2016

理工社®

文登教育
Wendeng Education
BEIJING WENDENG SCHOOL
北京文登学校

文登培训学校策划

陈文灯◆主　编

面向考试　祝您全取32分

考研数学
选题
解题方法与技巧

◆系统归纳　◆凸显精华　◆注重效率　◆快速解答

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

文登教育
Wendeng Education

2016

理工社®

文登培训学校策划

陈文灯◆主　编

面向考试 祝您全取32分

考研数学单选题解题方法与技巧

◆系统归纳 ◆凸显精华 ◆注重效率 ◆快速解答

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学单选题解题方法与技巧 / 陈文灯主编. —北京:北京理工大学出版社,2014.12

ISBN 978-7-5682-0022-6

Ⅰ.①考...　Ⅱ.①陈...　Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－题解　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 293180 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
82562903(教材售后服务热线)
68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京文良精锐印刷有限责任公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 12.75
字　　数 / 348 千字
版　　次 / 2014 年 12 月第 1 版　2014 年 12 月第 1 次印刷
定　　价 / 25.00 元

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前 言

单项选择题是研究生入学考试数学试卷的重要组成部分，它侧重考查的是学生对基本概念与基本理论的理解与掌握程度，单项选择题也是考查这些知识的较恰当和有效的手段。由于单项选择题的数目在试卷中所占的比例较大(已超过试卷总题数的三分之一)，所以，**如何快速、准确地做好选择题是考生能否顺利通过考试以及取得优异成绩的关键。**为此，我们编写了这本《数学单选题解题方法与技巧》。

本书第一章较为系统地介绍了求解选择题的常用方法，包括推演法、图示法、赋值法、排除法和逆推法等，具体讲解了这些方法的基本思想和适用对象；第二、三、四章以高等数学、线性代数、概率论与数理统计分章，每章按类型详细地讲解了近年研究生入学考试数学试卷中的全部选择题的求解方法与技巧；第五章汇集了300道单项选择题，其中多数是笔者根据多年的考研辅导经验编撰而成；另外，本书在通过例题讲解单选题解题方法与技巧的同时，也结合具体问题适当分析了一些相关概念、相关理论间的有机联系，并适时地给出了一些重要结论。这些知识不仅有助于快速、准确地求解选择题，而且对解答主观题也将发挥一定的作用。

鉴于笔者水平有限，不当之处恳请读者批评指正。

目 录

第一章

单项选择题常用解题方法

单项选择题(即四个选项中有且仅有一个选项是正确的,以下简称为"选择题")是研究生入学考试数学试卷的重要组成部分,题目数量由 2002 年以前的 5 道题增加到现在的 8 道题(2007 年曾增加到 10 道题),其分值也由以前百分制的 15 分增加到现在 150 分制的 32 分(2007 年为 40 分). 如何快速、准确地做好选择题,以便为后面的计算、论证和应用题留下较充裕的思考和解答时间,这是考生最终能否取得优异成绩的关键.

如何做好选择题?**首先,要对选择题的设置内容,即主要考查的知识范畴有所了解**. 纵观历年的命题及其发展趋势,选择题侧重考查的是考生对基本概念、基本理论的理解与把握(填空题则侧重于基本计算). 这就要求考生复习时,切实做到透彻理解基本概念,熟练掌握基本理论,尽可能搞清相关概念、相关理论之间的有机联系,这是做好选择题的基础和前提. **其次,要掌握解答选择题的一些常用方法**. 要能够根据题目条件、备选项的特征,善于总结分析,灵活运用有关的技巧与方法,快速解答,尽可能避免"小题大做",这是提高解题效率和正确率的有效途径.

解答选择题的常用方法有推演法、图示法、赋值法、排除法、逆推法等. 前三种方法能够从题设条件直接推得正确选项,属于直接法. 后两者中排除法是通过排除错误选项,得出正确的结论;逆推法则是从结论(备选项)出发,逐一验证哪一个选项符合题设条件,进而作出正确的判断,它们属于间接法. 这些方法从本质上看都可以认为是排除法. 因为对于单项选择题,一旦确定了某个选项正确,则其余的选项必定不正确(不必验证);同样,如果验证了其中三个选项不正确,则余下的一个必定正确(也不必验证). 下面就逐一介绍这些方法的基本思想、适用对象和具体应用以及应用过程中要注意的一些问题.

