M A T H E M A T I C S

高等数学解题真功夫

——给准备考研或参加竞赛的同学

龚冬保 陆全 褚维盘 叶正麟◎编著

GAODENG SHUXUE JIETI ZHENGONGFU

西北工业大学出版社

高等数学解题真功夫

——给准备考研或参加竞赛的同学

龚冬保　陆　全　褚维盘　叶正麟　编著

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书共9章。第1章综述高等数学的解题功夫，第2,3,4章为一元函数微积分学，第5,6章为多元函数微积分学，第7章为无穷级数，第8章为常微分方程，第9章讨论应用问题。

本书以典型试题为载体(例题多精选自国内数学考研和国内外竞赛的试题)，分析重要的数学解题功夫。在多数题解之前，都有“分析”开路或旁注启示，之后或“注”或“小结”，意在帮助读者审题，提示解题方案，拓展解题思路或方法，以助数学思维的训练。

本书主要适用于准备数学考研、有意于大学生数学竞赛的学子们，也希望有助于相关数学教师。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题真功夫/龚冬保等编著.—西安:西北工业大学出版社，2014.12
ISBN 978-7-5612-4192-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①龚… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第272880号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号 **邮编**：710072
电　　话：(029)88493844 88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：兴平市博闻印务有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm 1/16
印　　张：20.125
字　　数：491千字
版　　次：2015年3月第1版 2015年3月第1次印刷
定　　价：48.00元

前　言

无论参加数学考研，还是参加数学竞赛，都要善于完成试题。不少同学在做题时，习惯性地想套用一些现成的解题模式或方法。然而，在考研或竞赛中，常会遇到一些有点新意的、或有一定综合性的、或较难的题。这种试题是衡量和区分学生水平的砝码。可惜许多同学面对这种试题无从下手，望洋兴叹。这得归因于解题功夫不足。

本书旨在通过例题的分析过程、求解或求证过程、解后评注等，帮助读者理解和练就数学解题功夫。解题的好功夫展现为，面对问题，能综合运用知识，分析题的特征，抓住解题要点，制定解题思路和方案，遇到障碍能灵活修改方案，顺利完成解题。自身功夫是自己实练出来的，单凭看他人展示功夫是难以长进的。所以特别提醒读者，在阅读时，把例题当作习题做，在做的过程中训练解题功夫，领悟解题功夫，练就解题功夫。

数学解题功夫有许多。就高等数学解题功夫而言，属于解题过程中重要的有：审题功夫，运算功夫，综合功夫，建模功夫，一题多解和一题多变的功夫，多题共解功夫，等等，其中尤以审题功夫最为要紧。因此，本书在多数题解之前，都有“分析”开路或旁注启示，帮助读者审题，制定解题的计划。这是数学思维的一种训练。

属于数学方法方面的解题功夫，重要的有：无穷小分析方法，辅助函数设计方法，数形结合方法，链导关系分析方法，向量方法，微元法，变换方法，级数与数列共性方法，凑微分方法，数学建模方法，难题分解方法，等等，在本书各章节结合例题都有所陈述。

如书中的例 1.4.3(2005 年考研题)的分析采用了“数形结合”的审题方法：观察连接两点 $O(0,0)$ 与 $C(1,1)$ 的连续曲线 $y=f(x)$，必与直线段 $\overline{A(1,0)B(0,1)}$ 相交(设交于点 D)，得到问题(1) 的解法；再分析两曲线段上的弦 $\overline{OD}$ 与 $\overline{DC}$ 的斜率互为倒数，联想微分中值定理，可制定问题(2)的解题计划，并可领悟出，命题人设置问题(1)是为问题(2)的解决作提示。一道难题，经此审题，可迎刃而解。

又如例 1.1.3，从多项式的整除性质出发，以多种不同视角审题，导出相应的解题计划：利用多项式系数满足的线性方程组求解；根据导函数满足的整除与零点性质的关系，利用定积分或不定积分求解；根据多项式的完全泰勒展开式是其本身的性质，给出新颖的求解方法；还可根据函数的奇偶性设计求解方法；等等。这种探索性的求解过程，对解题功夫的深度和广度训练是很有益的。

再如例 3.2.38，通过共性审视方法审题：题设抽象函数的三阶导数与三次多项式的三阶导数有共性，启发出将后者设计为辅助函数，进行抽象结论推证。根据这种思想，还可自编而变化出一些具有新意的题目，即谓一题多变。有了这种自编“难题”的功夫，何愁考研或竞赛难题！

确切地说，就是在提高数学素养方面多下功夫，自然可提高解题能力。

本书例题多精选于国内数学考研和竞赛的试题，部分采自美国普特南(PTN)数学竞赛题和苏联或俄罗斯数学竞赛题，还有些自编题。“*例…”表示此例题较难，多是竞赛题。无“*”

