河南省"十二五"普通高等教育规划教材
普通高等教育"十二五"规划教材
河南省精品资源共享课程配套教材
河南省精品课程配套教材

概率论与数理统计

（第二版）

徐雅静 段清堂 汪远征 曲双红 等 编著

科学出版社

河南省“十二五”普通高等教育规划教材
普 通 高 等 教 育 “ 十 二 五 ” 规 划 教 材
河 南 省 精 品 资 源 共 享 课 程 配 套 教 材
河 南 省 精 品 课 程 配 套 教 材

概率论与数理统计

（第二版）

徐雅静　段清堂　汪远征　曲双红 等　编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书由概率论与数理统计两部分组成.概率论部分(第 1 章～第 5 章)包括随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定理和中心极限定理等研究随机性问题的理论基础.数理统计部分(第 6 章～第 10 章)包括参数估计、假设检验、回归分析和方差分析等基本统计分析方法.

本书增加概率统计的发展简史和应用案例,以激发学生的学习兴趣;引进计算机数据处理与统计分析技术,便于学生对理论的理解和应用方法的掌握;增加实验内容,图文并茂地给出实验过程,便于学生自学掌握.

本书可供普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)、经济管理类有关专业的大学生作为教材使用,也可供广大教师和相关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/徐雅静等编著.—2 版 .—北京:科学出版社,2015.8
(河南省“十二五”普通高等教育规划教材 · 普通高等教育“十二五”规划教材 · 河南省精品资源共享课程配套教材 · 河南省精品课程配套教材)
ISBN 978-7-03-045199-6

Ⅰ.概… Ⅱ.徐… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 158766 号

责任编辑:张中兴 / 责任校对:蒋 萍
责任印制:霍 兵 / 封面设计:迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 8 月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2015 年 8 月第 二 版 印张:21
2015 年 8 月第七次印刷 字数:424 000

定价: 39.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　　言

“概率论与数理统计”是一门研究随机现象的应用性很强又颇具特色的数学学科，它在工程技术、科学研究、经济管理、企业管理、人文社科等众多领域都有广泛的应用. 它的理论与方法向各个学科渗透，是近代科学技术发展的特征之一，并由此产生了许多新的交叉学科，如生物统计学、工程统计学，医学统计学、统计物理、管理统计学、计量经济学、商业统计学等等. 它又是许多新兴的重要学科的基础，如信息论、控制论、可靠性理论、人工智能、信息编码理论和数据挖掘等. “概率论与数理统计”改变了原有单一学科发展的思路，对各门学科的发展具有极大的支撑作用，它的方法可以帮助各个领域的研究工作者更快地获得成功. 在理论联系实际方面它是数学学科中最活跃、最有发展前途的分支之一.

“概率论与数理统计”是高校理、工、农、医、经济类、管理类等本科专业必修的一门重要的基础课，也是相关专业硕士研究生入学考试的一门必考科目，更是本科学生运用随机思维模式解决本专业相关问题的实用课程. 由于该课程的理论内容抽象深奥，应用方法灵活多样，应用中涉及大量复杂的公式和数值计算，偏重理论的传统教材和手工计算方法限制了它的应用性，而现代计算机技术和众多统计软件早已为解决这一问题提供了条件. 为适应现代教学理念、方法和手段，改变学生认为“概率论与数理统计”难学、难记、不会用的现状，我们编写了《概率论与数理统计》一书.

自第一版出版以来，本书以其独创的概率统计实验内容及其图文并茂的实验过程深受广大师生的喜爱，2013 年本书被评为河南省“十二五”普通高等教育规划教材.

本书的第二版在第一版的基础上进行了精心的修改，理论内容更加深入浅出，例题和案例更加实用、新颖，习题更加丰富.

本书由概率论与数理统计两部分组成. 概率论部分(第 1 章～第 5 章)包括随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定理和中心极限定理等研究随机性问题的理论基础. 数理统计部分(第 6 章～第 10 章)包括参数估计、假设检验、回归分析和方差分析等基本统计分析方法.

本书主要特色如下：

(1) 增加概率统计的发展历史简介、概率统计应用方面的例题及应用案例，以激发学生的学习兴趣.

在各章的开始增加了应用案例，通过案例教学，使抽象的概念、理论与实际应用紧密结合，便于学生理解与应用. 各章最后对应用案例的分析和解答旨在培养学生

综合运用有关理论和方法分析问题、解决问题的能力，把数学建模的思想方法融入概率论与数理统计的课堂教学中.

