普通高等教育“十二五”规划教材

微积分
（上册）

主　编　贺建辉
副主编　周　尉　葛美宝

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育"十二五"规划教材

微积分

（上册）

主　编　贺建辉
副主编　周　尉　葛美宝

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书以培养学生的专业素质为目的，是按照教育部关于独立学院培养“本科应用型高级专门人才”的指示精神，面向独立学院经济管理类专业而编写的微积分课程教材。主要特点是把数学知识和经济学、管理学的有关内容有机结合起来，融经济、管理于数学，培养学生用数学知识和方法解决实际问题的能力。

全书共10章，分为上、下册两册。本书是上册，主要包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等内容。每章后附有数学文化或数学建模的内容。

本书可作为独立学院经济类、管理类专业微积分课程的教材，也可作为本科院校或相关专业微积分课程的选用教材。

图书在版编目（CIP）数据

微积分. 上册 / 贺建辉主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2015.8
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5170-3460-5

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①贺… Ⅲ. ①微积分－高等学校－教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第174710号

书　　名	普通高等教育“十二五”规划教材 **微积分（上册）**
作　　者	主编　贺建辉　副主编　周尉　葛美宝
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　　刷	北京美精达印刷有限公司
规　　格	184mm×260mm　16开本　11.5印张　272千字
版　　次	2015年8月第1版　2015年8月第1次印刷
印　　数	0001—2000册
定　　价	**30.00**元

前　言

PREFACE

本书充分考虑高等教育大众化教育阶段的现实状况，以教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的新的“独立学院经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”为依据，结合经管类研究生入学考试对数学的大纲要求而编写．参加本书编写的人员都是多年担任经济数学——微积分实际教学的老师，他们都有较深的理论造诣和较丰富的教学经验．本书在编写时，以培养应用型人才为目标，将数学基本知识和经济、管理学科中的实际应用有机结合起来，主要有以下几个特点：

(1) 注重体现应用型本科院校特色，根据经济类和管理类的各专业对数学知识的需求，本着“轻理论、重应用”的原则制定内容体系．

(2) 注重内容理论联系实际，在内容安排上由浅入深，与中学数学进行了合理的衔接．在引入概念时，注意了概念产生的实际背景，采用提出问题、讨论问题、解决问题的思路逐步展开知识点，使得学生能够从实际问题出发，激发学习兴趣；另外在微分学与积分学章节中，重点引入适当的经济、管理类的实际应用例题和课后练习题，以锻炼学生应用数学工具解决实际问题的意识和能力．

(3) 本教材结构严谨，逻辑严密，语言准确，解析详细，易于学生阅读．由于抽象理论的弱化，突出理论的应用和方法的介绍，内容深广度适当，使得内容贴近教学实际，便于教师教与学生学．本书内容分上、下册，包括函数与极限，一元函数微积分学，微分方程，空间解析几何，多元函数微积分学，无穷级数等内容．

(4) 本书在每一章的结束部分，附加了历史上有杰出贡献的伟大数学家的生平简介，通过了解数学家生平和事迹，可以让学生真正了解数学发展的基本过程，而且能让学生学习数学家追求真理、维护真理的坚韧不拔的科学精神．

参加本书编写的有浙江理工大学科技与艺术学院贺建辉（第 1～3、6、7 章），浙江医学高等专科学校葛美宝（第 4、5 章），浙江理工大学科技与艺术

学院周尉（第 8、9 章），浙江理工大学科技与艺术学院乾春涛（第 10 章）．全书由贺建辉统稿并多次修改定稿，最后由严克明教授审稿．本书在编写过程中，参考和借鉴了许多国内外有关文献资料，并得到了很多同行的帮助和指导，在此对所有关心和支持本书编写、修改工作的教师表示衷心的感谢．

限于编者编写水平，书中难免有错误和不足之处，殷切希望广大读者批评指正．

编　者

2015 年 5 月

目 录

CONTENTS

第 1 章　函数与极限

微积分研究的是变量与运动的学科．变量间的互相依赖关系称为函数关系，即微积分研究的对象是函数，所利用的工具是极限论．因此，函数的概念是微积分中最重要的概念之一．本章将介绍函数、极限与函数的连续性等基本内容．