§1　推　演　法

推演法是指从题设条件出发,按照习惯性思维方式,运用有关概念、性质和定理等,按部就班,经过直接推理演算得出正确结论. 推演法是解答选择题的最基本的方法,从理论上讲,所有的单项选择题均可由推演法求解.

对于围绕基本概念设置的选择题,或题中的备选项为"数值"形式结果或某种运算律,或题干条件给出的是某种运算形式时,常用推演法.

【例 1】设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内可导,且 $f'(x_0)\neq 0$,则当 $\Delta x\to 0$ 时,$f(x)$ 在点 x_0 处的增量与微分的差$(\Delta y-\mathrm{d}y)$是　[　]

(A) 比 Δx 高阶的无穷小，比 Δy 低阶的无穷小.

(B) 比 Δx 低阶的无穷小，比 Δy 高阶的无穷小.

(C) 比 $\Delta x,\Delta y$ 都高阶的无穷小.

(D) 比 $\Delta x,\Delta y$ 都低阶的无穷小.

【分析】本题属概念性题．必须从导数、微分的定义入手，找出$(\Delta y-\mathrm{d}y)$与 Δx 或 Δy 间的关系，然后再与 Δx 和 Δy 进行比较. 另外要充分认识到导数就是两个无穷小 Δy 与 Δx 之比的极限($\Delta x\to 0$ 时). 当此极限存在且不为 0 时，它们同阶；当极限值为 0 时，Δy 是比 Δx 高阶的无穷小.

【详解】由 $f(x)$ 在 x_0 点处可导及微分定义，知

$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x),\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x.$

显然 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0,$$

即$(\Delta y-\mathrm{d}y)$是比 Δx 高阶的无穷小($\Delta x\to 0$ 时).

又由 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\neq 0$，知 Δy 与 Δx 是同阶无穷小($\Delta x\to 0$ 时)，因而$(\Delta y-\mathrm{d}y)$也是比 Δy 高阶的无穷小($\Delta x\to 0$ 时)，故(C)入选.

【评注】此题综合考查了导数、微分和无穷小的阶等概念及其之间的有机联系. 只要这些概念清楚，勿须动笔便能正确做答.

【例 2】已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ [　]

(A) 不可导. (B) 可导但 $f'(0)\neq 0$.

(C) 取得极大值. (D) 取得极小值.

【分析】从备选项看，本题涉及了导数和极值的概念，应从它们的定义入手. 对题设中的极限条件要能挖掘出：在 $x=0$ 的某邻域内，必有$\dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0$(极限的保号性)；$\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2+\alpha$，其中 α 是当 $x\to 0$ 时的无穷小(函数极限存在与无穷小间的关系定理)；$f(x)$ 是与$(1-\cos x)$同阶的无穷小($x\to 0$ 时)(无穷小阶的定义). 只要能想到前两条中的任何一点，结合极值的定义，此题便顺利告破.

【详解 1】根据极限的保号性，由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$ 知，存在 $x=0$ 的某邻域 $U_\delta(0)$，使 $\forall x\in \hat{U}_\delta(0)$ 都有$\dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0$，即 $f(x)-f(0)>0$，再由极值定义可知，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，故(D)入选.

【详解 2】根据函数极限存在与无穷小间的关系定理，有$\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2+\alpha,\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$，从而 $f(x)-f(0)=2(1-\cos x)+\alpha(1-\cos x)>0,\forall x\in\hat{U}_\delta(0)$. 以下同详解 1.

【评注】1° 题干中的极限式是一种重要的条件形式，要抓住它的本质内涵，从中挖掘出有

助于解题的结果(见分析).由分析中得出的"$x \to 0$ 时,$f(x)$ 是与$(1-\cos x)$ 同阶的无穷小"还能推得 $f'(0)=0$,而且题干中的条件"$f(0)=0$"可以省略.你能说出为什么吗?

