的基础。在解方程组的过程中无论用什么方法，最后都要用代入法，所以用代入法解二元一次方程组的方法必须掌握熟练。何为代入消元法？用代入的方法消去一个未知数解二元一次方程组叫做代入消元法。一般步骤是（1）将方程组里的一个方程变形（选系数的绝对值最小的方程），用含有一个未知数的代数式表示另一个未知数；（2）用这个代数式代替另一个方程中相应的未知数，将二元一次方程组转化为一元一次方

程，求得这个未知数的值；（3）把求得的未知数的值代入用含有一个未知数的代数式中去，求出另一个未知数，从而得出方程组的解。用代入法解二元一次方程组的题型，无论难易，最后总可以整理成$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$型，当$a_1$，$a_2$，$b_1$，$b_2$中有一个是1，这是最简单的一类，如$\begin{cases}2x-y=3\\3x+2y=8\end{cases}$，若$a_1$，$a_2$，$b_1$，$b_2$都不是1，这是较复杂的类型，如$\begin{cases}2x+3y=-4\\5x+6y=-7\end{cases}$。以上这两类题均应能准确而熟练地解出。用代入消元法解二元一次方程的关键是通过代入消去一个未知数（消元）使方程组得解。

例3 解方程组 $\begin{cases}2x-y=3 & (1)\\3x+2y=8 & (2)\end{cases}$

解 由（1）得$y=2x-3$ （3）

把（3）代入（2），

$$3x+2(2x-3)=8$$
$$3x+4x-6=8$$
$$7x=14$$
$$x=2$$

把$x=2$代入（3），

$$y=2\times2-3=1$$

$\therefore\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 是原方程组的解。

例4 解方程组 $\begin{cases}2x+3y=-4 & (1)\\5x+6y=-7 & (2)\end{cases}$

解 由（1）得 $x=\dfrac{-3y-4}{2}$ （3）

把（3）代入（2），

$$5\times\frac{-3y-4}{2}+6y=-7$$

$$5\times(-3y-4)+12y=-14$$

$$-15y-20+12y=-14$$

$$-3y=6$$

$$y=-2$$

把$y=-2$代入（3），

$$x=\frac{-3\times(-2)-4}{2}=\frac{6-4}{2}=1$$

$\therefore\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$是原方程组的解。

用代入法解二元一次方程的解题思路是：第一步，选一个方程变形，例3中选了方程（1），因为其y的系数绝对值最小；例4中也选了方程（1），因为其中x的系数是2，它的绝对值也是最小。第二步是代入另一个方程消去一个未知数，解一元一次方程。第三步求另一个未知数。熟悉了以上步骤，也就掌握了解这类有关标准题的根本思路。

关于代入法解有关标准化题之根本，在于能用代入法熟练而准确的解题，因此解方程的计算能力就成了解这类题的思路中的主要环节。

例5 方程组$\begin{cases}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{4}-\dfrac{3x-2y}{2}=-1\\[2mm]\dfrac{3x}{2}+\dfrac{4y}{3}-\dfrac{3x+4y}{2}=-\dfrac{16}{3}\end{cases}$的解是

（　　）。

(A) $\begin{cases}x=15.6\\y=8\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}x=18\\y=8\end{cases}$

(C) $\begin{cases}x=-18\\y=8\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}x=18\\y=-8\end{cases}$

思路分析　将（A）、（B）、（C）、（D）分别代入原方程，如果解是(A)或（B)，那么较省事；如果解是(D)，显然较费事。如果你能准确而熟练的解这个方程组，就可以达到准确而较快的判断了。

$$\begin{cases}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{4}-\dfrac{3x-2y}{2}=-1 & (1)\\[2ex] \dfrac{3x}{2}+\dfrac{4y}{3}-\dfrac{3x+4y}{2}=-\dfrac{16}{3} & (2)\end{cases}$$

解　由（1）得　$8x+9y-6(3x-2y)=-12$

$$10x-21y=12 \qquad (3)$$

由（2）得　$9x+8y-3(3x+4y)=-32$

$$8y-12y=-32$$

$$-4y=-32$$

$$\therefore y=8$$

把$y=8$代入（3），

$$10x-21\times 8=12$$

$$10x=12+168$$

$$x=18$$

$\therefore \begin{cases}x=18\\y=8\end{cases}$ 是原方程组的解。

这样就可以判断（B）是正确的解。

例6　老师在黑板上写了一道解方程组 $\begin{cases}ax+by=5\\3x-cy=4\end{cases}$ 的题，王伟同学正确解得 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$，而张宏同学由于将题错抄成

$\begin{cases}ax+by=5\\3x+cy=4\end{cases}$，因而他解得 $\begin{cases}x=6\\y=-7\end{cases}$。那么老师在黑板上写的原题是什么？