1.1　函数的概念与性质

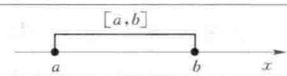
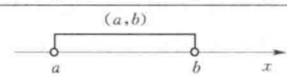
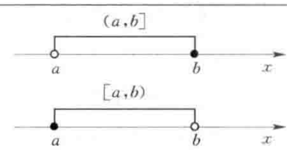
1.1.1　区间与邻域

1. 区间

在观察某一现象的过程时，常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，称为常量；有的量在过程中是变化的，也就是可以取不同的数值，称为变量．需要注意的是，在过程中还有一种量，它虽然是变化的，但是它的变化相对于所研究的对象是极其微小的或不变的，也称为常量．

如果变量的变化是连续的，则常用区间来表示其变化范围．在数轴上来说，区间是指介于某两点之间的线段上点的全体．常见区间形式见表 1.1.1.

表 1.1.1

区间名称	区间满足的不等式	区间记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,\ b]$	
开区间	$a<x<b$	$(a,\ b)$	
半开区间	$a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$	$(a,\ b]$ 或 $[a,\ b)$	

以上所述的都是有限区间，除此之外，还有无限区间：

(1) $[a,\ +\infty)$：表示不小于 a 的实数的全体，也可记为：$a\leqslant x<+\infty$.

(2) $(-\infty,\ b)$：表示小于 b 的实数的全体，也可记为：$-\infty<x<b$.

(3) $(-\infty,\ +\infty)$：表示全体实数，也可记为：$-\infty<x<+\infty$.

注　$-\infty$和$+\infty$，分别读作“负无穷大”和“正无穷大”，它们不是数，仅仅是记号.

2. 邻域

以点 a 为中心，$\delta>0$ 为半径的开区间，称为点 a 的 δ 邻域，记作：

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$$

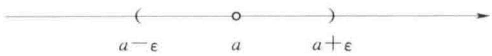


图 1.1.1

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉，点 a 的 δ 邻域 $U(a,\ \delta)$ 去掉中心 a 后，称为去（空）心邻域，记作 $\mathring{U}(a,\ \delta)$，如图 1.1.1 所示.

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)U(a,a+\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$$

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,\ a)$ 称为点 a 的**左 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域**，把开区间 $(a,\ a+\delta)$ 称为点 a 的**右 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域**.

1.1.2　函数

1. 函数的概念

在实际问题中，常常涉及到多个变量并不是彼此孤立存在，而是按照一定规律相互联系的情况．例如，圆的面积 S 与圆的半径 r 之间的关系就是 $S=\pi r^2$；某商店销售某种商品的过程中，销售收入 R 与该商品销售量 Q 之间的关系就是 $R=PQ$，其中 P 为该商品单价．这种存在于变量之间的相依关系，就是函数关系．

定义 1.1.1　设 D，B 是两个非空数集，如果存在一个对应法则 f，使得对 D 中任何一个实数 x，在 B 中都有唯一确定的实数 y 与 x 对应，则称对应法则 f 是 D 上的函数，记为

$$y=f(x),x\in D$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**，$f(x)$ 称为与 x 对应的**函数值**，集合 $f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

2. 函数相等

由函数的定义可知，一个函数的构成要素为：定义域、对应关系和值域．由于值域是由定义域和对应关系决定的，所以，如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，我们就称两个**函数相等**，与自变量及因变量用什么字母表示无关．

函数定义域的确定取决于两种不同的研究背景：一是有实际应用背景的函数，其定义域取决于变量的实际意义；二是由抽象的算式表达的函数，其定义域就是使得算式有意义的一切实数所组成的集合，这种定义域称为函数的**自然定义域**．在求函数的自然定义域时，常考虑以下几点：

(1) 分母不能为零．

(2) 偶次方根下被开方数大于或等于零．

(3) 对数的真数大于零．

(4) 在 $y=\tan x$ 中，$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$；$y=\cot x$ 中，$x\neq k\pi$.

