中学数学专题丛书

叶尧城 主编

车新发 编著

三角函数

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU

湖北教育出版社

7

中学数学专题丛书

叶尧城 主编

三角函数

年新发 编著

7

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

三角函数/车新发编著 .—武汉:湖北教育出版社,2001
(中学数学专题丛书/叶尧城主编)
ISBN 7-5351-3157-3

Ⅰ.三… Ⅱ.车… Ⅲ.三角函数-中学-教学参考资料
Ⅳ.G634.643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 078199 号

出版 发行:湖北教育出版社 武汉市青年路 277 号
网 址:http://www.hbedup.com
邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:湖北新华印务有限公司 (430034·武汉市解放大道 145 号)
开 本:787mm×1092mm 1/32 5.5 印张
版 次:2002 年 4 月第 1 版 2002 年 7 月第 2 次印刷
字 数:106 千字 印数:5 001-8 000

ISBN 7-5351-3157-3/G·2562 定价:7.50 元

总　序

随着素质教育的深入推进，需要我们在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁，以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建？改革教材成为了人们选择的突破口！当前，国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用，新教材在"为所有的学生打好共同基础"上将有所作为。然而，我国幅员辽阔，地区间的教育水平的差异大，个体间学习水平的差异大。如何真正地体现"以学生发展为本"，发展学生的个性特长，让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高，还需要通过特定的教学过程来完成，其中应有好的素材和高质量的课外读物（而非散见于市面上的"检测题"、"同步练习"、"习题集"等）。因此，我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物，以专题讲座的形式，帮助学生了解知识的发生、发展过程，学会分析、解决问题的思想方法，深化、拓宽相关知识。

有鉴于此，我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有18个小册子，各册相对独立又相互联系，小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触，介绍一点数

学史料，有助于学生吸收各种不同的数学经验，理解各种不同的数学思想观点，体会数学的人文价值；着力反映知识的纵横联系，并以范例的形式予以说明；精选典型例题，揭示重难点，说明重在何处，难在哪里，如何理解，着重分析解题思路，阐释思想方法；选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题，引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题，供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生，可系统阅读，也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲，该套丛书具有如下特点：

1. **帮助学生夯实基础。**通过知识精讲、典例剖析、归纳小结，落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力。**精选思想性强的综合题，启迪学生的思维，开阔学生的思路，落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用。**精选密切联系生活实际和社会实践的应用题，促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新。**精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题，培养学生的探究能力。

5、**引导学生走向成功。**选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型，有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩，走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试，难免出现这样或那样的疏漏和不足，敬请读者提出批评和建议，以便再版时修改，使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002年1月

目录

第一章
三角恒等变换

§1.1 任意角的三角函数

在直角 $\triangle ABC$ 中，$A+B=90^\circ$ 揭示了它的两个锐角之间的关系；勾股定理 $a^2+b^2=c^2$ 揭示了它的三条边之间的关系；它的边角之间的关系则由锐角三角函数的定义来揭示.

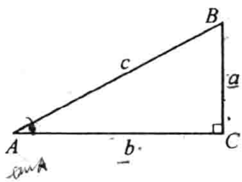

图 1.1

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}},\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}},$$

$$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}},\cot A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\angle A\text{ 的对边}}.$$

显然，这四个三角函数之间有着内在的联系，这就是

$$\sin^2A+\cos^2A=1,\tan A=\frac{\sin A}{\cos A},\tan A\cdot\cot A=1.$$

并且 $\sin(90^\circ-A)=\cos A,\cos(90^\circ-A)=\sin A,$

$$\tan(90^\circ-A)=\cot A,\cot(90^\circ-A)=\tan A.$$

运用这些知识，可以由直角三角形中的已知元素，求它的未知元素，即解直角三角形.并且可以实现同角三角函数间的

相互转化和互为余函数的两个函数间的相互转化(仅限于角为锐角的情形).

初中平面几何定义角是从同一点出发的两条射线组成的图形.这个定义有很大的局限性.因此我们推广角的概念:把角看作是一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所组成的图形.按逆时针方向旋转所形成的角叫做正角,按顺时针方向旋转所形成的角叫做负角,射线没有作任何旋转时,也认为形成了一个角,这个角叫做零角.

角的概念推广后,我们在直角坐标系内讨论角.为此,使角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,那么角的终边(除端点外)在第几象限我们就说这个角是第几象限角.如果角的终边落在坐标轴上,就认为这个角不属于任一象限.