标注的多是考研题或与考研题难度相当的竞赛题。“例…(陕七复)”表示该题是陕西省第七次大学生数学竞赛复试题,“例…(第 28 届 PTN, A－4)”表示该题是美国第 28 届普特南数学竞赛的 A－4 题。

在例题的解或证之前,或有“分析”,或有旁注,叙述解题思路或方案,拟采用的解题方法,需要注重的地方等,希望读者细研。有些题解或证之后,有“注”,或不同解法的比较,或该题的深入讨论,以扩展视野。我们的宗旨是,在问题求解的探索过程中帮助读者训练数学解题功夫,让数学的学习“活”起来,希望对读者有所裨益。

本书的第 1,2,3 章由龚冬保撰写,第 4 章由褚维盘撰写,第 5,7 章由陆全撰写,第 6,8,9 章由叶正麟撰写。全书由龚冬保和叶正麟统稿。

本书参考或选取了所列文献的一些题及解题方法,恕不能一一在文中标注,也未能一一追及原出处。在此谨向文献的原作者表示诚挚的感谢!

本书顺利出版,得益于西北工业大学出版社和杨军、张友编辑,谨表衷心的感谢。

本书的这种编写方法是一种尝试,希望能对读者有所帮助。由于水平有限,书中会有不少问题,讹误也在所难免,恳请读者批评指正。我们将不断修改,使本书更趋成熟,质量不断提升。

我们深感惋惜的是,龚冬保先生一个多月前因病离我们而去,未能亲睹他倡议力行的本书的出版。我们损失了一位一生难得的良师益友。龚先生毕生致力于数学的教学与研究工作,造诣高深,所著颇丰,培育了数以千百计的优秀人才,为我们的数学教育事业做出了杰出的贡献,我们永远怀念他。

作　者

2015 年 1 月

目　录

第1章 绪　论

——浅谈高等数学的解题功夫

本书主要参考自1987年以来的全国历年考研中的高等数学试题、自1985年以来的陕西省大学生高等数学竞赛题以及国内外相关的大学生竞赛题编写而成. 着重讲述高等数学的解题功夫. 作为绪论,我们以剖析解题的方式,说明本书的特征.

1.1 熟悉基本内容与方法,训练基本功夫

"熟能生巧". 要掌握解题功夫,首先要熟练地掌握基本概念、理论和方法,尤其要反复做一些典型题,以训练基本功.

例 1.1.1 求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

用 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$ 及泰勒公式求解.

解 由 $\sin x\sim x$ 得 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$. 再由泰勒公式,有

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)$$

即得
$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}$$

用等价无穷小替代及泰勒公式求极限的题在考研中有很多.

注 应熟悉当 $x\to 0$ 时,下列等价无穷小:

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$$

及 $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$. 另外,还应熟悉函数 $e^x,\sin x,\cos x,(1+x)^\alpha$ 及 $\ln(1+x)$ 的泰勒公式.

例 1.1.2 设 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 二阶可导,且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足:$z_{xx}+z_{yy}=0$. 若 $f(1)=0,f'(1)=1$,求 $f(u)$ 的表达式.

此题是用复合函数求导法得到 $f(u)$ 的二阶微分方程的综合题.

解
$$z_x=f'(u)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=f'(u)\frac{x}{u}$$

$$z_{xx}=f''(u)\frac{x^2}{u^2}+f'(u)\frac{1}{u}-f'(u)\frac{x^2}{u^3}$$

同理 $z_{yy}=f''(u)\dfrac{y^2}{u^2}+f'(u)\dfrac{1}{u}-f'(u)\dfrac{y^2}{u^3}$,代入原方程得 $f''(u)+$

求出 z_{xx} 后,由轮换对称性,只要将 z_{xx} 中的 x 换 y 即可得 z_{yy}.

$f'(u)\dfrac{1}{u}=0$,即$[uf'(u)]'=0$,由 $f'(1)=1$ 得 $f'(u)=\dfrac{C_1}{u}(C_1=1)$;两边积分由 $f(1)=0$ 得 $f(u)=\ln u(u>0)$.

解方程按凑导数 $[uf'(u)]'=0$ 较简便.只要微积分基本功扎实,解题便可游刃有余.

例 1.1.3 (陕一复 7)[①]设 $f(x)$ 是 7 次多项式,$f(x)+1$ 能被$(x-1)^4$ 整除,$f(x)-1$ 能被$(x+1)^4$ 整除,求 $f(x)$.

考研与竞赛题并无绝对界线.例 1.1.3 是陕西省第一次高等数学竞赛复赛中的题.

分析 1 按常规设 $f(x)=a_7x^7+a_6x^6+\cdots+a_1x+a_0$,虽说可能麻烦,但毕竟是基本方法,我们试着边解边改进.

