天津财经学院重点建设教材
TIANJIN CAIJING XUEYUAN ZHONGDIAN JIANSHE JIAOCAI

概率论与数理统计

刘舒强 主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

天津财经学院重点建设教材

概率论与数理统计

刘舒强　主　编
宋益兰　副主编

天津大学出版社

内 容 摘 要

本书按照高等院校财经类专业的数学教学大纲和工学、经济学硕士研究生数学考试大纲编写.内容包括:随机事件及其概念、一元与多元随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理和数理统计方面的主要知识.

本书可作为高等院校财经类专业本科生的概率论与数理统计教材,也可作为学时相当的工科类专业本科生的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/刘舒强主编.—天津:天津大学出版社,2003.8

ISBN 7-5618-1821-1

Ⅰ.概… Ⅱ.刘… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第06959号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
网　　址 www.tjup.com
电　　话 营销部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷 河北省昌黎县第一印刷厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 148mm×210mm
印　　张 9.875
字　　数 294千
版　　次 2003年8月第1版
印　　次 2003年8月第1次
印　　数 1－5 000
定　　价 16.00元

总　序

面对知识经济、信息社会对高等教育的严峻挑战，面对加入WTO后教育的国际化所带来的深刻影响，天津财经学院对课程体系、教学内容和教学方法进行了较大改革。根据新的课程体系和教学内容，学院教材委员会决定组织各教学系（部）编写一套基本能够涵盖经济管理类各专业的基础课程教材，这套教材也是天津财经学院本科教学计划所规定的核心课程。近2年来，在院教材委员会的直接领导下，各教学系（部）多次召开会议，讨论教材编写大纲和遴选教材编写人员。教材脱稿后，又组织专家评审，最后定稿。现在，这套教材终于和大家见面了。

教材是实现教育目的的重要工具，教材建设是高等学校的一项基础性工作，是深化教学改革和提高教学质量的重要保证。为此，在编写这套教材时，我们确定的基本原则是：坚持学科体系的系统性和完整性，处理好现代内容与经典理论之间的关系，及时反映学科前沿动态和发展趋势；坚持理论与实践相结合，在系统阐述本学科的基本理论和基础知识的基础上，注重运用这些理论和知识去解释和研究现实问题；坚持理论体系的逻辑性和教学活动的渐进性，合理安排教学内容，以充分体现教材建设的先进性、思想性、科学性和实践性。

为了保证教材质量，促进教学改革、专业建设和课程建设的发展，在组织编写这套教材的过程中，我们遴选了学术水平较高、教学经验丰富、具有高级职称的人员参加编写。在这些

编写人员中，大多数具有主编或参编本专业课程教材的经验，并曾获得过国家级或省部级的教学和科研奖励。

本套教材在编写体例上，每章章前都有内容概括，章后都有简短小结和重要概念，并附有较多的思考题和讨论题，而且每章后都附有自学参考书目。对于实务课程，还附有教学案例或练习题。其目的在于增加联系实际的内容，帮助学生进一步消化、理解和巩固教材中的基本理论、概念和规律。本套教材都将配有辅助教学课件，有的还有试题库。这些教学课件和试题库对于提高教学质量都将产生积极而深远的影响。

这套教材是天津财经学院许多老师的共同劳动成果，它在一定程度上代表了天津财经学院的教学实力和科研水平。希望这套教材能够成为财经类各专业广大师生的良师挚友，同时，真诚欢迎各界朋友提出宝贵的意见和建议，以使教材内容不断更新，保持活力。

天津财经学院教材委员会

2003 年 6 月

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

自然界与人类社会存在和发生的众多现象大致可分为两类,分别称其为确定性现象与随机现象.

所谓确定性现象,即在一定条件下必然会出现某一结果(或说发生某一事件)的现象.例如,纯净水在一个大气压下加热至 100℃时,必然沸腾.又例如,以速度 10 m/s 做匀速直线运动的物体,行驶 1 min,其走过的路程必为 600 m.这类确定性现象由确定的规律所控制,从数量的角度来研究它们,就产生了量与量之间确定的函数关系.以上面做匀速直线运动的物体为例,若设物体运动速度为 v(m/s,常数),行驶时间为 t(s),行驶路程为 s(m),则路程 s 是时间 t 的函数 $s(t)$:

$$s(t) = vt.$$

而当物体以速度 $V(t)$ 做变速直线运动时,由微积分的知识可知,行驶的路程 s 与时间 t 有函数关系:

$$s(t) = \int_0^t V(u)\mathrm{d}u.$$

所谓随机现象,即在一定条件下可能出现不同结果(或说发生不同事件),而又不能准确预言究竟出现哪一种结果的现象.例如,向桌面上掷一枚硬币,并规定其正、反面,则可能是正面向上,也可能是反面向上,而且在未掷之前无法准确预言究竟哪一面向上;抽检产品时,抽出的一件产品可能是合格品,也可能是不合格品,未抽检之前也无法准确预言其结果.又例如,向桌面上掷一颗色子,究竟会出现几点;所购灯泡的使用寿命会有多长;投保人在投保期内是否会发生意外;股市明日是涨还是跌等等.这些事情都无法准确预言.这一类现象大量存在于自然界与人类社会活动之中,而概率论正是探索研究这类随机现象客观规律的一门学科.

本章将重点介绍概率论中两个最基本的概念:随机事件与随机事

件的概率;并在此基础上介绍条件概率的概念以及有关随机事件概率的乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式;介绍事件相互独立的概念以及独立试验概型.可以说,本章是概率论的入门.

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机事件

观察、研究随机现象的手段与过程称为试验.当试验满足下述条件时,则称其为随机试验.为了方便,也简称试验,并记为 E:

(1)试验可在相同条件下重复进行(可重复性);

(2)试验可能出现的结果不止一个,但可明确知道所有可能的结果(可确知的多结果性);

(3)每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但是在一次试验之前不能准确预言究竟会出现哪一种结果(结果出现的随机性).

如前面提到的向桌面上掷一颗色子,观察出现的点数;从一批产品中任意抽取若干件,观察其中的次品数等都是随机试验.

概率论所要研究的是随机试验中出现的各种情况,为了方便研究,对试验的有关结果给出如下概念.

定义 1.1.1 某一随机试验中可能出现的每一结果称为该试验的一个基本事件,记为 ω.所有基本事件构成的集合称为该试验的样本空间,记为 Ω.由若干基本事件构成的样本空间 Ω 中的子集合称为该试验中的随机事件,简称为事件,记为 $A,B,C,\cdots$,等.当属于事件 A 的某一基本事件发生时,则称事件 A 发生.

例如,在向桌面上掷一颗色子,观察出现的点数的试验中,可能出现的结果有:出现 1 点,2 点,…,6 点,它们都是该试验的基本事件.这六个基本事件构成的集合 $\Omega=\{1$ 点,2 点,…,6 点$\}$就是该试验的样本空间.而“出现的点数不超过 3”,则为该试验中的一个随机事件.它包含的基本事件有 1 点、2 点、3 点,且只要其中一个基本事件发生,该随

机事件自然发生.再来看下面的例题.

例 1.1.1　试写出下列随机试验的样本空间与指定的随机事件:

(1) E_1:从一批产品中任意抽取 5 件,考察这 5 件产品中的次品数.

事件 A =“5 件中的次品数不超过 2 件”.

(2)设某种零件直径的最大可能误差是 ± 0.1 mm.

E_2:从一批该种零件中任取一件,检查其直径误差值.

事件 B =“误差的绝对值不超过 0.05 mm”.

(3)盒中装有红、黄、蓝三种颜色的粉笔,各色均超过 4 只.

E_3:从盒中任意取 4 只,观察它们具有哪几种颜色.

事件 C =“有红色”.

解

(1)设 $\omega_i = i$ 表示所抽 5 件产品中的次品数为 i,则该试验的基本事件为 $\omega_i = i, i = 0,1,2,3,4,5$.于是样本空间

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} = \{0,1,2,3,4,5\}.$$

而 $A = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\} = \{0,1,2\}$.

(2)该试验的基本事件为区间 $[-0.1, 0.1]$(单位:mm)中的任一实数 ω,因此样本空间 $\Omega = \{\omega \mid -0.1 \leqslant \omega \leqslant 0.1\}$,

而 $$B = \{\omega \mid |\omega| \leqslant 0.05\}.$$

(3)这时样本空间

$$\Omega = \{红,黄,蓝,红黄,红蓝,黄蓝,红黄蓝\},$$

而 $C = \{红,红黄,红蓝,红黄蓝\}$.

例 1.1.1 表明,随机试验的样本空间可以是有限集,如(1),(3);也可以是无限集,如(2).而它的表示则常用列出基本事件(如(1),(3))或描述基本事件性状(如(2))的方法来实现.