例 1 若 α 是第二象限角,则

(1) $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角;

(2) $\frac{\alpha}{3}$ 是第几象限角.

解 (1) α 是第二象限角,所以

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi \quad (k\in Z)$$

$$k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2} \quad (k\in Z)$$

当 $k=2n(n\in Z)$ 时,

$$2n\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{\pi}{2};$$

当 $k=2n+1(n\in Z)$ 时,

$$2n\pi+\frac{5\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{3\pi}{2}.$$

$\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角.

(2) $2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi \quad (k\in Z)$,所以

$$\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}<\frac{\alpha}{3}<\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3} \quad (k\in Z).$$

$k=3n(n\in Z)$ 时

$$2n\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{\alpha}{3}<2n\pi+\frac{\pi}{3};$$

$k=3n+1(n\in Z)$ 时

$$2n\pi+\frac{5\pi}{6}<\frac{\alpha}{3}<2n\pi+\pi;$$

$k=3n+2(n\in Z)$ 时

$$2n\pi+\frac{3\pi}{2}<\frac{\alpha}{3}<2n\pi+\frac{5\pi}{3}.$$

$\frac{\alpha}{3}$ 是第一或第二或第四象限角.

说明　在直角坐标系中作出 $\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在的范围分别如图 1.2 和图 1.3 所示.可见 $\frac{\alpha}{2}$、$\frac{\alpha}{3}$ 的终边都只占有所在象限的某一部分.将 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的范围之一旋转 180°,就得到它的终边所在的另一范围;将 $\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在的范围之一依次

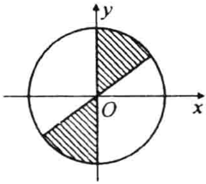

图 1.2

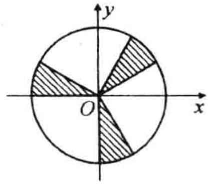

图 1.3

旋转 120°、2 · 120°,就得到$\frac{\alpha}{3}$ 的终边所在的另外两个范围.当读者学习到复数开方后,利用方根的几何意义来理解就更深刻了.

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度的角.这种以弧度作单位来度量角的单位制叫做弧度制.角度制与弧度制之间的换算关系是

$$180° = \pi \,\mathrm{rad}$$

$$1° = \frac{\pi}{180}\mathrm{rad}$$

$$1\,rad = \frac{180°}{\pi}.$$

在角的概念推广后,无论采用角度制还是弧度制,都能在角的集合与实数集 R 之间建立起一种一一对应的关系.

采用弧度制时,弧长公式十分简单:

$$l = |\alpha| r$$

这就使一些与弧长有关的公式也得到了简化.例如半径为 r,圆心角为 $\alpha(rad)$ 的扇形的面积 $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$.

例 2 设 $A=\{\alpha \mid \alpha=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6},k\in Z\}$，$B=\{\beta \mid \beta=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6},k\in Z\}$.则 A 和 B 的关系是

(A) $A \subsetneqq B$　　(B) $B \subsetneqq A$

(C) $A \neq B$　　(D) $A=B$

解法一 在直角坐标系中画出角 α 和角 β 的终边所有可能的位置如图 1.4 所示.它们都是终边与 $\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{2}$、$\frac{5\pi}{6}$、$\frac{7\pi}{6}$、$\frac{3\pi}{2}$、$\frac{11\pi}{6}$ 等角的终边相同的角的集合，所以 $A=B$.选(D)

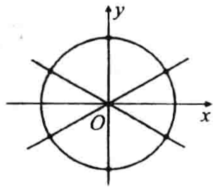

图 1.4

解法二 $k=2n(n\in Z)$ 时

$$\alpha=\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\in B;$$

$k=2n-1(n\in Z)$ 时

$$\alpha=\frac{2n-1}{3}\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{2n\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\in B.$$

所以 $A\subseteq B$.

又 $\beta=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\in A$,

$$\beta=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{2k-1}{3}\pi+\frac{\pi}{6}\in A.$$

所以 $B\subseteq A$.

由 $A\subseteq B$ 及 $B\subseteq A$ 得 $A=B$.

例 3 如图 1.5，两轮的半径分别为 R、$r(R>r)$，$O'E\perp OA$，$\angle EO'O=\alpha$，求连接两轮的皮带传动装置的皮带长.