2° 有的考生直接用洛必达法则处理题中条件,可得 $f''(0)=2>0$,也能作出正确选择,这等于把条件加强为"$f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数."对于解答选择题,这也不失为一种办法,不过要意识到 $f'(0)=0$,即 $x=0$ 应是 $f(x)$ 的驻点.但在求解主观题时,这种做法绝对不允许.

3° 本题用后面介绍的赋值法求解将更加快捷(见第二章的第 65 题).

【例 3】设 $f(x),g(x)$ 是恒大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时,有　[　]

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$.　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$.

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$.　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

【分析】本题题干条件与备选项均为运算律形式,适合用推演法.问题的关键是要由 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$ 能够联想到这是两个函数商的导数的分子.若能意识到这一点,问题便迎刃而解.

【详解】因 $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$,故$\dfrac{f(x)}{g(x)}$是严格单调减少的.从而当 $a<x<b$ 时,有

$$\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{f(a)}{g(a)} \text{或} \frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)}.$$

考虑到 $f(x),g(x)$ 恒大于零,得

$$f(x)g(a)<f(a)g(x) \text{ 或 } f(x)g(b)>f(b)g(x).$$

故(A)入选.

【评注】如果将题中条件的"$-$"号改为"$+$"号,你能想到什么?此时哪个选项正确?

【例 4】设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\,dx$,$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$,$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$.则有　[　]

(A) $N<P<M$.　　(B) $M<P<N$.

(C) $N<M<P$.　　(D) $P<M<N$.

【分析】本题特征与上题相同,适合用推演法.这是关于定积分的比较问题,关键是比较被积函数的大小.但要注意,只要是积分区间关于原点对称的定积分问题,就先要考查被积函数或其代数和的每一部分是否具有奇偶性,以便把问题简化.

【详解】由于 M 的被积函数在区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上是奇函数,故 $M=0$.

而
$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx>0,$$

$$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx<0.$$

故(D) 入选.

【评注】此题如果直接计算,其繁琐可想而知. 所以解答选择题时,切忌"小题大做". 题目繁琐必有其繁琐的用意.

【例 5】已知$\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$为某二元函数的全微分,则 a 等于 [ ]

(A) -1. (B)0. (C)1. (D)2.

【分析】本题备选项为数值结果,适合用推演法. 切入点是二元函数可微的条件. 而由第二类曲线积分的"四个等价命题"之"$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 是某二元函数全微分 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$"可得关于 a 的恒等式,比较同类项系数即可.

【详解】因$\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$是某二元函数的全微分,故$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

其中 $P(x,y)=\dfrac{x+ay}{(x+y)^2},Q(x,y)=\dfrac{y}{(x+y)^2}$.

而 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{(a-2)x-ay}{(x+y)^3},\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{-2y}{(x+y)^3}$,

比较上面两式,得 $a=2$,故(D) 入选.

【评注】此题考查了二元函数的可微性与第二类曲线积分间的理论联系. 类似的这样的有机联系的内容,考生复习时要引起重视.

【例 6】设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\displaystyle\int_0^{2x}f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$,则 $f(x)$ 等于 [ ]

(A)$\mathrm{e}^x\ln 2$. (B)$\mathrm{e}^{2x}\ln 2$.

(C)$\mathrm{e}^x+\ln 2$. (D)$\mathrm{e}^{2x}+\ln 2$.

【分析】本题特征与上题相同,用推演法. 关键是利用原函数存在定理,即积分上限函数的导数的结论建立关于 $f(x)$ 的微分方程,并根据所给条件挖掘出定解条件 $f(0)=\ln 2$ 即可.

【详解】将所给条件两端对 x 求导,得

$$f'(x)=2f(x).$$

解得 $f(x)=C\mathrm{e}^{2x}$.

由 $f(0)=\ln 2$,知 $C=\ln 2$,故(B) 入选.

【评注】由于备选项函数形式简单,本题也可用后面将要介绍的逆推法求解.

【例 7】设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,则矩阵$\left(\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}$有一个特征值等于[ ]

(A) $\dfrac{4}{3}$. (B) $\dfrac{3}{4}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{1}{4}$.

