理工社®

2016

文登培训学校策划

陈文灯◆主　编

文登教育

Wendeng Education

◆附赠真题线路图，考点一目了然！数学二

考研数学十年真题点评

◆立足真题　把握规律◆名师亲笔　点评独到

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

理工社®

2016

文登培训学校策划

陈文灯◆主　编

文登教育

Wendeng Education

数学二

◆附赠真题线路图，考点一目了然！

考研数学十年真题点评

◆立足真题　把握规律◆名师亲笔　点评独到

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学十年真题点评．数学二／陈文灯主编．—北京：北京理工大学出版社，2015.3
（文登教育）
ISBN 978-7-5682-0252-7

Ⅰ．①考…　Ⅱ．①陈…　Ⅲ．①高等数学—研究生—入学考试—题解　Ⅳ．①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第027018号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(总编室)
　　　　　82562903(教材售后服务热线)
　　　　　68948351(其他图书服务热线)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京文良精锐印刷有限责任公司
开　　本／787毫米×1092毫米　1/16
印　　张／10.75
字　　数／240千字
版　　次／2015年3月第1版　2015年3月第1次印刷
定　　价／25.00元

责任编辑／高　芳
文案编辑／胡　莹
责任校对／周瑞红
责任印制／边心超

前　言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届，积累了近百份数学试卷，这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶，也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题，除其内容外，还包含诸多有价值的信息，例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性。为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法，我们将 2006—2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题作了精心的解析，编写成《考研数学十年真题点评》系列丛书，奉献给广大考研朋友，书中对每道真题通过“分析”“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明的语言给出解题思路；在“详解”中用简捷、新颖的方法给出详细解答；在“评注”中强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧。

希望读者在使用本书时，不要轻易地翻阅真题的解答，只有当百思不得其解时才查阅解答；而且每做完一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注，进行比对和总结。如果能如此下功夫做完最近十年的数学考研真题，我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上、在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃，在解题能力和应考水平上也将有一个较大幅度的提高，从而能更加从容地面对研究生入学考试。

这套系列丛书自问世以来，深得广大考研学子的喜爱。今年在以往的基础上，我们作了认真的修订，增加了新的内容(如增加了考题路线图)，使得它更适合广大考研朋友复习使用。

由于成书时间仓促，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者和同仁指正。

陈文灯

近10年考题路线图
(2006—2015年)

注:"一(1),2006"表示2006年第一大题第1小题,其中一(　)、二(　)为客观题,其他为解答题。(10年考题总数231题,总分值1500分,其中2007年为24题)

第一部分　高等数学

(10年考题总数:181题,总分值:1164分。占两部分题量之比重:78.4%;占两部分分值之比重:77.6%)

第一章　函数、极限、连续

(10年考题总数:33.5题,总分值:199分。占第一部分题量之比重:18.5%;占第一部分分值之比重:17.1%)

题型1　求1^{∞}型极限(二(9),2011)

题型2　求0/0型极限(二(11),2007;三(15),2008;三(15),2009;三(15),2011;三(15),2012)

题型3　求$0\cdot\infty$型极限

题型4　函数性质(奇偶性,周期性,单调性,有界性)的判断或证明(二(10),2014)

题型5　无穷小的比较或确定无穷小的阶或根据无穷小的阶反求参数(三(15),2006;一(1),2007;一(2),2009;一(1),2011;一(1),2013;三(15),2013;一(1),2014;三(15),2014;三(15),2015)

题型6　数列敛散性的判定或数列极限的求解或证明(三(18),2006;一(6),2007;一(5),2008;三(19(Ⅱ)),2011;一(3),2012;三(21(Ⅱ)),2012;三(20(Ⅱ),2013))

题型7　求n项和的数列的极限(一(6),2010)

题型8　函数间断点的求解或判定(一(2),2007;一(4),2008;一(1),2009;一(1),2010;一(3),2013;一(2),2015)

题型9　已知函数的连续性,反求函数中的参数(一(2),2006;一(3),2015)

题型10　已知极限值,求常数或其他(二(9),2008)

题型11　讨论函数的连续性(二(8),2006)