解 1 (待定系数法)设 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{7}a_kx^k$,由条件:

$f(1)=-1,f(-1)=1,f'(1)=f''(1)=f'''(1)=0$

$f'(-1)=f''(-1)=f'''(-1)=0$

可得 8 个方程:

$a_7+a_6+\cdots+a_1+a_0=-1,-a_7+a_6+\cdots-a_1+a_0=1$

$7a_7+6a_6+\cdots+a_1=0,7a_7-6a_6+\cdots+a_1=0$

$7\cdot 6a_7+6\cdot 5a_6+\cdots+2\cdot 1a_2=0$

$-7\cdot 6a_7+6\cdot 5a_6+\cdots+2\cdot 1a_2=0$

$7\cdot 6\cdot 5a_7+6\cdot 5\cdot 4a_6+\cdots+3\cdot 2\cdot 1a_3=0$

$7\cdot 6\cdot 5a_7-6\cdot 5\cdot 4a_6+\cdots+3\cdot 2\cdot 1a_3=0$

两个一组相加或相减可得以下两个方程组:

$$\left.\begin{aligned}a_7+a_5+a_3+a_1&=-1\\7a_7+5a_5+3a_3+a_1&=0\\21a_7+10a_5+3a_3&=0\\35a_7+10a_5+a_3&=0\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{aligned}a_6+a_4+a_2+a_0&=0\\3a_6+2a_4+a_2&=0\\15a_6+6a_4+a_2&=0\\5a_6+a_4&=0\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{II})$$

由多项式整除,$f(x)+1=(x-1)^4P(x)$
$f(x)-1=(x+1)^4Q(x)$,$P(x)$、$Q(x)$ 都是三次多项式,故 $f(x)$ 在 $x=\pm$处的一至三阶导数均为零.从而利用 $x=\pm 1$ 处的函数值及直至三阶导数值,得到 8 个未知数的方程组.

由(Ⅰ)解得:$a_7=\dfrac{5}{16},a_5=-\dfrac{21}{16},a_3=\dfrac{35}{16},a_1=-\dfrac{35}{16}$;(Ⅱ)是系数行列式不为零的齐次线性方程组,故 $a_6=a_4=a_2=a_0=0$.由此得

$$f(x)=\frac{1}{16}(5x^7-21x^5+35x^3-35x)$$

解方程组(Ⅰ)可用高斯消元法,读者不妨一试.

解 2 (用导数整除性的待定系数法)

由 $f'(x)$ 可被$(x-1)^3$ 和$(x+1)^3$ 整除,知

$f'(x)=A(x^6-3x^4+3x^2-1)\equiv 7a_7x^6+6a_6x^5+\cdots+a_1$

得 $a_6=a_4=a_2=0$.再由 $f(1)=-1,f(-1)=1$,得 $a_0=0$ 及

$$a_7+a_5+a_3+a_1=-1$$

① (陕一复 7)表示陕西省第一次数学竞赛复试第 7 题(下同).

而 $a_7=\frac{A}{7}, a_5=-\frac{3A}{5}, a_3=A, a_1=-A$，得 $A=\frac{35}{16}$，于是

$$a_7=\frac{5}{16}, a_5=-\frac{21}{16}, a_3=\frac{35}{16}, a_1=-\frac{35}{16}\text{（下同解 1）.}$$

解 3　（不定积分法）由

$$f'(x)=A(x-1)^3(x+1)^3=A(x^6-3x^4+3x^2-1)$$

得

$$\begin{aligned} f(x)&=A\int(x^6-3x^4+3x^2-1)\mathrm{d}x \\ &=A\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x\right)+a_0 \end{aligned}$$

将条件 $f(1)=-1, f(-1)=1$ 代入得 $a_0=0, A=\frac{35}{16}$（下同解 1）.

注意 $f'(x)$ 为偶函数.

解 4　（定积分法 1）由 $f(-1)=1$，及 $f'(x)=A(x^6-3x^4+3x^2-1)$

得

$$\begin{aligned} f(x)&=A\int_{-1}^{x}(x^6-3x^4+3x^2-1)\mathrm{d}x+1 \\ &=A\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x\right)+A\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{5}\right)+1 \end{aligned}$$

由 $f(1)=-1$ 得 $A=\frac{35}{16}$. 与前面结果一致.

解 4 用定积分求原函数，减少了一个待定系数.

分析 2　回顾前面的解法，还可能引申出一些解法. 比如由 $f'(x)=A(x^2-1)^3$ 知 $f'(x)$ 为偶函数，结合 $f(1)=-f(-1)$ 知 $f(x)$ 为奇函数，再用待定系数法或定积分、不定积分，还可解得更简便些.