选用和编制了一些能够反映当代概率论与数理统计应用方向的例题和习题，这些例题和习题不但具有一定的启发性，也能够使读者体会到概率论与数理统计在现实生活中应用的广泛性.

(2) 略去一些复杂的理论推导和繁琐的手工计算，引进计算机数据处理与统计分析技术，重点放在对理论的理解和应用方法的掌握上.

“概率论与数理统计”中有相当部分的理论推导，这虽然可以培养学生的理论分析能力，但对基本概念的理解及解决实际问题帮助不大. 考虑到课程学时的限制，我们对理论推导部分做了弱化处理，在计算上尽量借助于计算机来完成，把重点放在对实际问题的分析和基本方法的运用上.

(3) 增加概率统计实验内容，图文并茂的给出实验过程，便于学生自学掌握.

对于概率论与数理统计中较为复杂的计算，我们引入了应用非常广泛的数据处理软件 Excel，并设计了大量实验. 在众多统计软件中，之所以选择 Excel 软件，是因为 Excel 软件的基本操作已为广大师生所熟悉，对于概率计算和统计数据的处理与分析，只需通过简单自学即可上机操作.

在 Excel 实验的设计中，我们采用了两种不同的处理方式. 实验方法一是实验型：直接利用 Excel 的函数和公式完成实验内容，帮助学生加深对所学知识的理解和记忆，还可以通过改变参数或个别数据观察动态的计算结果，便于教师课堂演示教学. 实验方法二是应用型：直接使用 Excel 的“数据分析”工具完成实验内容，简单、便捷，以应用为目的.

实验内容的学习可以根据教学时数，采用全讲、选讲或学生自学的方式进行.

(4) 根据各章内容特点设计了不同类型的习题，学生可根据需要有选择地进行练习.

本教材大部分章节的习题分 A、B 两部分，A 中配备了填空题、选择题、解答题和应用题，希望通过这些基本题目的训练，使学生能够较好地掌握基本概念、理论和基本方法；B 中选用了往年的部分考研题或较难一些的题目，旨在强化学生对理论内容的深入理解和掌握；应用题大多需要借助于计算机完成，旨在训练学生利用计算机进行数据处理和统计分析解决实际问题的能力.

学习和使用本教材需要读者具备“高等数学”与“线性代数”课程的基本知识. 本教程知识系统、详略得当、举例丰富、讲解透彻、难度适宜，适合作为普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)、经济管理类有关专业的概率论与数理统计课程的教材使用，也可作为供相关专业人员和广大教师的参考资料.

为方便教学，我们设计制作了与本教材配套的精美 PPT 课件供选用.

本书第 1 章由黄士国、何朝兵编写，第 2、3 章由段清堂、黄士国编写，第 4、5、6 章由曲双红编写，第 7、8 章由徐雅静编写，第 9 章由何朝兵编写，第 10 章及附录由汪远征编写，全书由徐雅静统稿.

在本书的编写过程中，得到郑州轻工业学院、河南理工大学、解放军信息工程大学、郑州大学、南京理工大学等院校的大力支持，在此一并表示感谢！

限于编者水平，以及编写时间仓促，书中难免有错漏与不当之处，恳请读者批评指正.

作　者

2015 年 2 月

目　录

第1章　概率论基础

客观世界中存在着两类现象，一类是在一定条件下必然出现的现象，称为**必然现象**.例如，在标准大气压下，100℃的纯水必然沸腾；在地面上向上抛一枚硬币必然下落；冬天过去春天就会到来等等都是必然现象的例子.

还有一类现象，在一定条件下可能出现也可能不出现，称为**随机现象**.自然界和社会上发生的随机现象广泛存在.例如，抛掷一枚硬币，有可能正面朝上，也有可能反面朝上；一天内进入某超市的顾客数的多少；随机抽查一台某种型号电视机，考察其寿命的长短；测量一物体长度时，测量误差的大小，这些都是随机现象的例子.

概率论是从数量化的角度来研究和揭示随机现象规律性的一门数学学科，20世纪以来，广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域.本章主要介绍随机事件及其概率、古典概型与几何概型、条件概率与乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式、事件的独立性等概率论中最基本、最重要的概念及概率的计算方法.