题型12　求函数的表达式

题型13　求函数的值域

第二章　一元函数微分学

(10年考题总数:49.2题,总分值:309分。占第一部分题量之比重:27.2%;占第一部分分值之比重:26.5%)

题型1　与函数导数和微分的概念和性质相关的命题(二(7),2006;一(4),2007;一(2),2011)

题型2　函数(含分段函数)在一点可导的判定或求解(一(2),2012)

题型 3　求复合函数的导数或微分(二(9),2006;二(13),2010;一(3),2011)

题型 4　求隐函数的导数或微分(一(5),2006;二(12),2009;二(9),2012;一(2),2013)

题型 5　求反函数、参数方程的导数(三(16),2008;三(17),2010;三(19(Ⅱ)),2012;二(10),2013;二(12),2014;二(9),2015)

题型 6　求函数在一点的高阶导数或泰勒展开式或麦克劳林展开式(二(13),2007;二(11),2010;二(10),2015)

题型 7　函数极值、最值、拐点或凹凸区间判定或求解(三(21(Ⅰ)),2006;三(18(Ⅱ)),2007;二(12),2008;二(13),2009;三(16),2011;三(20)(Ⅰ),2013;一(3),2014;三(16),2014;一(4),2015)

题型 8　函数与其导函数的关系或图形的判定

题型 9　不等式的证明或判定(三(19),2006;三(19(Ⅰ)),2011;三(20),2012;三(21),2015)

题型 10　在某一区间至少存在一点或两点使某个式子成立的证明(三(21),2007;三(20),2008;三(21),2009;三(21),2010;三(21(Ⅰ)),2012;三(18),2013)

题型 11　函数单调性的判断或增减区间的求解(三(15),2010)

题型 12　方程根的判定或唯一性证明(一(1),2008;三(19),2015)

题型 13　与函数在一点的切线方程或法线方程相关的命题(三(21(Ⅱ)),2006;二(12),2007;二(11),2008;二(9),2009;一(3),2010;二(12),2013)

题型 14　求曲线的渐近线方程(一(1),2006;一(5),2007;二(10),2010;一(1),2012;一(2),2014)

第三章　一元函数积分学

(10 年考题总数:36.8 题,总分值:246 分。占第一部分题量之比重:20.3%;占第一部分分值之比重:21.1%)

题型 1　求不定积分或原函数(三(16),2006;三(16),2009)

题型 2　函数与其原函数性质的判定或证明(一(6),2009)

题型 3　求一元函数(含分段函数)的定积分(三(17),2008;二(11),2009;二(10),2012)

题型 4　定积分的比较(一(3),2007;三(16),2010;一(6),2011;一(4),2012;三(19),2014)

题型 5　求解含有定积分或变上限积分的方程(三(17),2007;二(11),2015)

题型 6　反常积分的计算或收敛性的判定(一(3),2006;二(10),2009;一(4),2010;二(12),2011;一(4),2013;二(9),2014;一(1),2015)

题型 7　求曲线的弧长或与曲率或曲率半径相关的问题(一(5),2009;二(12),2010;二(11),2011;三(21(Ⅰ),2013;一(4),2014)

题型 8　求平面图形的面积(三(21(Ⅲ)),2006;一(2),2008;二(11),2013;三(20),2014)

题型 9　求旋转体的体积或侧面积或立体的体积(三(18(Ⅰ)),2007;三(19),2008;三(18),2009;三(20(Ⅰ)),2011;三(17(Ⅱ)),2012;三(16),2013;三(21),2014;三(16),2015)

题型 10　求变力做功或压力等定积分在几何上或物理上的应用(三(18),2010;三(20(Ⅱ)),2011;二(13),2014)

第四章　常微分方程

(10 年考题总数:21 题,总分值:130 分。占第一部分题量之比重:11.6%;占第一部分分值之比重:11.2%)

题型 1　求一阶线性微分方程的通解或特解(一(4),2006;三(20(Ⅱ)),2006;二(10),

2008;二(10),2011;二(12),2012;一(5),2014)

题型 2　求二阶或二阶以上齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解(二(14),2007;三(20),2009;二(9),2010;一(4),2011;三(19(Ⅰ)),2012;二(13),2013 三(18),2014;二(12),2015)