解 5　（定积分法 2）令 $t=x+1$，则

$$\begin{aligned} f(x)&=A\int_{-1}^{x}(x-1)^3(x+1)^3\mathrm{d}x+1=A\int_{0}^{x+1}(t-2)^3t^3\mathrm{d}t+1 \\ &=A\int_{0}^{x+1}(t^6-6t^5+12t^4-8t^3)\mathrm{d}t+1 \\ &=A\left[\frac{1}{7}(x+1)^7-(x+1)^6+\frac{12}{5}(x+1)^5-2(x+1)^4\right]+1 \end{aligned}$$

由 $f(1)=-1$，得 $A=\frac{35}{16}$，故

$$f(x)=\frac{5}{16}(x+1)^7-\frac{35}{16}(x+1)^6+\frac{21}{4}(x+1)^5-\frac{35}{8}(x+1)^4+1$$

由解 4 引向解 5 的换元积分法，目的是便于计算原函数在积分下限处的值，但是待定系数时繁了些.

解 5 实质是用 $f(x)$ 在点 $x=-1$ 处的泰勒多项式来表示 $f(x)$ 自身，因此有如下的解 6 与解 7.

解 6　令

$$f(x)=1+A(x+1)^4+B(x+1)^5+C(x+1)^6+D(x+1)^7$$

由 $f(1)=-1, f'(1)=f''(1)=f'''(1)=0$，可求得 A,B,C,D，请读者自己完成.

解 7　令

$$f(x)=-1+A_1(x-1)^4+B_1(x-1)^5+C_1(x-1)^6+D_1(x-1)^7$$

由 $f(-1)=1, f'(-1)=f''(-1)=f'''(-1)=0$，可求得 A_1,B_1,C_1,D_1.

小结　解 1 的待定系数法是最基本的方法，虽比较繁，但有助于对多项式基本方法及线性方程组求解的训练. 在求解过程中发现，$f'(x)$ 是偶函

数，结合 $f(1)=-f(-1)$ 可知 $f(x)$ 是奇函数，于是可设 $f(x)=a_7x^7+a_5x^5+a_3x^3+a_1x$，用待定系数法可少定 4 个系数. 由整除性知 $f'(x)=A(x-1)^3(x+1)^3$，又可用不定积分求原函数，或用定积分求原函数，再用待定系数法求其余更少的系数. 而在定积分方法求解过程中，换元法又引出求 $f(x)$ 的两种泰勒展式方法，还可能有其他的解法！问题不在于有多少种解法，而在于通过这种训练，能使我们熟悉更多的基本知识和方法，并会运用这些知识与方法之间的联系，反复练习，深入思考，融会贯通，不断地学会和掌握多种解题技巧与方法.

例 1.1.4 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

试用各种解法求解此题，并加以比较. 可训练积分计算的基本功.

分别用直角坐标系，柱面坐标系，球面坐标系，先二后一和质心法计算.

解 1 （直角坐标系）如图 1-1 所示.

积分域是中心在点 $(0,0,1)$，半径为 1 的球体. 在 xOy 面上的投影为单位圆：$x^2+y^2\leqslant 1$，故

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}z\mathrm{d}z$$

$$=2\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi$$

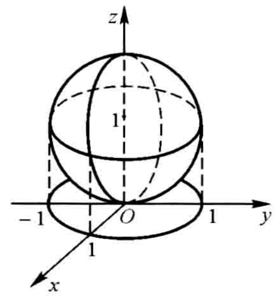

图 1-1

$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y$ 的几何意义是中心在原点，半径为 $\sqrt{1-x^2}$ 的 $\frac{1}{2}$ 圆面积，故为 $\frac{\pi}{2}(1-x^2)$.

解 2 （柱面坐标系）曲面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=2z$ 的柱坐标方程为：$z=1\pm\sqrt{1-\rho^2}$.

$$I=\iint\limits_{\rho\leqslant 1}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\int_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{1+\sqrt{1-\rho^2}}z\mathrm{d}z=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho=\frac{4}{3}\pi$$

注 1 在柱面坐标系下，实质是先对 z 积分得二重积分，再在极坐标下积分.

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}z\mathrm{d}z$$

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho=\frac{4}{3}\pi$$

柱面坐标变换：
$x=\rho\cos\theta$
$y=\rho\sin\theta$
$z=z$
本质是平面极坐标变换.

解 3 （球面坐标系）曲面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=2z$ 的球坐标方程为 $r=2\cos\varphi$.

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{(2\cos\varphi)^4}{4}\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi}{3}$$

注 2 在球面坐标系下计算，即是将柱面坐标系下的三次积分

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{1+\sqrt{1-\rho^2}}z\mathrm{d}z$$

内层的二次积分视为 $zO\rho$ 面上的二次积分，作极坐标变换（见图 1-2）：

球坐标变换可看成在柱坐标
$z=r\cos\varphi$
$\rho=r\sin\varphi$
$\theta=\theta$

$$z=r\cos\varphi,\rho=r\sin\varphi$$

则平面曲线的极坐标方程为 $r=2\cos\varphi$.

$$\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{1+\sqrt{1-\rho^2}}z\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r\sin\varphi\cdot r\cos\varphi\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\cdot\frac{1}{4}(2\cos\varphi)^4\mathrm{d}\varphi=\frac{2}{3}$$

故 $I=\frac{4}{3}\pi$.