【概率论发展简史】

概率概念的形成与用投掷骰子进行赌博有密切的关系.17世纪中叶，在欧洲许多国家，贵族之间盛行赌博之风.法国有一位热衷于掷骰子游戏的贵族德·梅尔(De Méré)，曾提出了"分赌注问题"，其大意是：两个人决定各出赌本若干，赌若干局，事先约定谁先赢得3局便算赢家，将赢得所有赌本.如果在一个人赢2局，另一人赢1局时因故要终止赌博，应如何分赌本？

诸如此类的问题提出了不少，但他们自己无法给出答案.参赌者将他们遇到的上述问题请教当时的数学家帕斯卡(Pascal，法，1623—1662)，帕斯卡接受了这些问题，他没有立即回答，而把它交给另一位数学家费马(Fermat，法，1601—1665).他们频频通信，互相交流，围绕着赌博中的数学问题开始了深入细致的研究.他们一边亲自做赌博实验，一边仔细分析计算赌博中出现的各种问题，终于完整地解决了"分赌注问题"，并将该问题的解法向更一般的情况推广，从而建立了概率论的一个基本概念——数学期望.

1657年惠更斯(Huygens，荷，1629—1695)发表的《论赌博中的计算》是最早的概率论著作.因此早期概率论的真正创立者是帕斯卡、费马和惠更斯.这一时期被称为组合概率时期，计算各种古典概率.论著中第一批概率论概念(如数学期望)与定理(如概率加法、乘法定理)标志着概率论的诞生.

18世纪初，伯努利(Bernoulli，法，1700—1782)、棣莫弗(De Moivre，法，1667—1754)、蒲丰(Buffon，法，1707—1788)、拉普拉斯(Laplace，法，1749—1827)、高斯

(Gauss，德，1777—1855)和泊松(Poisson，法，1781—1840)等一批数学家对概率论的发展作出了奠基性的贡献.

1812 年，拉普拉斯所著的《概率的分析理论》实现了从组合技巧向分析方法的过渡，这是一部继往开来的作品，开辟了概率论发展的新时期.

19 世纪后期，极限理论的发展成为概率论研究的中心课题，是概率论的又一次飞跃，为后来数理统计的产生和应用奠定了基础.切比雪夫(Chebyshev，俄，1821—1894)对此做出了重要贡献.他建立了关于独立随机变量序列的大数定律，推广了棣莫弗-拉普拉斯的极限定理.切比雪夫的成果后来被其学生马尔可夫发扬光大，影响了 20 世纪概率论发展的进程.

如何把概率论建立在严格的逻辑基础上，这是从概率论诞生之初人们就关注的问题，好多数学家进行过尝试，终因条件不成熟，一直拖了近三百年才得以解决.

1933 年，柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov，俄，1903—1987)在他的名著《概率论基础》一书中，提出了概率公理化定义，并得到数学家的普遍承认.公理化体系给概率论提供了一个逻辑上的坚实基础，使概率论成为一门严格的演绎科学，取得了与其他数学学科同等的地位，并通过集合论与其他数学分支紧密联系起来.

在公理化的基础上，现代概率论不仅在理论上取得了一系列突破，在应用上也取得了巨大的成就，其应用几乎遍及所有的科学领域.现在，概率论与以它作为基础的数理统计学科一起，在自然科学、社会科学、工程技术、军事科学、工农业生产、经济研究、金融和管理等诸多领域中都起着不可或缺的作用.

直观地说，卫星上天、导弹巡航、飞机制造、宇宙飞船遨游太空等都有概率论与数理统计的一份功劳；及时准确的天气预报、海洋探险、考古研究等更离不开概率论与数理统计；电子技术发展、影视文化的进步、人口普查及教育等和概率论与数理统计也是密不可分的.

根据概率论中用投针试验估计 π 值的思想产生的蒙特卡罗方法，是一种建立在概率论与数理统计基础上的计算方法.借助于电子计算机这一工具，使这种方法在核物理、表面物理、电子学、生物学、高分子化学等学科的研究中起着重要的作用.

概率论作为理论严谨，应用广泛的数学分支正日益受到人们的重视，并将随着科学技术的发展而得到发展.

1.1　随机试验与样本空间

1.1.1　随机试验

对随机现象的研究是通过随机试验来进行的，概率论中把满足以下特点的试验称为**随机试验**：

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

随机试验通常用大写字母 E 表示.

【例 1.1】 下面是一些随机试验的例子.

E_1:抛一枚硬币观察哪一面朝上;

E_2:抛一颗骰子观察朝上一面的点数;

E_3:观测某品牌电视机的寿命;

E_4:记录 110 每天接到的报警次数;

E_5:从圆心在原点的单位圆内任取一点.