【分析】本题的备选项为数值,适合用推演法. 这是关于抽象矩阵的特征值问题,要顺利求解,必须熟悉有关特征值的结论,详见本题的评注.

【详解】由于 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值，故 λ^2 为 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值，$\dfrac{1}{\lambda^2}$ 为 $(\boldsymbol{A}^2)^{-1}$ 的特征值. 因此 $\left(\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1} = 3(\boldsymbol{A}^2)^{-1}$ 的特征值为 $3\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$. 故(B) 入选.

【评注】关于特征值与特征向量，有如下重要结论：

(1) 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是相应的特征向量，则矩阵 $k\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^k, a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^*$ 分别有特征值 $k\lambda, \lambda^k, a\lambda+b, \dfrac{1}{\lambda}, \dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$；$\boldsymbol{x}$ 也是 $k\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^k, a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^*$ 对应其特征值的特征向量，其中 k,a,b 为常数.

(2)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值，但特征向量不一定相同.

(3) 正交矩阵的特征值的模为 1.(那么实正交矩阵呢?)

(4) 若 $r(\boldsymbol{A})=1$，则 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}, \lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$.

(5) $|\boldsymbol{A}|=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$(由此可得 $\boldsymbol{A}$ 不可逆 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 必有零特征值)，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵.

【例 8】设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量，且 $r(\boldsymbol{A})=3, \boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数. 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=$ [　]

(A) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$

【分析】本题的备选项为“数值”，应用推演法. 此题考查的是线性方程组的解的结构及其性质. 首先要明确非齐次线性方程组的通解等于对应的齐次线性方程组的通解加上非齐次线性方程组的一个特解；其次要清楚非齐次线性方程组的任意两个特解的差均为对应的齐次线性方程组的解，这是求解本题的关键. 而由 $r(\boldsymbol{A})=3$ 可知齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系仅有 $4-r(\boldsymbol{A})=1$ 个解向量. 因此，如何根据题设条件寻求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解便成为本题的焦点.

【详解】根据线性方程组解的结构性质，易知 $2\boldsymbol{\alpha}_1-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解. 故(C) 入选.

【评注】若用 $(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-2\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,-3,-4,-5)^{\mathrm{T}}$ 作为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 一个特解也可. 你知道 $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 分别是哪个方程组的解吗?

【例 9】设随机变量 $X\sim t(n)(n>1), Y=\dfrac{1}{X^2}$，则 [　]

(A)$Y\sim\chi^2(n)$.　(B)$Y\sim\chi^2(n-1)$.

(C)$Y\sim F(n,1)$　(D)$Y\sim F(1,n)$.

【分析】本题是概念性题，考查 χ^2 分布、t 分布与 F 分布的定义，只要这些概念清楚，并注意到一个标准正态变量的平方服从自由度为 1 的 χ^2 分布，此题便能顺利告破.

【详解】因 $X \sim t(n)$，故由 t 分布定义知 $X = \dfrac{U}{\sqrt{V/n}}$，其中 $U \sim N(0,1)$，$V \sim \chi^2(n)$. 于是

$Y = \dfrac{1}{X^2} = \dfrac{V/n}{U^2/1} \sim F(n,1)$（$F$ 分布定义）. 故(C) 入选.

【评注】正态分布、χ^2 分布、t 分布与 F 分布是数理统计的基础，必须要熟练掌握它们的定义、性质等基本知识. 另外注意，遇到确定统计量的分布问题时，若是有限个正态变量的平方和应想到 χ^2 分布；若是正态变量与 χ^2 分布变量的商应想到 t 分布；同样，若是两个 χ^2 分布变量的商应想到 F 分布.

【例 10】设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则 [ ]

(A) $P\{X+Y \leqslant 0\} = \dfrac{1}{2}$.　　(B) $P\{X+Y \leqslant 1\} = \dfrac{1}{2}$.

(C) $P\{X+Y \geqslant 0\} = \dfrac{1}{2}$.　　(D) $P\{X-Y \leqslant 1\} = \dfrac{1}{2}$.