(5) 在 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$ 中，$|x|\leqslant 1$.

若一个函数是由有限个函数经过四则运算而得，其定义域是这有限个函数的定义域的交集，并去掉使分母为零的点．

例 1.1.1　求函数 $f(x)=\dfrac{\lg(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^2}$ 的定义域．

解　要使 $f(x)$ 有意义，显然 x 要满足

$$\begin{cases} 3-x>0 \\ \sin x\neq 0 \\ 5+4x-x^2\geqslant 0 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x<3 \\ x\neq k\pi \quad (k\text{ 为整数}) \\ -1\leqslant x\leqslant 5 \end{cases}$$

所以 $f(x)$ 的定义域为 $D=[-1,0)\cup(0,3)$.

例 1.1.2 判断下列每组函数的两函数是否表示同一个函数：

(1) $y=\sqrt{x^2}$，$y=x$ (2) $y=\ln t^2$，$S=2\ln|x|$

解 (1) 函数 $y=\sqrt{x^2}$ 的值域是 $[0, +\infty)$. 而函数 $y=x$ 的值域是 $(-\infty, +\infty)$，即两个函数的值域不同，所以不是同一函数.

(2) 函数 $y=\ln t^2$ 的定义域是 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$；而函数 $S=2\ln|x|$ 的定义域是 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，所以两个函数的定义域相同. 又 $y=\ln t^2=2\ln|t|$，所以两个函数的对应法则也相同. 尽管两个函数的自变量、因变量所用的字母不同，但两个函数还是表示同一个函数.

3. 函数的表示法

函数的表示法有公式法（解析法）、图像法、表格法. 微积分常用的是公式法，即用数学式子表达的函数.

公式法包含一类函数，称为**分段函数**，它是一个在其定义域的不同部分用不同的数学表达式表示的函数. 注意分段函数不是由几个函数组成，而是一个函数.

下面介绍几个常用的函数.

例 1.1.3 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x & (x\geqslant 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

图形如图 1.1.2 所示。

例 1.1.4 取整函数

$$y=[x], x\in(-\infty, +\infty)$$

符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，其图形如图 1.1.3 所示. 如 $[3]=3$，$[3.1]=3$，$[-\sqrt{2}]=-2$. 易知，取整函数 $y=[x]$ 有如下性质

$$[x]\leqslant x\leqslant[x]+1$$

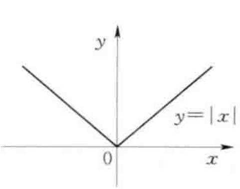


图 1.1.2

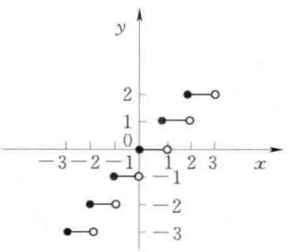


图 1.1.3

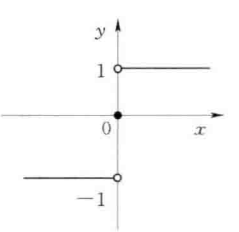


图 1.1.4

例 1.1.5　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

图形如图 1.1.4 所示．

在以上 3 个例子中看到，有的函数在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同数学表达式来表示，这类函数称为**分段函数**．在自然科学、工程技术和经济学中，经常会遇到分段函数的情形．

例 1.1.6　自 2011 年 9 月 1 日起，我国执行新的个人所得税税率，起征点 3500 元，累进税率见表 1.1.2.

表 1.1.2

级数	含　税　级　距	税率/%	速算扣除数
1	不超过 1500 元的部分	3	0
2	超过 1500 元至 4500 元的部分	10	105
3	超过 4500 元至 9000 元的部分	20	555
4	超过 9000 元至 35000 元的部分	25	1005
5	超过 35000 元至 55000 元的部分	30	2755
6	超过 55000 元至 80000 元的部分	35	5505
7	超过 80000 元的部分	45	13505