题型 3　求可降阶的微分方程的通解或特解(三(19),2007;三(18),2011)

题型 4　已知二阶齐次线性微分方程的解,反求微分方程(二(10),2006;一(3),2008)

题型 5　考查齐次或非齐次微分方程解的性质或结构(一(2),2010)

题型 6　利用代换化简微分方程并求通解

题型 7　通过解微分方程求函数表达式或应用(三(17),2015)

题型 8　微分方程的几何或物理应用题(二(13),2012;三(20),2015)

第五章　多元函数微积分学

(10 年考题总数:40.5 题,总分值:280 分。占第一部分题量之比重:22.4%;占第一部分分值之比重:24.1%)

题型 1　求多元复合函数的偏导数或全微分(三(20(Ⅰ)),2006;二(15),2007;三(20),2007;一(6),2008;二(13),2008;三(17),2009;一(5),2010;三(19),2010;三(17),2011;一(5),2012;二(11),2012;一(5),2013;二(11),2014;一(5),2015;二(13),2015)

题型 2　二元函数在一点可微的判定(一(7),2007)

题型 3　多元函数极值或最值的判定或求解(二(12),2006;三(21),2008;一(3),2009;一(5),2011;三(16),2012;三(19),2013;一(6),2014)

题型 4　计算二重积分(三(17),2006;三(22),2007;三(18),2008;三(19),2009;三(20),2010;二(13),2011;三(21),2011;一(6),2012;三(17(Ⅰ)),2012;三(18),2012;一(6),2013;三(17),2013;三(21(Ⅱ)),2013;三(17),2014;三(18),2015)

题型 5　二重积分的累次积分的表示或更换次序(二(11),2006;一(8),2007;一(4),2009;一(6),2015)

第二部分　线性代数

(10 年考题总数:50 题,总分值:336 分。占两部分题量之比重:21.6%;占两部分分值之比重:22.4%)

第一章　行列式

(10 年考题总数:3.5 题,总分值:17 分。占第二部分题量之比重:7%;占第二部分分值之比重:5.1%)

题型 1　行列式的计算(一(7),2014)

题型 2　求矩阵的行列式(一(6),2006;二(14),2010;三(22(Ⅰ)),2012)

第二章　矩阵

(10 年考题总数:14 题,总分值:83 分。占第二部分题量之比重:28%;占第二部分分值之比重:24.7%)

题型 1　判断矩阵是否可逆或求逆矩阵(一(7),2008)

题型 2　求矩阵的秩(二(16),2007;三(23(Ⅰ)),2012)

题型 3　解矩阵方程或求矩阵表达式(三(23(Ⅱ)),2008;三(22),2015)

题型 4　矩阵的伴随矩阵的求解或判定(一(7),2009;二(14),2012;二(14),2013)

题型 5　矩阵的初等变换与初等矩阵的关系(二(14),2006;一(8),2009;一(7),2011)

题型 6　两个矩阵关系(等价、相似或合同等)的判定及性质(一(10),2007;一(8),2013;三(23),2014;三(23),2015)

第三章　向量

(10 年考题总数:8 题,总分值:46 分。占第二部分题量之比重:16%;占第二部分分值之比重:13.7%)

题型 1　向量组线性相关性的判断或证明(二(13),2006;一(9),2007;三(23(Ⅰ)),2008;三(22(Ⅱ)),2009;一(7),2010;一(7),2012;一(7),2013;一(8),2014)

题型 2　向量的线性表出或讨论含参变量的向量的线性表出(三(22),2011)

第四章　线性方程组

(10 年考题总数:9 题,总分值:84 分。占第二部分题量之比重:18%;占第二部分分值之比重:25%)

题型 1　齐次线性方程组的基础解系的求解或判定(一(8),2011)

题型 2　已知线性方程组的解或解的情况,求线性方程组或线性方程组中的参数(三(22),2006;三(22),2010;一(7),2015)

题型 3　求线性方程组的通解(三(23),2007;三(22(Ⅰ)),2009;三(22(Ⅱ)),2012;三(22),2014)

题型 4　讨论含参数的线性方程组的解(三(22),2008;三(22),2013)