【分析】本题的备选项为数值，用推演法. 要求解此题，首先必须求出 $(X+Y)$ 与 $(X-Y)$ 的分布，而相互独立的正态随机变量的线性组合仍服从正态分布是确定 $(X+Y)$ 与 $(X-Y)$ 的分布的关键. 另外，熟悉正态随机变量 $Z \sim N(\mu,\sigma^2)$ 落在区间 $(-\infty,\mu)$ 与 $(\mu,+\infty)$ 内的概率均为 $\dfrac{1}{2}$，也是顺利求解此题的保证.

【详解】由 $X \sim N(0,1)$ 与 $Y \sim N(1,1)$ 以及 X 与 Y 相互独立，得

$$X+Y \sim N(1,2),\ X-Y \sim N(-1,2).$$

因为，若 $Z \sim N(\mu,\sigma^2)$，则必有

$$P\{Z \leqslant \mu\} = \frac{1}{2} \quad \text{或}\ P\{Z > \mu\} = \frac{1}{2}.$$

比较四个选项，只有(B) 正确，故(B) 入选.

【评注】本题求解中运用的关于正态分布的两个常用结论，读者必须熟练掌握.

(1) 若随机变量 $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相互独立，则 $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$ 也服从正态分布，且 $E(Y) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mu_i$，$D(Y) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2$，其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数.

(2) 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{X \leqslant \mu\} = P\{X > \mu\} = \dfrac{1}{2}$.

§2 图 示 法

图示法是指根据题设条件作出所研究问题的几何图形，然后借助几何图形的直观性，经过分析推理得出正确的结论.

对于题设条件有明显的几何意义，如对称性、奇偶性、周期性、单调性、凹凸性、渐近性等，

或平面图形面积、空间立体体积；概率论中关于两事件间的关系或概率关系的命题，以及数理统计中关于 α 分位点的问题等，常用图示法.

【例 11】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$x_0\neq 0$ 是 $f(x)$ 的极大点，则　[ ]

(A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点.　　(B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小点.

(C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小点.　　(D) 对一切 x 都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$.

【分析】显然(A)、(D) 不正确. 对于(B)、(C) 正确与否，就需要了解 $y=-f(-x)$，$y=-f(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形对称关系，详见评注.

【详解】因 $y=-f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形关于原点对称，而 $x_0\neq 0$ 是 $f(x)$ 的极大点，则 $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小点，故(B) 入选.

【评注】1° 要掌握函数 $f(-x)$，$-f(x)$，$-f(-x)$ 与 $f(x)$ 两两之间的图形对称性结论(建议读者画图验证)：

(1) $y=f(x)$ 与 $y=-f(-x)$，$y=f(-x)$ 与 $y=-f(x)$ 都关于原点对称.

(2) $y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$，$y=-f(-x)$ 与 $y=-f(x)$ 都关于 y 轴对称.

(3) $y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$，$y=-f(-x)$ 与 $y=f(-x)$ 都关于 x 轴对称.

2° 若已知上述四个函数中任意一个函数的极值、单调以及其曲线的凹凸、拐点等性态，都能从对称性推得其他三个函数相应的性态.

3° 若将选项(C) 中“$-x_0$”的负号去掉，(C) 是否正确？

【例 12】若 $f(x)=-f(-x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内　[ ]

(A) $f'(x)<0$，$f''(x)<0$.　　(B) $f'(x)<0$，$f''(x)>0$.

(C) $f'(x)>0$，$f''(x)<0$.　　(D) $f'(x)>0$，$f''(x)>0$.

【分析】只要对上题的评注 1°，2° 清楚，并意识到 $f(x)$ 是一个奇函数，画一草图一看便知结论.

【详解】由 $f(x)=-f(-x)$ 可知 $f(x)$ 为奇函数，而在 $(0,+\infty)$ 内，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$. 故 $f(x)$ 的图形在 $(0,+\infty)$ 内单调增加凹向(向下凸)，作出 $f(x)$ 的草图如图 1－1 所示. 由图可知在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)<0$，故(C) 入选.