试建立收入 x 与应缴个人所得税 y 之间的函数关系．怎样解释速算扣除数？若李某本月扣除五险一金后的收入是 15000 元，他应缴个人所得税多少元？

解　个人所得税是分段累进计税，所以收入与应缴个人所得税之间的函数关系可以用分段函数表示．

当 $x\leqslant 3500$ 时，$y=0$；

当 $3500<x\leqslant 5000$ 时，$y=0.03(x-3500)$；

当 $5000<x\leqslant 8000$ 时，$y=0.03\times 1500+0.1(x-5000)=0.1x-455$；

当 $8000<x\leqslant 12500$ 时，$y=0.03\times 1500+0.1(4500-1500)+0.2(x-8000)=0.2x-1255$；

第 4、5、6、7 级类似计算，可得如下结果

$$y=\begin{cases}0 & (x\leqslant 3500)\\ 0.03x-105 & (3500<x\leqslant 5000)\\ 0.1x-455 & (5000<x\leqslant 8000)\\ 0.2x-1255 & (8000<x\leqslant 12500)\\ 0.25x-1880 & (12500<x\leqslant 38500)\\ 0.3x-3850 & (38500<x\leqslant 58500)\\ 0.35x-6730 & (58500<x\leqslant 83500)\\ 0.45x-15080 & (83500<x)\end{cases}$$

怎样解释速算扣除数？以 $5000<x\leqslant 8000$，$8000<x\leqslant 12500$ 两段为例．

当 $5000<x\leqslant 8000$ 时，$y=0.1x-455$ 又可以表示为

$$y=0.1(x-3500)-105 \tag{1.1}$$

当 $8000<x\leqslant 12500$，$y=0.2x-1255$ 又可以表示为

$$y=0.2(x-3500)-555 \tag{1.2}$$

式（1.1）、式（1.2）中的 105 和 555 就是相应级数所对应的速算扣除数．税务部门在计算个人所得税时，就是先将收入 x 归入相应的级数，然后用该级数对应的税率乘以收入 x 与 3500 的差，再减去该级数对应的速算扣除数．

李某本月扣除五险一金后的收入是 15000 元，应归入第 4 级，税率为 25%，所以应缴个人所得税为

$$y=0.25(15000-3500)-1005=1870(\text{元})$$

1.1.3 函数的基本特性

研究函数的目的就是为了了解它所具有的一些性质，以便掌握它的变化规律．函数的基本特性主要包含奇偶性、单调性、周期性和有界性等．

1. 函数的奇偶性

设 D 是关于原点对称的实数集，f 是定义在 D 上的函数，

(1) 若对每一个 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 f 为 D 上的**偶函数**．

(2) 若对每一个 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 f 为 D 上的**奇函数**．

从几何直观上看，偶函数的图形关于 y 轴是对称的，奇函数的图形关于原点是对称的．例如，$y=x^2$ 是偶函数（图 1.1.5），而 $y=x^3$ 是奇函数（图 1.1.6）.

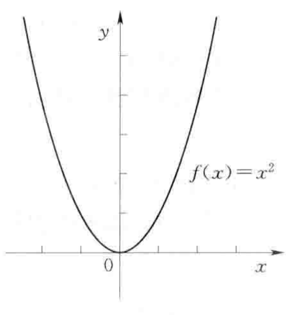


图 1.1.5

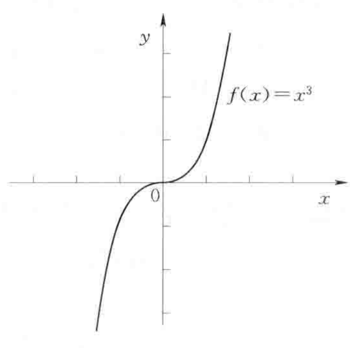


图 1.1.6

例 1.1.7 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性．

解 函数 $f(x)$ 的定义域是 $R=(-\infty,+\infty)$，关于原点对称，由于

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]=\ln[-x+\sqrt{1+(x)^2}]\\&=\ln\left(\frac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是奇函数．

2. 函数的单调性

设 $f(x)$ 是定义在 D 上的函数．区间 $I\subset D$，对任意 x_1，$x_2\in I$：当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上**单调增加**，I 称为**单调增区间**；当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上**单调减少**，I 称为**单调减区间**．