题型 5　直线方程所组成的方程组的解和直线的位置关系的判定

第五章　矩阵的特征值和特征向量

(10 年考题总数:9.5 题,总分值:67 分。占第二部分题量之比重:19%;占第二部分分值之比重:19.9%)

题型 1　求矩阵的特征值或特征向量(三(23(Ⅰ)),2006;三(24),2007;二(14),2008;三(23(Ⅰ)),2009;三(23),2011;二(14),2015)

题型 2　判定矩阵是否可对角化或求解逆问题(三(23(Ⅱ)),2006)

题型 3　相似矩阵的判定或逆问题(二(14),2009;一(8),2010)

题型 4　实对称矩阵的对角化问题(三(23),2010;一(8),2012)

第六章　二次型

(10 年考题总数:6 题,总分值:39 分。占第二部分题量之比重:12%;占第二部分分值之比重:11.6%)

题型 1　矩阵合同的判定或求解(一(8),2008)

题型 2　与矩阵的规范型相关的命题(三(23(Ⅱ)),2009;二(14),2011;三(23(Ⅱ)),2012;二(14),2014)

题型 3　化实二次型为标准型或求相应的正交变换(三(23),2013;一(8),2015)

目　录

第一篇　2015 年考研数学二试题及答案与解析

第二篇　2006—2014 年考研数学二试题

第三篇　2006—2014 年考研数学二试题分类解析

2015 年考研数学二试题及答案与解析

2015 年考研数学二试题

一、选择题(1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 下列反常积分中收敛的是

(A) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$　　(B) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

(C) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$　　(D) $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$　　【　】

(2) 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在$(-\infty,+\infty)$内

(A) 连续　　(B) 有可去间断点

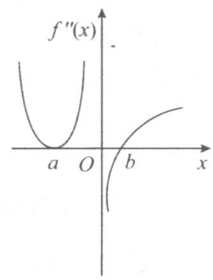
(C) 有跳跃间断点　　(D) 有无穷间断点　　【　】

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$,若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续 则

(A)$\alpha-\beta>1$　　(B)$0<\alpha-\beta\leqslant 1$

(C)$\alpha-\beta>2$　　(D)$0<\alpha-\beta\leqslant 2$　　【　】

(4) 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如右图所示,则曲线 $y=f(x)$ 的拐点的个数为 s



(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3　　【　】

(5) 设函数 $f(u,v)$ 满足 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,则 $\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是

(A) $\frac{1}{2},0$　　(B)$0,\frac{1}{2}$　　(C) $-\frac{1}{2},0$　　(D)$0,-\frac{1}{2}$　　【　】

(6) 设 D 是第一象限中曲线 $2xy=1,4xy=1$ 与直线 $y=x,y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域,函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,则$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$　　(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$　　(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$　　【　】

(7) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为

(A) $a\notin\Omega,d\notin\Omega$　　(B) $a\notin\Omega,d\in\Omega$

(C) $a\in\Omega,d\notin\Omega$　　(D) $a\in\Omega,d\in\Omega$　　【　】

(8) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准型为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准型为

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　【　】

二、填空题(9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在题中横线上)

(9) 设 $\begin{cases}x=\arctan t\\y=3t+t^3\end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$ ________.

(10) 函数 $f(x)=x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$ ________.

(11) 设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)dt$，若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$ ________.

(12) 设函数 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，则 $y(x)=$ ________.

(13) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $dz|_{(0,0)}=$ ________.

(14) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

三、解答题(15 ～ 23 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

(16)(本题满分 10 分)

设 $A>0$，D 是由曲线段 $y=A\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 及直线 $y=0,x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1,V_2 分别表示 D 绕 x 轴及绕 y 轴旋转所成旋转体的体积，若 $V_1=V_2$，求 A 的值.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$，$f_x'(x,0)=(x+1)e^x$，$f(0,y)=y^2+2y$，求 $f(x,y)$ 的极值

(18)(本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_D x(x+y)dxdy$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2,y\geqslant x^2\}$

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}\,dt$,求 $f(x)$ 的零点的个数

(20)(本题满分 11 分)

已知高温物体置于低温介质中,任一时刻物体温度对时间的变化与该时刻物体和介质的温差成正比,先将一初始温度为 120 ℃ 的物体放在 20 ℃ 恒温介质中冷却,30 分钟后该物体温度降至 30 ℃,若要该物体的温度继续降至 21 ℃,还需要多久时间?