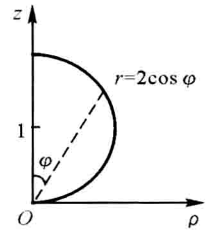

图　1-2

基础上作变换，故球坐标变换为
$x=r\cos\theta\sin\varphi$
$y=r\sin\theta\sin\varphi$
$z=r\cos\varphi$

解 4　(先二后一法)

$$I=\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2(-z^3+2z^2)\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi$$

解 4 中的二重积分等于半径为 $\sqrt{2z-z^2}$ 的圆面积.

解 5　(质心法) 因球体的质心在点(0,0,1)，故质心的 z 坐标为 $I=\iiint\limits_V z\mathrm{d}V/\iiint\limits_V\mathrm{d}V$　(V 是球域)，因此 $I=\frac{4}{3}\pi$，即球的体积.

解 5 利用均匀对称球体的质心坐标的表达式，反求积分.

小结　通过本题的 5 种解法，可以看出这些方法之间的共同点和差异. 前 4 种方法都是将三重积分转化为累次积分的计算，唯独解 5 巧妙应用了均匀对称球体质心的三重积分表示，反用物理原理求解数学问题. 不同坐标系下，曲面方程或投影方程自然不同，但是本题在柱面坐标和球面坐标系下，相对于直角坐标系下，方程的形式比较简单，积分比较容易计算. 然而在直角坐标系下采用先二后一的方法，计算却更简洁了.

请仔细体会所分析的 3 种坐标系之间的变换关系，特别是体积元素的关系：$\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

练习　求空间形体

$$V=\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

的形心(答：$(0,0,\frac{7}{6})$，其中 $\iiint\limits_V z\mathrm{d}V=\frac{7}{6}\pi$).

建议读者从多种角度，采用多种方法反复练习各种典型题.

1.2　特殊与一般的关系

由若干特例寻求规律而作出数学猜想，然后用数学归纳法证明猜想，就是从特殊到一般的一种数学论证方法. 而建立递推关系作论证则是数学归纳法的浓缩.

数学的特点之一是高度抽象性，而这种抽象性往往源于个例. 从特殊到一般，从一般到特殊，是培养抽象思维的重要途径.

例 1.2.1　(陕三 3) 计算 $I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$

分析　从 $n=1$ 时 $I_1=\pi$，$n=2$ 时 $I_2=\pi$ 的简单、特殊的情形出发，可猜想 $I_n=\pi$，然后可用数学归纳法证之，或建立 I_n 和 I_{n+1} 的递推关系.

解　由分析，有

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\cos 2nx\,\mathrm{d}x=0$$

故 $$I_{n+1}=I_n=\cdots=I_1=\pi$$

例 1.2.2 （陕四复 9）设 $f(x)$ 在$[-\delta,\delta](\delta>0)$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-\delta)=-\delta, f(\delta)=\delta, f'(0)=0$. 证明：存在 $\xi\in(-\delta,\delta)$，使 $\delta^2 f'''(\xi)=6$.

分析 如果 $f(x)$ 是 3 次多项式 $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{3}a_kx^k$，满足题设条件，则应有 $\delta^2P'''(\xi)=6$，此 $P'''(x)$ 为常数. 这样，可用此特殊多项式来构造辅助函数，从而证明一般函数 $f(x)$ 的这一性质. 故要求 $P(x)$ 满足 $f(x)$ 所满足的条件 $P'(0)=f'(0)=0, P(\pm\delta)=f(\pm\delta)$. 但是确定 3 次多项式需要 4 个条件，故补充条件 $P(0)=f(0)$.

证 1 作 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，使其满足 $f(x)$ 的题设条件，及补充条件 $a_0=P(0)=f(0)$. 解得

$$a_1=0,\quad a_2=-\frac{1}{\delta^2}f(0),\quad a_3=\frac{1}{\delta^2}$$

即有 $$P(x)=\frac{1}{\delta^2}x^3-\frac{1}{\delta^2}f(0)x^2+f(0)$$

再设 $$\varphi(x)=f(x)-P(x)$$

易见 $\varphi(x)$ 在$[-\delta,\delta]$上可导，且 $\varphi(-\delta)=\varphi(0)=\varphi(\delta)=0$. 由罗尔定理，存在 η_1,η_2：$-\delta<\eta_1<0<\eta_2<\delta$，使 $\varphi'(\eta_1)=\varphi'(\eta_2)=0$. 又 $\varphi'(0)=0$，故在$[\eta_1,0]$和$[0,\eta_2]$上对 $\varphi'(x)$ 用罗尔定理，存在

$$\xi_1,\xi_2:-\delta<\eta_1<\xi_1<0<\xi_2<\eta_2<\delta$$

使 $\varphi''(\xi_1)=\varphi''(\xi_2)=0$.