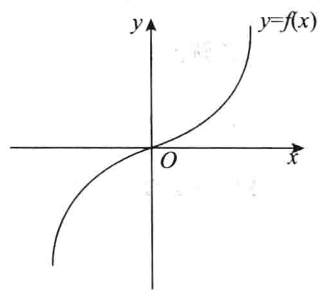

图 1－1

【评注】函数的奇偶性经常以“$f(x)+f(-x)=0$”或“$f(x)-f(-x)=0$”的形式给出，同时这也是验证函数 $f(x)$ 的奇偶性的常用方法. 因此要熟练掌握基本概念定义式的恒等变形. 若将题中条件“$f(x)=-f(-x)$”改为“$f(x)-f(-x)=0$”，那么哪个选项正确？

【例 13】设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$. 记 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$，则　[ ]

(A) $S_1<S_2<S_3$.　　(B) $S_2<S_1<S_3$.

(C)$S_3 < S_1 < S_2$. (D)$S_2 < S_3 < S_1$.

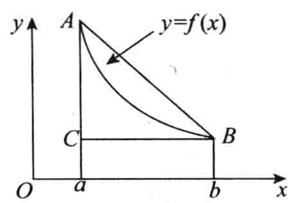

图 1－2

【分析】S_1, S_2, S_3 分别表示曲边梯形、矩形与梯形的面积，根据题设条件作出 $f(x)$ 的草图，找出 S_1, S_2, S_3 对应的平面图形，比较其面积大小即可.

【详解】由 $f'(x) < 0, f''(x) > 0$ 知 $f(x)$ 的图形在$[a,b]$上单调减少凹向，作出 $f(x)$ 的草图如图 1－2 所示. 连接弦 AB，过 B 点作平行于 x 轴的直线交 A 点向 x 轴的垂线于 C，显而易见，$S_2 < S_1 < S_3$，故(B) 入选.

【例 14】对于任意两事件 A 和 B，则 $P(A-B)$ 等于 [ ]

(A)$P(A) - P(B)$. (B)$P(A) - P(B) + P(AB)$.

(C)$P(A) - P(AB)$. (D)$P(A) + P(\overline{B}) - P(A\overline{B})$.

【分析】这是关于事件间概率关系的问题，适合用文氏图讨论. 画出一般情形的文氏图，分析其中的关系即可.

【详解】如图 1－3 所示，可知 $A = (A-B) + AB, (A-B) \cap (AB) = \varnothing$.

于是 $P(A) = P(A-B) + P(AB)$，进而 $P(A-B) = P(A) - P(AB)$. 故(C) 入选.

【例 15】设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)$，且 $\varphi(-x) = \varphi(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有 [ ]

(A)$F(-a) = 1 - \int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x$. (B)$F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x$.

(C)$F(-a) = F(a)$. (D)$F(-a) = 2F(a) - 1$.

【分析】由于 $\varphi(x)$ 是偶函数，故其图形关于 y 轴对称. 画出 $\varphi(x)$ 图形并考虑到曲线 $y = \varphi(x)$ 与 x 轴所围平面图形面积关于 y 轴对称相等以及 $F(0) = \frac{1}{2}$ 可得.

【详解】如图 1－4 所示，$F(-a) = \int_{-\infty}^{-a} \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \int_{-a}^{0} \varphi(x)\mathrm{d}x$，而$\int_{-a}^{0} \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x$，所以 $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x$. 故(B) 入选.

【评注】对于一维连续型随机变量的分布函数与概率密度的有关问题以及数理统计中关于 α 分位点的问题，用图示法求解往往比较简便.

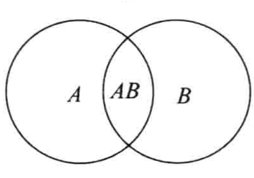

图 1－3

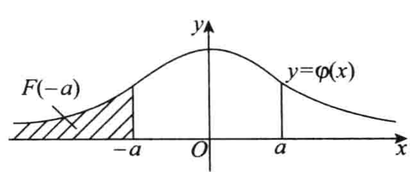

图 1－4

§3 赋　值　法

赋值法是指用满足题设条件的"特殊值"，包括数值、矩阵、函数或图形等，通过推理演算，要么直接得出正确结论；要么全部否定错误的选项，得到正确的结论.