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在区间$[a,+\infty)$ 上具有二阶导数,$f(a)=0,f'(x)>0,f''(x)>0$ 设 $b>a$,曲线 $y=f(x)$ 在点$(b,f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是$(x_0,0)$,证明:$a<x_0<b$.

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$

(Ⅰ)求 a 的值.

(Ⅱ)若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵,求 $\boldsymbol{X}$.

(23)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$

(Ⅰ)求 a,b 的值.

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

2015 年考研数学二试题答案与解析

一、选择题

(1)【详解】因为$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\Big|_2^{+\infty}=+\infty$,$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_2^{+\infty}=+\infty$

$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$,所以(A)、(B)、(C) 发散,

对于(D) 选项:
$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx&=\int_2^{+\infty}xe^{-x}dx=\int_{+\infty}^2 xde^{-x}\\&=xe^{-x}\Big|_{+\infty}^2+e^{-x}\Big|_{+\infty}^2\\&=xe^{-x}\Big|_2-xe^{-x}\Big|_{+\infty}+e^{-x}\Big|_{+\infty}-e^{-x}\Big|_2\\&=\frac{2}{e^2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^2}\\&=\frac{2}{e^2}-0+0-\frac{1}{e^2}=\frac{1}{e^2}\end{aligned}$$

因此本题选 D,

(2)【详解】因为 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}\left[\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x}{\sin t}}\right]^{\frac{\sin t}{x}\frac{x^2}{t}}=e^x(x\neq0)$,

显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处没有定义,

因为$\lim\limits_{t\to0}f(x)=1$,所以 $x=0$ 为可去间断点,因此本题应选(B).

(3)【详解】$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}$ 存在,所以 $\alpha-1>0$

当 $x\neq0$ 时,$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}$

因为 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}f'(0)=f'(0)=0$

得 $\alpha-\beta-1>0$ 即 $\alpha-\beta>1$,因此本题应选(A).

(4)【详解】考察函数导数与函数性质的关系:如函数的升降、函数的极大值和极小值、函数的最大值和最小值、函数的凸性,本题考察凸性中的拐点。拐点是曲线上凸和下凸的分界点,可通过二阶导数 $f''(x)$ 的正负发生变化的点判断

因为 $x=a$ 左右两侧 $f''(x)$ 都大于零,所以$(a,f(a))$ 不是拐点

因为 $x=0$ 左右两侧 $f''(x)$ 异号,所以$(0,f(0))$ 是拐点

因为 $x=b$ 左右两侧 $f''(x)$ 异号,所以$(b,f(b))$ 是拐点

所以 $y=f(x)$ 有两个拐点,因此本题选(C)。

(5)【详解】令$\begin{cases} x+y=u \\ \dfrac{y}{x}=v \end{cases}$，得 $x=\dfrac{u}{v+1}, y=\dfrac{uv}{v+1}$，

则 $f(u,v)=\dfrac{u^2}{(v+1)^2}-\dfrac{u^2v^2}{(v+1)^2}=\dfrac{u^2(1-v)}{1+v}$

计算得：$\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{2u(1-v)}{1+v}, \dfrac{\partial f}{\partial v}=u^2\dfrac{-2}{(v+1)^2}$

故$\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=0, \left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\dfrac{1}{2}$，因此本题选(D).

(6)【详解】令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$；

由 $2xy=1$ 得 $2r^2\cos\theta\sin\theta=1$ 即 $r=\dfrac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$

同理，由 $4xy=1$ 得 $r=\dfrac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}$；

由 $y=x$ 得 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 同理，由 $y=\sqrt{3}x$ 得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$；

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$，因此本题选 B.

(7)【详解】考察线性方程组解的判定：类似知识点还有：解的结构、解的性质。

因为$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{bmatrix}$

且 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，得 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$，

推出 $a=1$ 或 $a=2$ 且 $d=1$ 或 $d=2$；因此本题选 D.