解 $O'E = OE\cot\alpha = (R-r)\cot\alpha$ 所以

$$AB + CD = 2 \cdot O'E = 2(R-r)\cot\alpha.$$

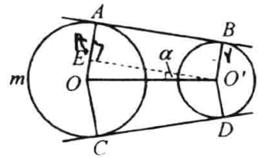

图 1.5

又 $\overset{\frown}{BnD} = r(\pi - 2\alpha)$

$$\overset{\frown}{AmC} = R\left[2\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = R(\pi + 2\alpha).$$

所以皮带长 $= 2(R-r)\cot\alpha + r(\pi - 2\alpha) + R(\pi + 2\alpha)$

$= 2(R-r)(\alpha + \cot\alpha) + (R+r)\pi.$

设 α 是一个任意角，α 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x,y)，它与原点的距离是 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$，

那么 $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}, \cos\alpha = \dfrac{x}{r}, \tan\alpha = \dfrac{y}{x},$

$$\csc\alpha = \frac{r}{y}, \sec\alpha = \frac{r}{x}, \cot\alpha = \frac{x}{y}.$$

对于确定的角 α，上面的六个比值(如果有意义的话)都是唯一确定的.也就是说，它们都是以角为自变量，以比值为函数值的函数，统称三角函数.由于角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系，三角函数可以看成以实数为自变量的函数.

分两种情况 **例 4** 设 $a \neq 0$，角 α 的终边经过点 $P(-4a, 3a)$，求 $\dfrac{1 + \sin\alpha - \cos\alpha}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}$ 的值.

解 $x = -4a, y = 3a$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4a)^2 + 3a^2} = \sqrt{25a^2} = 5|a|.$$

若 $a > 0$,则 $r = 5a, \sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

$$\frac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{1+\frac{3}{5}-\left(-\frac{4}{5}\right)}{1+\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)} = 3;$$

若 $a < 0$,则 $r = -5a, \sin\alpha = -\frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}$.

$$\frac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{1-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}} = -\frac{1}{3}.$$

设角 α 的终边与单位圆交于点 P,过 P 作 $PM \perp x$ 轴于 M,过点 $A(1,0)$ 作单位圆的切线,与角 α 的终边或终边的反向延长线相交于点 T,三条与单位圆有关的有向线段 MP、OM、AT 分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切线.

例 5 (1) 作出 $\frac{5\pi}{6}$ 角的正弦线、余弦线和正切线;

(2) 已知 $\sin\alpha = \frac{1}{2}$,试作出角 α;

(3) 已知 $\sin\alpha \leqslant \frac{1}{2}$,求角 α 的范围.

解 (1) 如图 1.6 所示,与单位圆有关的有向线段 MP、OM、AT 分别是 $\frac{5\pi}{6}$ 角的正弦线、余弦线和正切线.

(2) 如图 1.7 所示,经过点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 作平行于 x 轴的直线交单位圆于 P_1、P_2 两点,则始边为 Ox、终边为 OP_1 或 OP_2 的角

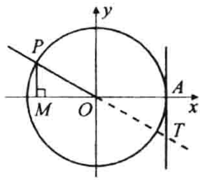

图 1.6

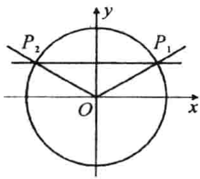

图 1.7

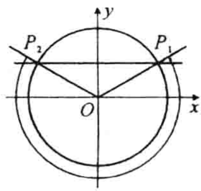

图 1.8

即为所求.

(3) 如图 1.8 所示,经过点$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$作平行于 x 轴的直线交单位圆于 P_1、P_2 两点,由于 $\sin\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$,所以角 α 的终边与单位圆的交点在 $\overset{\frown}{P_2P_1}$ 上,角 α 的取值范围是 $-\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{6}+2k\pi(k \in Z)$. 也可以写成$\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{13\pi}{6}+2k\pi$ $(k \in Z)$.

说明 例 5(3) 揭示了解最简单的三角不等式的基本方法.用类似的方法可解关于 $\cos x$、$\tan x$ 的最简单的三角不等式.

例 6 设$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$,求$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$、$\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的取值范围.