对于题干中有"…… 对任意 …… 必 ……"特征的题目，可先用赋值法，取符合条件的"特殊值"试一试. 另外，对备选项为抽象函数形式结果的，赋值法往往也能奏效.

注意，运用赋值法解答选择题时，选取的"特殊值"必须符合题中限定的条件，而且形式越简单越好.

【例 16】设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则对任意常数 k，必有　[　]

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

【分析】向量组的线性相关性的讨论是考生比较发怵的内容. 根据题设条件的特征，用赋值法. 既然常数 k 是任意的，那么不妨取 $k=0$. 这样正确的选项与错误的选项都同时"浮出了水面".

【详解 1】取 $k=0$，显然 (A) 正确，而 (C)、(D) 明显与题设条件矛盾. 对于 (B)，当 $k=0$ 时，"$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关"与"$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关"和"$\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示"矛盾. 故 (A) 入选.

【详解 2】用推演法.

因 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示等价于非齐次线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_2$$

无解，从而 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\neq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)$.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，因此 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)=4$. 即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，故 (A) 入选.

【详解】1° 详解 1 的方法虽只能应用于选择题，但对求解一些主观题，尤其是论证题时，其解题思想也值得借鉴.

2° 详解 2 的解是把向量组的线性相关性的讨论转化为相应的线性方程组的解的讨论，对这种方法考生要引起足够的重视. 考查一向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关性，可考查齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$ 有无非零解. 若有非零解，则该向量组必线性相关；若只有零解，则该向量组必线性无关. 同样，考查一个向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由一向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，即考查非齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\beta}$ 有无解. 若有解，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，而且，如果解唯一，则表示式唯一；若无解，则 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

【例 17】设 $\boldsymbol{A}$ 是任一 n 阶矩阵($n \geqslant 3$),$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵,又 k 为常数,且 $k \neq 0, \pm 1$,则必有$(k\boldsymbol{A})^*$ 等于 [ ]

(A)$k\boldsymbol{A}^*$. (B)$k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$. (C)$k^n\boldsymbol{A}^*$. (D)$k^{-1}\boldsymbol{A}^*$.

【分析】此题如果用推演法,恐怕要花一番工夫.若能意识到 $\boldsymbol{A}$ 的任意性,取特殊的 n 阶矩阵,如单位矩阵或可逆矩阵去求$(k\boldsymbol{A})^*$,其效果将事半功倍.

【详解 1】取 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$,注意到 $\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E}$,有

$$(k\boldsymbol{E})^* = \begin{bmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} k^{n-1} & & & \\ & k^{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & k^{n-1} \end{bmatrix}_n = k^{n-1}\boldsymbol{E} = k^{n-1}\boldsymbol{E}^*.$$

比较四个选项,只有(B) 正确,故(B) 入选.

【详解 2】取 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,由 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$ 有 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.

于是$(k\boldsymbol{A})^* = |k\boldsymbol{A}|(k\boldsymbol{A})^{-1} = k^n|\boldsymbol{A}| \cdot \dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1} = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

【评注】详解 2 运用了“变量替换”的思想方法,由其求解过程可见,考生要切实加强对基本公式的理解,不断提高对基本公式的灵活运用能力,不能只满足于记住公式.

【例 18】设函数 $f(x)$ 在区间$(-\delta,\delta)$ 内有定义,若当 $x \in (-\delta,\delta)$ 时,恒有 $|f(x)| \leqslant x^2$,则 $x = 0$ 必是 $f(x)$ 的 [ ]

(A) 间断点. (B) 连续但不可导点.

(C) 可导点且 $f'(0) = 0$. (D) 可导点但 $f'(0) \neq 0$.

【分析】由题设条件可知,只要选取满足条件 $|f(x)| \leqslant x^2, x \in (-\delta,\delta)$ 的一个特殊函数,然后考查该函数在 $x = 0$ 点处的连续、可导性态即可.显然 $f(x) = x^n (n > 2)$ 均满足此条件,不妨取 $n = 3$,即 $f(x) = x^3$.

【详解】取 $f(x) = x^3$,因 $f(x) = x^3$ 在 $x = 0$ 处连续,且 $f'(x) = 3x^2, f'(0) = 0$.故(C) 入选.