在定义域上单调增加和单调减少函数统称为**单调函数**，I 称为单调区间．若严格不等式成立，则分别称为严格单调增加和严格单调减少．

从几何直观上看，单调增加函数的图形是随 x 轴的增加而上升的曲线，单调减少函数的图形是随 x 轴的增加而下降的曲线，分别如图 1.1.7 和图 1.1.8 所示．

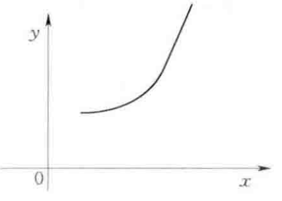


图 1.1.7

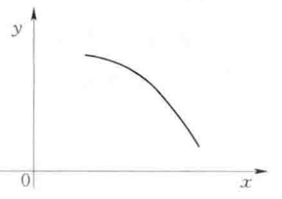


图 1.1.8

例如：

(1) $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调增加．

(2) $y=\dfrac{1}{x}$在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 上分别严格单调减少，但在定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内不具有单调性．

(3) $y=[x]$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加，但非严格单调增加．

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义．若存在正数 $T>0$，对任意 $x\in I$，有 $x+T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，T 称为 $f(x)$ 的一个周期．

若 T 是函数 $f(x)$ 的周期，则 kT 也是函数 $f(x)$ 的周期，$k\in Z$. 通常函数的周期是指它的最小正周期．例如函数 $\sin x$，$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数．

若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，则在长度为 T 的两个相邻的区间上，函数的图像有相同的形状．所以，只要知道了周期函数 $f(x)$ 在一个周期内的局部性态就可以推知它的全局性态．

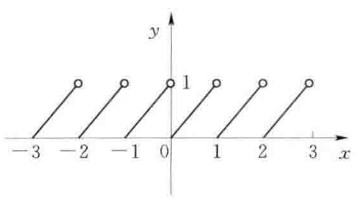


图 1.1.9

例如 $f(x)=x-[x],x\in(-\infty,+\infty)$的周期为 1，如图 1.1.9 所示．

4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 为定义在 D 上的函数，数集 $X\subset D$. 如果存在常数 M_1、M_2，使得对任一 $x\in X$，都有

$$M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$$

就称函数 $f(x)$ 在 X 内有界，且称 M_1 为 $f(x)$ 在 X 内的一个**下界**，M_2 为 $f(x)$ 在 X 内的一个**上界**，如果这样的 M_1，M_2 不存在（或其中一个不存在），就称函数 $f(x)$ 在 X 内无界．

例如，函数 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的．又如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在 $[1,+\infty)$

上有界，在 $(0, 1)$ 上无界.

不难知道，有界函数必有上界和下界. 几何上，有界函数 $f(x)$ 的图形完全位于直线 $y=M_1$ 和 $y=M_2$ 之间，如图 1.1.10 所示.

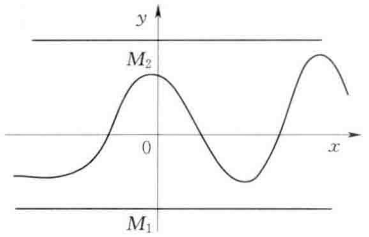


图 1.1.10

1.1.4 反函数

在匀速直线运动中，若已知速度，则测得时间，可求出路程 $s=vt$，路程作为时间 t 的函数. 反之测得路程，可求得时间 $t=s/v$，时间作为路程的函数.

自变量与因变量的转化，就是反函数的概念.

1. 反函数的定义

定义 1.1.2 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 如果对值域 $f(D)$ 的每个 y，都有唯一的 $x\in D$，使得 $f(x)=y$，则这样定义的 x 作为 y 的函数，称为 f 的反函数，记为 f^{-1}，即

$$f^{-1}: y\to x \quad 或 \quad x=f^{-1}(y)$$

由于习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以常把上述反函数改写成

$$y=f^{-1}(x)$$

由函数、反函数的定义可知，反函数的定义域是原函数的值域，值域是原函数的定义域. 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

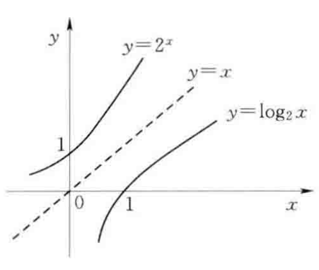


图 1.1.11

例如函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线 $y=x$ 对称的，如图 1.1.11 所示.