解 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$,所以

$$0 < 2x < \pi,\ -\frac{\pi}{3} < 2x-\frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}.$$

由图 1.9 可知，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \sin(2x-\dfrac{\pi}{3}) \leqslant 1$,

$$-\frac{1}{2} < \cos(2x-\frac{\pi}{3}) \leqslant 1.$$

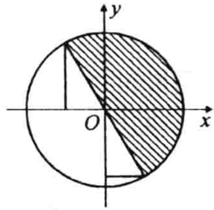

图 1.9

例 7　设 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，试证明

$\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$.

解　设角 α 的终边与单位圆相交于点 P，过 P 作 $PM \perp OX$ 于 M，过点 $A(1,0)$ 作单位圆的切线交角 α 的终边于点 T，则

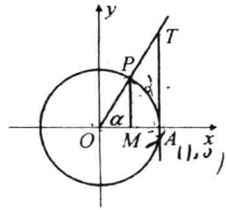

图 1.10

$MP = \sin x, \overset{\frown}{AP} = \alpha, AT = \tan\alpha$.

$S_{\triangle OAP} = \dfrac{1}{2}\sin\alpha, S_{\text{扇形}OAP} = \dfrac{1}{2}\alpha, S_{\triangle OAT} = \dfrac{1}{2}\tan\alpha$.

并且　$S_{\triangle OAP} < S_{\text{扇形}OAP} < S_{\triangle OAT}$.

所以　$\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$.

由三角函数的定义及各象限内点的坐标的符号，可知各三角函数的值在各象限的符号如图 1.11 所示：

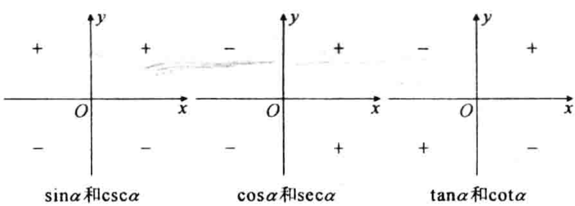

图 1.11

例 8 函数 $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{\cos x}{|\cos x|}+\frac{\tan x}{|\tan x|}+\frac{\cot x}{|\cot x|}$ 的值域是

(A) $\{-2,0\}$　　　(B) $\{-2,0,4\}$

(C) $\{-2,0,2,4\}$　　　(D) $\{-4,-2,0,4\}$

解　x 是第一象限角时，$\sin x>0,\cos x>0,\tan x>0,\cot x>0,y=4$；

x 是第二象限角时，$\sin x>0,\cos x<0,\tan x<0,\cot x<0,y=-2$；

x 是第三象限角时，$\sin x<0,\cos x<0,\tan x>0,\cot x>0,y=0$；

x 是第四象限角时，$\sin x<0,\cos x>0,\tan x<0,\cot x<0,y=-2$.

所以函数的值域是 $\{-2,0,4\}$，选(B).

根据三角函数的定义，六个三角函数，即六个比值，只与三个字母 x、y、r 有关，且 $x^2+y^2=r^2$，因此它们之间有着内在的联系.这就是同角三角函数的基本关系式：

平方关系　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$，
$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$.

商数关系　$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

倒数关系　$\sin\alpha\csc\alpha=1,\cos\alpha\sec\alpha=1$，
$\tan\alpha\cot\alpha=1$.

其中最重要的三个公式是

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\tan\alpha\cot\alpha=1$.它们是进行

三角恒等变换的重要基础.在求值、化简三角函数式和证明三角恒等式中要经常用到.

例 9 x 为何值时,等式 $\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\tan x-\dfrac{1}{\cos x}$ 成立.

解 $$\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{(1+\sin x)(1-\sin x)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}}=\frac{1-\sin x}{|\cos x|}.$$

$$\tan x-\frac{1}{\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{-\cos x}.$$

要使等式成立,必须且只须 $|\cos x|=-\cos x$ 且 $\cos x\neq 0$,即 $\cos x<0$.所以

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi\quad(k\in Z).$$

例 10 (1) 已知 $\tan\alpha=3$,求 $\dfrac{4\sin\alpha+\cos\alpha}{5\sin\alpha-2\cos\alpha}$ 的值;

(2) 已知 $2\sin\alpha+\cos\alpha=0$,求 $2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha$ 的值;

(3) 已知 $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$,求 $\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$ 的值;

(4) 已知 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$,求 $\cos^2\theta+\cos^6\theta+\cos^8\theta$ 的值.

解 (1) 解法一 $\tan\alpha=3>0$,α 是第一象限角或第三象限角.

若 α 是第一象限角,则 $\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$,$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.