再对 $\varphi''(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上用罗尔定理，存在

$$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(-\delta,\delta)$$

使 $\varphi'''(\xi)=0$，而 $P'''(x)=\dfrac{6}{\delta^2}$，故 $f'''(\xi)=\dfrac{6}{\delta^2}$. 命题得证.

证 2 利用麦克劳林公式及 $f'(0)=0$，得

$$-\delta=f(-\delta)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}\delta^2-\frac{f'''(\xi_1)}{3!}\delta^3,\ -\delta<\xi_1<0$$

$$\delta=f(\delta)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}\delta^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}\delta^3,\ 0<\xi_2<\delta$$

两式相减整理，并由连续函数 $f'''(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上必取得最小值 m 与最大值 M，可得 $m\leqslant\dfrac{1}{2}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]=6\delta^{-2}\leqslant M$，再由闭区间上连续函数的介值定理，存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-\delta,\delta)$，使得 $f'''(\xi)=6\delta^{-2}$ 即 $\delta^2f'''(\xi)=6$.

本例解题思路是运用多项式辅助函数的方法，来推证一般函数满足的结论. 从要证的结果 $\delta^2f'''(\xi)=6$ 及题设条件分析，当 f 是 3 次多项式的特殊情形，也应成立，由此设出辅助函数，然后利用罗尔定理进行证明.

此证法减弱了 $f(x)$ 的条件：在$(-\delta,\delta)$内三阶可导而不必连续.

在数学推证中，从特殊到一般的思维方法用得很多. 如证明连续函数的介值定理，可先证两端点函数值异号时，两点间必有某点函数值为零的特殊情形，等等，举不胜举.

至于从一般到特殊，则是数学理论结论的自然应用.

进而将数学理论与方法运用到其他学科，就是从一般到特殊的过程.

这里用了三阶导数连续的条件。如果不用 $f(x)$ 的三阶导数连续，则上述方法最后一步需对 $f''(x)$ 用达布定理。

以下两例则是从一般到特殊的典型方法.

例 1.2.3 设 $(2x-1)^7=\sum_{k=0}^{7}a_kx^k$，求 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$ 的值.

解 设 $f(x)=(2x-1)^7=\sum_{k=0}^{7}a_kx^k$. 显然最高次项系数 $a_7=2^7$. 又

$$f(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7=1, f(0)=-1=a_0$$

故
$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=f(1)-a_0-a_7=-126$$

例 1.2.4 比较 π^e 与 e^π 的大小.

分析 可将两数的比较，转化为某函数的两个函数值的比较.

解 取对数后，二数比较转化为 $e\ln\pi$ 与 $\pi\ln e$，也即 $\dfrac{\ln e}{e}$ 与 $\dfrac{\ln\pi}{\pi}$ 的比较，故考察函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. 由 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0(x>e)$ 知，$f(x)$ 单调减，故 $\dfrac{\ln e}{e}>\dfrac{\ln\pi}{\pi}$，即 $e^\pi>\pi^e$.

这里的几个例子还说明，微积分学中用函数的观点去分析解决具体问题，是十分重要的方法.

例 1.2.3 若用二项式展开求解，将比较烦琐. 但若求函数 $f(x)=(2x-1)^7$ 的特殊值方法就简单多了.

1.3 反证法

例 1.3.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不变号. 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：$f(x)=0, x\in[a,b]$.

分析 要证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处为零，用反证法. 若假定 $f(x)$ 在某点不为零，便会使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\neq 0$.

证 不妨设 $f(x)\geqslant 0$. 假设在 $x_0\in(a,b)$ 处，$f(x_0)>0$. 由 $f(x)$ 连续知，$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}f(x_0)$，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$ 时，使
$$f(x)>f(x_0)-\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0)>0$$

于是有
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x>\delta f(x_0)>0$$

这与 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$ 的题设矛盾. 于是 $f(x)=0, x\in[a,b]$.

反证法是数学论证的基本方法之一，在高等数学中也不例外.

此例是一个重要的数学命题，其逆否命题是：对于 $[a,b]$ 上连续且不变号的函数 $f(x)$，若不恒为零，则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\neq 0$$
故用反证法证之.

1.4 数形结合的方法

数形结合的方法，就是从几何意义方面分析命题. 反过来，又可以将微积分的结果用于解决几何问题.

例 1.4.1 计算二重积分 $I=\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是顶点为 $A(0,2), B(2,0)$,

$C(5,2)$，$D(2,4)$ 的四边形域.

分析　如图 1-3 所示. 注意积分域以 AC 为对称轴，可知四边形的形心在 AC 线段上，即形心的纵坐标 $y=2$，因此得解法.