2. 反函数的存在定理

若 $y=f(x)$ 在 (a, b) 上严格单调增加（减少），其值域为 R，则它的反函数必然在 R 上确定，且严格单调增加（减少）.

例如 $y=x^2$，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[0, +\infty)$. 对于 y 取定的非负值，可求得 $x=\pm\sqrt{y}$. 若不加条件，由 y 的值就不能唯一确定 x 的值，也就是在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上，函数不是严格单调增加（减少），故其没有反函数. 如果加上条件，要求 $x\geqslant 0$，则对 $y\geqslant 0$、$x=\sqrt{y}$ 就是 $y=x^2$ 在要求 $x\geqslant 0$ 时的反函数，即，函数在此要求下严格单调增加（减少）.

1.1.5 基本初等函数 初等函数 复合函数

1. 基本初等函数

在中学数学课程中，我们已经熟悉了以下几类函数：

(1) 常值函数：$y=c$，$x\in(-\infty, +\infty)$.

(2) 指数函数：$y=a^x$，$x\in(-\infty, +\infty)$，其中 $a>0$，$a\neq 1$.

函数的值域是 $(0, +\infty)$，图形总经过点 $(0, 1)$.

当 $a>1$ 时，函数严格单调上升；（实线）

当 $0<a<1$ 时，函数严格单调下降.（虚线）

a^x 与 $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图形关于 y 轴对称，如图 1.1.12 所示．

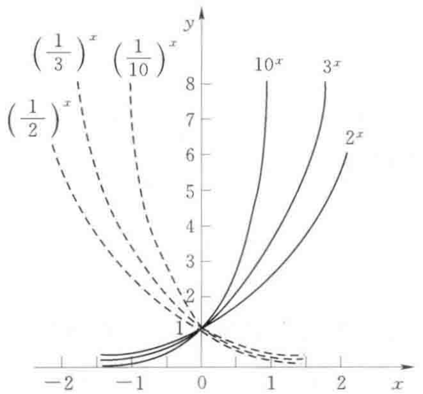


图 1.1.12

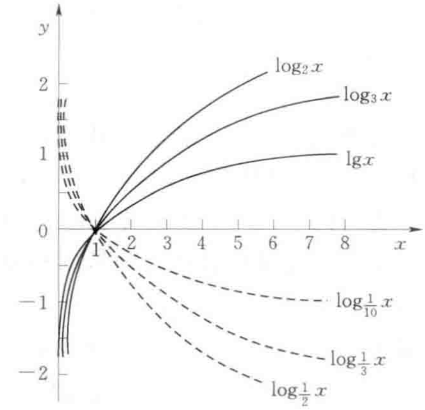


图 1.1.13

(3) 对数函数：$y=\log_a x$，$x\in(0,+\infty)$，其中 $a>0$，$a\neq1$.

对数函数与指数函数互为反函数，由反函数性质知对数函数与指数函数的图形关于直线 $y=x$ 对称．

对数函数的值域是 $(-\infty,+\infty)$，图形总经过点 $(1,0)$.

当 $a>1$ 时，函数严格单调上升；

当 $0<a<1$ 时，函数严格单调下降．

$\log_a x$ 与 $\log_{\frac{1}{a}} x$ 的图形关于 x 轴对称（见图 1.1.13).

(4) 幂函数：$y=x^\mu$，其中 $\mu\neq0$.