虽然一次随机试验的结果不能完全预言,但是,在相同条件下大量重复此试验时,则会呈现出一定的数量规律性,这种在大量重复试验中所呈现出的固有的规律性称为**统计规律性**.例如,多次重复抛一枚硬币观察发现正面朝上的次数大致有一半,同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定规律分布,等等.

随机试验(以后简称试验)是一个广泛的术语,它包括各种科学实验,也包括对客观事物进行的“调查”、“观察”、“测量”等.

1.1.2 样本空间

定义 1.1 随机试验的一切可能的基本结果组成的集合称为**样本空间**,记为 $\Omega=\{\omega\}$,其中 ω 表示基本结果,又称为**样本点**.

研究随机现象首先要了解它的样本空间.

【例 1.2】 对例 1.1 的几个随机试验,可以写出它们对应的样本空间.我们用 Ω_i 表示 E_i 的样本空间,$i=1,2,\cdots,5$.

抛一枚硬币观察哪一面朝上:$\Omega_1=\{$正面向上,反面向上$\}$;

掷一颗骰子观察朝上一面的点数:$\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$;

观测某品牌电视机的寿命:$\Omega_3=\{t \mid t\geqslant 0\}$;

记录 110 每天接到的报警次数:$\Omega_4=\{0,1,2,\cdots\}$;

从圆心在原点的单位圆内任取一点:$\Omega_5=\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$.

关于样本空间的两点说明:

(1) 样本空间中的元素可以是数也可以不是数;

(2) 样本空间中的样本点可以是有限多个,也可以是无限多个.仅含两个样本点的样本空间是最简单的样本空间.

1.2 随机事件及其概率

1.2.1 随机事件

定义 1.2 随机试验的若干个基本结果组成的集合称为**随机事件**,简称**事件**,只

含有一个基本结果的事件称为**基本事件**.

随机事件常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示.

关于随机事件概念的几点说明：

(1) 事件可以用集合表示，任一事件 A 是相应样本空间的一个子集；

(2) 基本事件就是只含有一个样本点的集合；

(3) 当集合 A 中某个样本点出现了，就说事件 A 发生了.或者说事件 A 发生当且仅当集合 A 中某个样本点出现了；

(4) 样本空间 Ω 包含所有的样本点，作为自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为**必然事件**.空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它作为样本空间的子集，在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**.

【例 1.3】 掷一颗骰子的样本空间为：$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

$A_1=$"出现 5 点"，可记为 $A_1=\{5\}$，它是一个基本事件；

$A_2=$"出现奇数点"，可记为 $A_2=\{1,3,5\}$；

$A_3=$"出现偶数点"，可记为 $A_3=\{2,4,6\}$；

$A_4=$"出现的点数不大于 6"，它由 Ω 的全部样本点"1,2,3,4,5,6"组成，是必然事件，可记为 $A_4=\Omega$；

$A_5=$"出现的点数大于 6"，Ω 中任一样本点都不在 A_5 中，所以 A_5 是不可能事件，可记为 $A_5=\varnothing$.

1.2.2 事件间的关系及运算

由于事件可以用集合表示，因而事件间的关系及运算实质上是集合间的关系及运算.下面对事件的讨论总是假设在同一个样本空间 Ω 中进行.

1. 事件间的关系

1) 包含

若事件 A 发生必有事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B，或者事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$.

从集合论的观点看，$A\subset B$ 也就是说 A 是 B 的子集，因此也称 A 为 B 的子事件.

例如，在例 1.3 中，$A_1=\{5\}$，$A_2=\{1,3,5\}$，则有 $A_1\subset A_2$.

2) 相等

如果事件 A 与事件 B 满足：$A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.也就是说，A,B 中有一个发生另一个也必发生.

从集合论的观点看，两个事件相等就意味着这两个事件是同一个集合. 有时，不同语言描述的事件也可能是同一件事.

例如，掷两颗骰子，以 A 记事件"两颗骰子的点数之和为奇数"，以 B 记"两颗骰子的点数一奇一偶"，很容易看出：A 发生必然导致 B 发生，而且 B 发生也必然导致

A 发生,所以 $A=B$.

3) 互不相容

如果事件 A 和 B 没有相同的样本点,则称 A 与 B 互不相容(或互斥).也就是说,A,B 不同时发生.

从集合论的观点看,A 与 B 互不相容也就是 A 与 B 的交集为空集.