(8)【详解】因为 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 化为标准型 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$

因为 $\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2$ 为特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=1$ 对应的特征向量

所以 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下二次型的标准型为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$，因此本题选 A.

二、填空题

(9)【详解】由$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3+3t^2}{\frac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)^2$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{12t(1+t^2)}{\frac{1}{1+t^2}}=12t(1+t^2)^2，故\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=48$$

(10)【详解】由 $f^{(n)}(x)=C_n^0x^22^x(\ln 2)^n+C_n^1 2x2^x(\ln 2)^{n-1}+C_n^2 2\cdot 2^x(\ln 2)^{n-2}$

得 $f^{(n)}(0)=\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot(\ln 2)^{n-2}=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$，故 $f^{(n)}(0)=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$.

(11)**【详解】** 由 $\varphi(x)=x\int_0^{x^2}f(t)dt$ 得 $\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)dt+2x^2f(x^2)$

再由 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$ 得 $\int_0^1 f(t)dt=1$，于是 $5=1+2f(1)$，解得 $f(1)=2$.

(12)**【详解】** 特征方程为：$\lambda^2+\lambda-2=0$，特征值为：$\lambda_1=-2,\lambda_2=1$

原方程通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$

由 $y(0)=3,y'(0)=0$ 得 $\begin{cases}C_1+C_2=3\\-2C_1+C_2=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}C_1=1\\C_2=2\end{cases}$，故 $y=e^{-2x}+2e^x$

(13)**【详解】** 将 $x=0,y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中，得 $z=0$

方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 两边分别对 x,y 求偏导得：

$$\begin{cases}e^{x+2y+3z}\left(1+3\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+yz+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ e^{x+2y+3z}\left(2+3\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)+xz+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$$

将 $x=0,y=0,z=0$ 代入上式得：$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3},\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-\dfrac{2}{3}$,

故 $dz|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}dx-\dfrac{2}{3}dy$

(14)**【详解】** B 的特征值为：$2^2-2+1=3,(-2)^2-(-2)+1=7,1^2-1+1=1$,

故 $|B|=21$

三、解答题

(15)**【详解】** 由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$，$\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ 得

$$f(x)=x+a\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]+bx\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]$$

$$=(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{ax^3}{3}+o(x^3)$$

又 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，所以 $1+a=0,b-\dfrac{a}{2}=0,\dfrac{a}{3}=k$,

得 $a=-1,b=-\dfrac{1}{2},k=-\dfrac{1}{3}$

(16)**【详解】** 由题意旋转体积 V_1 为：$V_1=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)dx=\pi A^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=\dfrac{\pi^2}{4}A^2$

且旋转体积 V_2 为：$V_2=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf(x)dx=2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=2\pi A$

由 $V_1=V_2$ 即 $\dfrac{\pi^2}{4}A^2=2\pi A$ 得：$A=\dfrac{8}{\pi}$.

(17)【详解】由 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$ 得 $f'_x(x,y)=(y+1)^2e^x+\varphi(x)$

进一步得：$f(x,y)=(y+1)^2e^x+\int_0^x\varphi(x)dx+C$

由 $f(0,y)=y^2+2y$ 得 $(y+1)^2+C=y^2+2y$ 解得 $C=-1$

即 $f(x,y)=(y+1)^2e^x+\int_0^x\varphi(x)dx-1$

又由 $f'(x,0)=(x+1)e^x$　得 $e^x+\varphi(x)=(x+1)e^x$　解得 $\varphi(x)=xe^x$

故 $f(x,y)=(y+1)^2e^x+\int_0^x xe^xdx-1=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x$

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=(y+1)^2e^x+xe^x=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)e^x=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}$

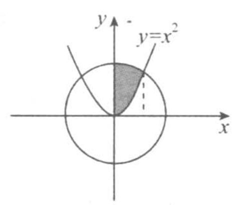
由 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(y+1)^2e^x+(x+1)e^x,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2(y+1)e^x,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2e^x$ 得 $A=1,B=0,C=2$

因为 $AC-B^2=2>0$ 且 $A>0$，

所以 $\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}$ 为极小值点，极小值为：$f(0,-1)=-1$.