幂函数的定义域根据 μ 值的不同而不同．

函数 x^μ 和 $x^{\frac{1}{\mu}}$ 互为反函数，图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1.1.14 和图 1.1.15 所示．

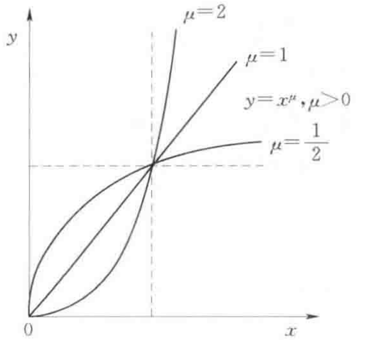


图 1.1.14

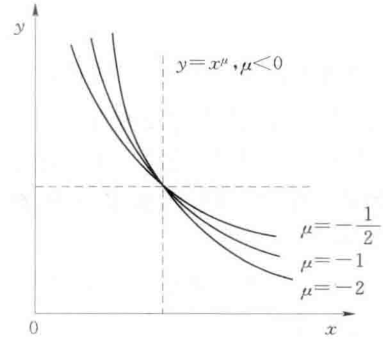


图 1.1.15

(5) 三角函数．

正弦函数：$y=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

余弦函数：$y=\cos x$，$x\in(-\infty, +\infty)$；

正切函数：$y=\tan x$，$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，其中 $k=0$，±1，±2，…；

余切函数：$y=\cot x$，$x\neq k\pi+\pi$，其中 $k=0$，±1，±2，….

正弦和余弦函数的周期为 2π，值域为 $[-1, 1]$，如图 1.1.16 所示 .

正切和余切函数的周期为 π，值域为 $(-\infty, +\infty)$，如图 1.1.17 所示 .

注意，在微积分中，三角函数的自变量 x 一般总是用弧度 .

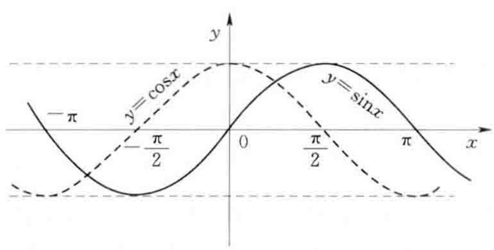


图 1.1.16

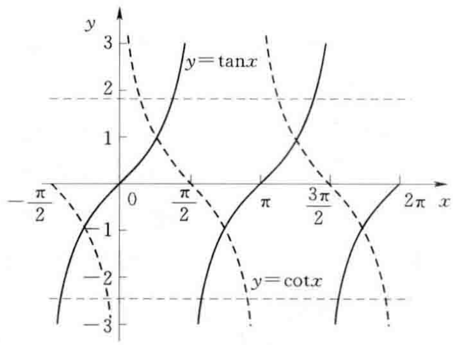


图 1.1.17

(6) 反三角函数 .

因为三角函数在定义域内非严格单调，因此我们只能分别在它们的一个严格单调分支上来讨论反函数 .

反正弦函数：$y=\arcsin x$，$x\in[-1, 1]$，$y\in\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

反余弦函数：$y=\arccos x$，$x\in[-1, 1]$，$y\in[0, \pi]$

反正切函数：$y=\arctan x$，$x\in(-\infty, +\infty)$，$y\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x$，$x\in(-\infty, +\infty)$，$y\in(0, \pi)$

反正弦和反正切函数在定义域内严格单调上升且是奇函数，而反余弦和反余切函数在定义域内严格单调下降 . 它们的图形分别如图 1.1.18～图 1.1.21 所示 .

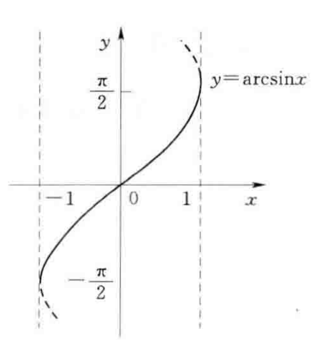


图 1.1.18

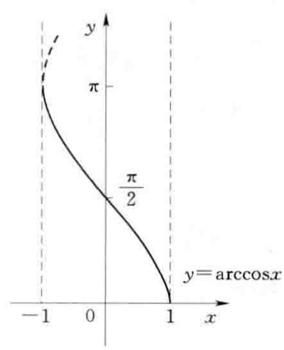


图 1.1.19