随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生.如果一个事件在每次试验中一定发生,则称其为必然事件,记为 Ω.如例 1.1.1(1)中“次品数不超过 5”这一事件.而每次试验一定不发生的事件称为不可能事件,记为 $\varnothing$.如例 1.1.1(1)中“次品数超过 5”这一事件.由定义

1.1.1可知,样本空间 Ω 为必然事件,而不可能事件则可视为空集 $\varnothing \subset \Omega$,二者均可视为随机事件的极端情况.

1.1.2　随机事件间的关系与运算

定义 1.1.1 表明,某随机试验的基本事件是该试验样本空间 Ω(可视为全集)中的元素,也称之为 Ω 中的样本点,而随机事件则是 Ω 的子集合.因此,随机事件之间的关系与运算在本质上与集合之间的关系与运算一致,为此,我们将以集合论的观点和表示方法给出随机事件间的关系与运算.

以下设已给定某样本空间 Ω(全集).$A,B,C,A_i(i=1,2,\cdots)$等均为 Ω 中的随机事件(Ω 的子集).

1.事件的包含关系

若 $A\subset B$(或 $B\supset A$),则称事件 B 包含事件 A.概率论中常描述为"事件 A 发生,则事件 B 必发生".如对 E_1:掷一颗色子,观察出现的点数.设 $A=$"点数小于 3",$B=$"点数小于 5",则 $A\subset B$.

易见 $A\subset\Omega$.此外,规定 $\varnothing\subset A$.

2.事件的相等关系

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$.

3.事件的和(并)运算

事件 $A+B$(或 $A\cup B$)称为事件 A 与 B 的和事件.概率论中常描述为事件"A 与 B 至少有一个发生".如对 E_2:发行甲、乙两种报纸,按户统计订报情况,设 $A=$"订甲种报纸",$B=$"订乙种报纸",则

$$A+B=\text{“甲、乙两种报纸中至少订阅一种”}.$$

事件的和运算还可以推广至任意有限个与可列个事件的情形,分别记为 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$(或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$)与 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$(或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$).如 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示"$A_1,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"这一事件.

4.事件的积(交)运算

事件 AB(或 $A\cap B$)称为事件 A 与 B 的乘积事件.概率论中常描述

为事件“A 与 B 同时发生”.如在 E_2 中,AB =“甲、乙两种报纸都订阅”.

事件的积运算也可以推广至任意有限个与可列个事件的情形,分别记为 $\prod_{i=1}^{n} A_i$(或 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$)与 $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$(或 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$).如 $\prod_{i=1}^{n} A_i$ 表示“$A_1,\cdots,A_n$ 同时发生”这一事件.

易见,若 $A \subset B$,则 $AB = A$.

5.事件的差运算

事件 $A-B$ 称为事件 A 与 B 的差事件,概率论中常描述为事件“A 发生但 B 不发生”.如在 E_2 中 $A-B$ =“订甲种报纸而不订乙种报纸”.

易见,有关系:$A-B=A-AB$.

6.对立事件(逆事件)

事件 $\bar{A}=\Omega-A$ 称为事件 A 的对立事件.概率论中常描述为事件“A 不发生”.如 E_2 中 $\bar{A}$ =“未订甲种报纸”.

易见,有关系:$A\bar{A}=\varnothing, A+\bar{A}=\Omega, \bar{\bar{A}}=A, A-B=A\bar{B}$.

7.事件的互不相容性(互斥性)

若 $AB=\varnothing$,即事件 A 与 B 不能同时发生,则称事件 A 与 B 互不相容(或互斥).若事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$(有限或可列个)中任意两个事件互不相容(互斥),则称事件组 $A_1,\cdots,A_i,\cdots$ 互不相容(或彼此互斥).

易见,基本事件是互不相容的.A 与 $\bar{A}$ 也是互不相容的.

8.完备事件组

若事件组 $A_1,\cdots,A_i,\cdots$(有限或可列个)互不相容,且 $\sum_i A_i=\Omega$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$ 构成一个完备事件组.

易见,A 与 $\bar{A}$ 就构成一个完备事件组.

完备事件组有时也称为对样本空间 Ω 的一个剖分(或划分).下面将会看到,完备事件组是事件间的一种很重要的关系.

为了便于对照和记忆,我们把随机事件的关系与运算列入表 1.1.1 中.