例如,在例 1.3 中,$A_2=\{1,3,5\}$,$A_3=\{2,4,6\}$,那么 A_2 与 A_3 互不相容.

2. 事件运算

1) 事件 A 与 B 的和

由至少属于 A,B 之一的样本点的全体组成的集合,称为事件 A 与 B 的**和**(或**并**),记为 $A\cup B$. 事件 $A\cup B$ 表示 A,B 至少有一个发生.

2) 事件 A 与 B 的积

由既属于 A 又属于 B 的样本点组成的集合,称为事件 A 与 B 的**积**(或**交**),记为 $A\cap B$ 或 AB. 事件 $A\cap B$ 或 AB 表示事件 A 与 B 同时发生.

显然,事件 A 与 B 互不相容当且仅当其积事件为不可能事件,即 $AB=\varnothing$.

事件的和与积运算可推广到有限个或可列个事件的情形,假设有事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 称为**有限和**;$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 称为**可列和**;$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 称为**有限积**;$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 称为**可列积**.

3) 事件 A 与 B 的差

属于事件 A 而不属于事件 B 的样本点的全体组成的集合称为 A 与 B 的**差事件**,记为 $A-B$. $A-B$ 表示 A 发生而 B 不发生.

4) 对立事件

由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的集合称为 A 的**对立事件**(或**逆事件**),记为 $\bar{A}$.$\bar{A}$ 表示 A 不发生.显然,$\bar{A}=\Omega-A$,$\bar{\bar{A}}=A$.

3. 事件运算满足的定律

事件的运算性质和集合的运算性质相同.设 A,B,C 为事件,则有

交换律 $A\cup B=B\cup A$;$AB=BA$.

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;$(AB)C=A(BC)$.

分配律 $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$;$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

对偶律 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$;$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

【例 1.4】 设 A,B,C 表示三个随机事件,试将下列事件用 A,B,C 表示出来.

(1) A 发生,且 B 与 C 至少有一个发生;

(2) A 与 B 发生,而 C 不发生;

(3) A,B,C 中恰有一个发生;

(4) A, B, C 中至少有两个发生；

(5) A, B, C 中至多有两个发生；

(6) A, B, C 中不多于一个发生.

解　(1) $A(B\cup C)$；

(2) $AB\bar{C}$；

(3) $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$；

(4) $AB\cup BC\cup CA$；

(5) 考虑该事件的对立事件，其对立事件为 A, B, C 同时发生，所以该事件表示为$\overline{ABC}$；

(6) 该事件为(4)的对立事件，因此该事件可表示为$\overline{AB\cup BC\cup CA}$.

【例 1.5】　向指定目标射三枪，观察射中目标的情况.用 A_i 表示事件"第 i 枪击中目标"，$i=1, 2, 3$.试用 A_1，A_2，A_3 表示以下各事件：

(1) 只击中第一枪；

(2) 三枪都没击中；

(3) 至少击中一枪；

(4) 至多击中两枪.

解　(1) 事件"只击中第一枪"，意味着"第一枪击中目标"、"第二枪未击中目标"、"第三枪未击中目标"，三个事件同时发生，所以可表示成 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$.

(2) 事件"三枪都没击中"，意味着"第一枪未击中目标"、"第二枪未击中目标"、"第三枪未击中目标"，三个事件同时发生，所以可表示成 $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$.

(3) 事件"至少击中一枪"，就是事件 A_1，A_2，A_3 至少有一个发生，所以可表成 $A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\cup A_1A_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$.

(4) 事件"至多击中两枪"意味着三枪不能同时击中，即事件 A_1，A_2，A_3 不能同时发生，所以可表示成$\overline{A_1A_2A_3}$.

1.2.3　事件的概率及性质

随机事件的发生有其偶然性的一面，即在一次试验中它可能发生也可能不发生，但是在大量重复试验中它又呈现出内在的规律性，即它发生的可能性大小是确定的，且是可以度量的.所谓随机事件的**概率**，概括地说就是用来描述随机事件发生的可能性大小的数量指标，它是概率论中最基本的概念之一.

在概率论发展史上，曾有过概率的古典定义、概率的几何定义、概率的统计定义、概率的主观定义、概率的公理化定义等，这些定义各适合一类随机现象，我们希望对每个事件都能指定一个数，能用它来表示事件在一次试验中发生的可能性大小.下面先从事件发生的频率与概率的统计定义谈起.