分析　怎样求得原方程呢？首先要了解二元一次方程组的解的定义，这样可以通过把 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 这个正确的解，代入 $3x-cy=4$ 确定 $c=2$。因为 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 是 $\begin{cases}ax+by=5\\3x-cy=4\end{cases}$ 的解，$\begin{cases}x=6\\y=-7\end{cases}$ 是 $\begin{cases}ax+by=5\\3x+cy=4\end{cases}$ 的解，张宏把 $3x-cy=4$ 错抄成 $3x+cy=4$ 而得出第二个解，但这两个解均能使 $ax+by=5$ 成立，因而可以通过待定系数法，确定其中的 a、b 的值，即解 $\begin{cases}2a+b=5\\6a-7b=5\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$，这样 $a=2$，$b=1$，$c=2$ 都是正确的，老师写在黑板上的原题是 $\begin{cases}2x+y=5\\3x-2y=4\end{cases}$。

待定系数法：在因式分解、方程或函数……中，根据已知字母的值或设所求字母的值，列方程组，来确定所求字母的值的方法叫做待定系数法。待定系数法的一般步骤是：

（1）先假设一个恒等式（或用给定的方程），其中含有几个待定的字母的值为待定的系数。

（2）再依已知条件（已知字母的值）列出几个方程，组成方程组。

（3）解方程组，求出各待定系数的值。

4. 用加减消元法解二元一次方程组是本章的重点。由于这种方法较代入消元法简便，所以在解二元一次方程组时，一般也是用加减消元法，但在加减消元法解三元、二元

一次方程组的过程中也必不可少地用到代入法，所以这两种方法都必须掌握熟练。可以说，在解二元一次方程组的方法中，代入法是基础，加减法是重点。

何为加减消元法呢？通过用加减的方法消去一个未知数，这种解方程组的方法叫做加减消元法。一般步骤是：

（1）把一个或两个方程的两边乘以一个适当的数，使方程中的某一个未知数的系数的绝对值相等；

（2）当绝对值相等的系数的符号相反时做加法，符号相同时做减法。消去一个未知数，把二元一次方程组转化为一元一次方程，求得一个未知数的值；

（3）代入原方程中任意一个方程，求另一个未知数的值，使二元一次方程组得解。

用加减消元法解二元一次方程组，也是无论题型难易，最后也都要整理为一般形式$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$型再消元解方程组，把哪一个未知数的系数化为绝对值相同的数呢？这要看哪一个相同字母的系数的最小公倍数的绝对值最小，就把它化成绝对值相同的系数。

用加减消元法解二元一次方程的中心仍是消元，化二元为一元，使方程组得解，这种方法必须熟练掌握。

例7 解方程组 $\begin{cases}8x+9y=23 & (1)\\17x-6y=74 & (2)\end{cases}$

解 $2\times(1)$得 $16x+18y=46$ （3）

$3\times(2)$得 $51x-18y=222$ （4）

$(3)+(4)$得 $67x=268$

$x=4$

把$x=4$代入（1），

$$8\times4+9y=23$$
$$9y=23-32$$
$$9y=-9$$
$$y=-1$$

$\therefore\begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases}$ 是原方程组的解.

方程组中两个方程x的系数的最小公倍数的绝对值是136，而y的系数的最小公倍数的绝对值是18，此题消去未知数y要比消去未知数x简单得多，同时y的系数的符号相反，应做加法，所以就选择消去y.

例3 解方程组 $\begin{cases}5x+2y=25 & (1)\\3x+4y=15 & (2)\end{cases}$

解 $2\times(1)-(2)$,

$$\begin{array}{rl} & 10x+4y=50\\ -) & 3x+4y=15\\ \hline & 7x\qquad=35\end{array}$$

$$x=5$$

把$x=5$代入（1），

$$5\times5+2y=25$$
$$2y=0$$
$$y=0$$

$\therefore\begin{cases}x=5\\y=0\end{cases}$ 是原方程组的解.

上面这方程组的两个方程中，x的系数的最小公倍数的绝对值是15，而y的系数的最小公倍数的绝对值是4，此题消去未知数y较消去未知数x要省事。y的系数的符号相同，应做减法.

以上两例是基础，对于一个较复杂的二元一次方程组的解题思路是什么呢？应是先将二元一次方程组化为一般形式，然后考虑消去什么未知数？用加法还是用减法？

例9 解方程组 $\begin{cases}2(x-150)=5(3y+50) & (1)\\ 10\%\cdot x+6\%\cdot y=8.5\%\times 800 & (2)\end{cases}$

解 由（1）得：$2x-300=15y+250$

$$2x-15y=550 \quad (3)$$

由（2）得：$10x+6y=85\times 80$

$$5x+3y=3400 \quad (4)$$

(3)＋5×(4)，

$$\begin{array}{r}2x-15y=550\\ +)\ 25x+15y=17000\\ \hline 27x\qquad\quad =17550\end{array}$$

$$x=650$$

把$x=650$代入（4），

$$5\times 650+3y=3400$$

$$3y=3400-3250$$

$$3y=150$$

$$y=50$$

$\therefore \begin{cases}x=650\\ y=50\end{cases}$是原方程组的解。

例10 解方程组 $\begin{cases}\dfrac{x-y}{3}+\dfrac{x+y}{2}=6 & (1)\\ 4(x+y)-5(x-y)=2 & (2)\end{cases}$

解法 由（1）得：$2x-2y+3x+3y=36$

$$5x+y=36 \quad (3)$$

由（2）得：$4x+4y-5x+5y=2$