(18)【详解】因为 D 关于 y 轴对称且 $f(x,y)=xy$ 关于 x 为奇函数，所以 $\iint\limits_D xydxdy=0$.

$\iint\limits_D(x^2+xy)dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy=2\iint\limits_{D^+}x^2dxdy$（$D^+$ 为 D 在第一象限的部分）



$=2\int_0^1x^2dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}dy=2\int_0^1x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)dx$

$=2[\int_0^1x^2\sqrt{2-x^2}dx-\int_0^1x^4dx]$

$=2\int_0^1x^2\sqrt{2-x^2}dx-\dfrac{2}{5}$

其中 $\int_0^1x^2\sqrt{2-x^2}dx\xlongequal{x=\sqrt{2}\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\sin^2t\sqrt{2}\cos t)(\sqrt{2}\cos t)dt=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2t\cos^2tdt=\dfrac{\pi}{8}$

所以 $\iint\limits_D(x^2+xy)dxdy=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{5}$

(19)【详解】由 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt$ 得 $f(1)=0$，所以 $x=1$ 是一个零点；

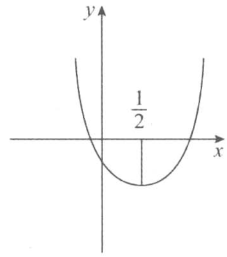
又有 $f'(x)=-\sqrt{1+x^2}+2x\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}(2x-1)$ 令 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{2}$

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时得 $f'(x)>0$，当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时得 $f'(x)<0$ 所以 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 为极小值

由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_{1}^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+t}\,dt$

且 $\int_{1}^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+t}\,dt=-\int_{\frac{1}{4}}^{1}\sqrt{1+t}\,dt\xlongequal{t=u^2}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+u^2}\,2udu$

得：$f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-2u)\sqrt{1+u^2}\,du<0$



因为：$f(+\infty)=\int_{+\infty}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_{1}^{+\infty}\sqrt{1+t}\,dt$

$=-\int_{1}^{+\infty}\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_{1}^{+\infty}\sqrt{1+u^2}\,2udu$

$=\int_{1}^{+\infty}(2u-1)\sqrt{1+u^2}\,du>0$

且 $f(-\infty)=\int_{-\infty}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_{1}^{+\infty}\sqrt{1+t}\,dt>0$

所以可以画出简图可知 $f(x)$ 有两个零点，一个在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 之间，另一个是 $x=1$.

(20)【详解】设 t 时刻物体的温度为 $T(t)$，由题意得 $\frac{dT}{dt}=-k[T(t)-20](k>0)$

整理得 $\frac{dT}{dt}+kT=20k$　解得 $T(t)=(\int 20ke^{\int kdt}dt+C)e^{-\int kdt}=Ce^{-kt}+20$

由 $\begin{cases}T(0)=120\\T(30)=30\end{cases}$ 即 $\begin{cases}C+20=120\\Ce^{-30t}+20=30\end{cases}$

解得 $\begin{cases}C=100\\k=\frac{\ln 10}{30}\end{cases}$ 即 $T(t)=100e^{-\frac{\ln 10}{30}t}+20$

当 $T(t)=21$ 时，由 $21=100e^{-\frac{\ln 10}{30}t}+20$ 解得 $t=60$，

故还需冷却 30 分钟，物体才可以降至 21 ℃

(21)【详解】曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线方程为：$y=f'(b)(x-b)+f(b)$，

得与 x 轴的交点为 $x_0=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$

先证明：$x_0<b$，

因为 $f'(x)>0$，所以 $f'(b)>0$ 且 $f(x)$ 单调增加，所以 $f(b)>f(a)=0$，得证 $x_0<b$

再证明：$x_0>a$，等价于证明 $b-\frac{f(b)}{f'(b)}>a$

因为 $f'(b)>0$，所以原不等式等价于证明 $f'(b)(b-a)>f(b)$

令 $b=x,F(x)=f'(x)(x-a)-f(x),x>a$

易知 $F(a)=0,F'(x)=f''(x)(x-a),x>a$

又因为 $f''(x)>0$，所以 $F'(x)>0$，即 $F(x)$ 单调递增，