解　由 $y=\dfrac{1}{S_D}\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma$，其中 S_D 是 D 的面积，为 20，从而得 $\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma=40$.

数学原本就是研究数量关系和几何图形的科学，数形结合是自然的.

此题看来一般，但直接计算较繁. 读者不妨一试，借此也可训练基本功.

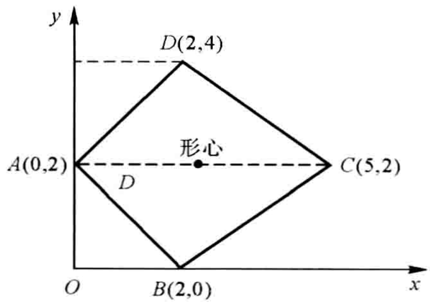

图　1-3

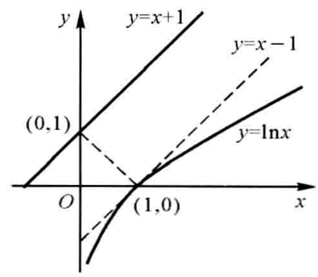

图　1-4

例 1.4.2　在直线 $y=x+1$ 上求一点，使此点到曲线 $y=\ln x$ 的距离为最小，并求此最小距离.

解　先在曲线 $y=\ln x$ 上求一点(见图 1-4)，使这点切线平行于 $y=x+1$. 由 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}=1$，得 $x=1$，所求点为$(1,0)$. 过此点作曲线 $y=\ln x$ 的法线，即 $y=-x+1$ 交 $y=x+1$ 于$(0,1)$，于是，所求直线上的点为$(0,1)$，且最小距离为$\sqrt{2}$.

本题直接用条件极值做，不如从几何意义入手简便.

考虑在曲线 $y=\ln x$ 上寻找一点，使此点到直线 $y=x+1$ 的距离最小，自然过此点的切线平行于 $y=\ln x$，距离最小.

例 1.4.3　(2005 考研题) 设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=1-\xi$；

(2) 存在两不同点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

分析　考虑几何意义(见图 1-5). 曲线 $y=f(x)$ 过原点 O 和 $C(1,1)$，由连续性知，它必与线 AB 即 $y=1-x$ 相交于 $D(\xi,1-\xi)$，弦 OD 及 DC 的斜率分别为 $k_{OD}=\dfrac{1-\xi}{\xi}$，$k_{DC}=\dfrac{\xi}{1-\xi}$. 经审题，此题的证明思路更清晰了.

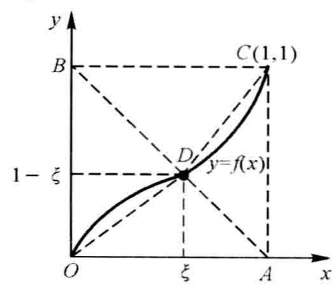

图　1-5

(1) 就是曲线必与直线相交之意.

证　(1) 记 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(0)=-1$，$F(1)=1$. 由介值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$；

(2) 在$[0,\xi]$和$[\xi,1]$上分别对 $f(x)$ 用拉氏中值定理，知存在 $\eta\in(0,\xi)$ 和 $\zeta\in(\xi,1)$，使

$$f'(\eta)=\frac{\xi}{1-\xi},\ f'(\zeta)=\frac{1-\xi}{\xi}$$

即存在 η,ζ：$0<\eta<\zeta<1$，使 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

分别在曲线 OD 和 DC 上存在切线，与弦 OD 和 DC 平行.

做微积分题时，先想到其几何意义往往能使此题解起来思路清晰，运算得心应手.

1.5 辅助函数——架设思维的桥梁

在解答有关微积分问题时，常常要作辅助函数，以搭起做题的桥梁. 前面的例 1.2.2 是借用多项式来作辅助函数，例 1.2.4 为比较 π^e 与 e^π 的大小用到辅助函数，都是如此.

例 1.5.1 证明：在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上，$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.

分析 $\sin x \leqslant x$ 是易得的. 只要证 $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x$，即证 $\sin x - \frac{2}{\pi}x \geqslant 0$，为此设不等式左边为辅助函数.

证 作 $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则 $f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$. 令 $f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}=0$，得唯一驻点 $x_0=\arccos\frac{2}{\pi}$，且 $f''(x_0)=-\sin x_0<0$，故 $f(x_0)$ 是极大值，也是 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 的最大值，$f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$ 是最小值，故 $f(x)\geqslant 0$，问题得证.

这种简单的分析方法，是将两个函数的比较转化为一个辅助函数的最值问题或单调性问题.

注 我们来看此不等式的几何意义：

曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 是凸的(见图 1-6)，故切线 $y=x$ 在其上方，而弦 $y=\frac{2}{\pi}x$ 在下方. 于是，可编出以下的题目.