【评注】此题在取 $f(x) = x^3$ 得出正确结论的同时,也说明了(A)、(B)、(D) 均不正确.

【例 19】设函数 $f(x)$ 连续,则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x tf(x^2 - t^2)\mathrm{d}t =$ [ ]

(A)$xf(x^2)$. (B)$-xf(x^2)$. (C)$2xf(x^2)$. (D)$-2xf(x^2)$.

【分析】此题题干中虽无赋值法的明显特征,但其备选项为抽象函数形式的结果,可先用赋值法试一试,如果行不通,再用推演法.

【详解 1】取 $f(x) = 1$,则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x t\mathrm{d}t = x$.而此时的备选项成为

(A)x. (B)$-x$. (C)$2x$. (D)$-2x$.

显然只有(A) 正确,故(A) 入选.

【详解 2】用推演法求解.

因 $\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t \xlongequal{x^2-t^2=u} \frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}u$.(先凑微分,再作变量代换)

故 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(t^2-x^2)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u\right] = xf(x^2)$.

【评注】1° 比较两种方法,显然赋值法快捷得多,而且不容易出错.题干中虽只给出 $f(x)$ 连续,但意味着结论对任意连续函数均成立.因而赋值法有效.

2° 积分上限函数的导数是考研的热点,考生要熟练掌握有关的结论.对积分上限函数求导时一定要注意被积函数中是否混杂着求导变量(显含或隐含),不能盲目求导.若"显含"时,即被积函数为求导变量函数与积分变量函数乘积形式,如 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g(x)f(t)\mathrm{d}t$,应先将 $g(x)$ 提到积分号外(因为 $g(x)$ 是积分变量 t 的常数函数),然后利用导数的乘积运算法则进行求导;若"隐含"时(如本题),则必须利用第二类换元积分法,作相应的变量代换把求导变量从被积函数中"挖"出来,其"出路"只有两条:一是成为"显含"形式;二是跑到积分限上,如本题.

【例 20】设函数 $f(x)$ 连续,$I = t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)\mathrm{d}x$,其中 $t>0, s>0$,则 I 的值　[　]

(A) 依赖于 s 和 t.　　(B) 依赖于 s,t,x.

(C) 依赖于 s,不依赖于 t.　　(D) 依赖于 t 和 x,不依赖于 s.

【分析】本题题干与上题类似,也隐含着对任意的连续函数,结论都应该成立.既然如此,何不取一简单的连续函数试一试呢?事实上,取任意的连续函数,得到的结论肯定都是一致的.

【详解 1】取 $f(x)=1$,则 $I = t\int_0^{\frac{s}{t}}\mathrm{d}x = s$,故(C)入选.

【详解 2】取 $f(x)=x$,则 $I = t\int_0^{\frac{s}{t}} tx\,\mathrm{d}x = t^2\int_0^{\frac{s}{t}} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}s^2$,(C)正确.

【评注】此题用推演法也不复杂,请读者自行推演,并结合例 19 的评注 2° 体会是如何从 $f(tx)$ 中"挖"出非积分变量 t,以及 t"跑"到了何处,是显含在被积函数中,还是"跑"到了积分限上.

§4　排　除　法

排除法是指从题设条件出发,利用推演法把备选项中不符合条件的干扰项逐个排除(此时的推演不能直接得出正确的结论,但能得到哪些选项是错误的);或利用赋值法排除错误的选项(此时的赋值得出的"正确"结论不止一个或看不到正确的结论,但能得到某些选项明显错误),赋值排除即是人们通常所说的反例法.概括地讲,排除法就是想方设法说明四个选项中某三个均不正确,那么剩下的一个必然正确,所运用的方法即上述的推演排除和反例排除(即赋值排除).具体应用时,这些方法往往交替使用,从而提高解题速度.

排除法通常适用于理论性较强、备选项形式较为抽象的题目.但对某些"数值"型的题目,若基本理论熟练,能"窥出"其中的"奥秘",排除法也能收到意想不到的效果.

【例 21】已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$,设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, 0\leqslant x\leqslant 2$,则 $F(x)$ 为