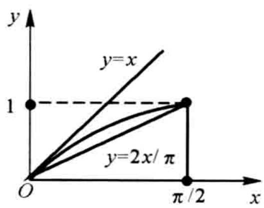

图 1-6

用数形结合方法，分析几何意义，不但可以帮助寻找辅助函数，而且可以帮助我们去编制一些题目.

例 1.5.2 证明：在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上，$x\leqslant\tan x\leqslant\frac{4}{\pi}x$，并说明其几何意义.

例 1.5.3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$. 证明：

$$f(\frac{a+b}{2})\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$$

几何提示 如图 1-7，$y=f(x)$ 是凹曲线，因此，曲边梯形 $ABCD$ 的面积小于梯形 $ABCD$ 的面积，大于过 M 点作弧 CD 的切线所成梯形 ABC_1D_1 的面积.

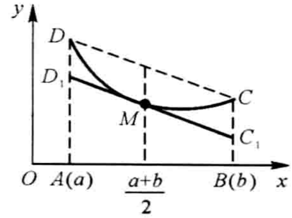

图 1-7

请读者用辅助函数证明以上两题相关的不等式.

例 1.5.4 (2010 考研题) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{3}$，证明：存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2}), \eta\in(\frac{1}{2},1)$，使

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$$

分析 用分析方法作辅助函数,将要证的等式改写. 欲证

$$f'(\xi)+f'(\eta)-\xi^2-\eta^2=[f(x)-\frac{1}{3}x^3]'_{x=\xi}+[f(x)-\frac{1}{3}x^3]'_{x=\eta}=0$$

于是想到辅助函数 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$,做题方案也就有了.

证 令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$,则 $F(0)=F(1)=0$.

分别在$[0,\frac{1}{2}]$和$[\frac{1}{2},1]$上用拉氏中值定理:

$$F(\frac{1}{2})-F(0)=\frac{1}{2}F'(\xi),\xi\in(0,\frac{1}{2})$$

$$F(1)-F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}F'(\eta),\eta\in(\frac{1}{2},1)$$

由 $F(0)=F(1)=0$,上两式相加得 $F'(\xi)+F'(\eta)=0$. 而 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$,即得 $f'(\xi)-\xi^2+f'(\eta)-\eta^2=0$,即

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$$

称此方法为分析法,即将要证结论改写成 $F'(\xi)=0$ 而找到了辅助函数.

本题结论中的“原函数”好找,下一例“结论”不是全微分,就更需要技巧了.

例 1.5.5 (2001 考研题)设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导,且

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}e^{1-x^2}f(x)dx$$

证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

分析 用罗尔定理证明. 要证$[f'(x)-2xf(x)]_{x=\xi}=0$,即证

$$e^{1-x^2}[f'(x)-2xf(x)]_{x=\xi}=[e^{1-x^2}f(x)]'_{x=\xi}=0$$

这样便有了思路,也有了辅助函数.

证 由积分中值定理知,存在 $\eta\in(0,\frac{1}{2}]$,使 $f(1)=e^{1-\eta^2}f(\eta)$. 作 $\varphi(x)=e^{1-x^2}f(x)$,则 $\varphi(x)$ 在$[\eta,1]$上连续且可导,又 $\varphi(1)=f(1)=\varphi(\eta)$,满足罗尔定理条件,故存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$,使 $\varphi'(\xi)=0$,即

$$e^{1-\xi^2}[f'(\xi)-2\xi f(\xi)]=0$$

也即 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

$f'(x)-2xf(x)$ 不是某函数的导数,但 $e^{1-x^2}[f'(x)-2xf(x)]$ 是 $e^{1-x^2}f(x)$ 的导数. 其实被积函数 $e^{1-x^2}f(x)$ 已经蕴含着这是辅助函数. 接着便自然会想到先用积分中值定理,再对辅助函数用罗尔定理.

一般地,对于形如 $f'(x)+P(x)f(x)$ 的函数,其积分因子为 $e^{\int Pdx}$,有 $e^{\int Pdx}[f'+Pf]=(f\cdot e^{\int Pdx})'$.

在例 1.2.2 中,我们讲了利用多项式作辅助函数的方法. 再介绍一个用特殊函数作辅助函数的方法的例题.

例 1.5.6 设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续,且

$$\int_0^{\pi}f(x)\sin x dx=\int_0^{\pi}f(x)\cos x dx=0$$

证明:存在 $\xi,\eta\in(0,\pi)(\xi\neq\eta)$,使 $f(\xi)=f(\eta)=0$.

分析 由第一个积分值为零知 $f(x)$ 有零点. 假设只有一个零点,设为 ξ,则 $f(x)$ 在 ξ 的左右区间为一正一负,如图 1-8. 为证另一零点存在,希望设计类似于第一个积分的被积函数. 为此将 $y=\sin x$ 向右平移 ξ 个单位,使得 $f(x)\sin(x-\xi)$ 在$[0,\pi]$上不变号. 这就是所要的辅助函数.