高职高专“十二五”规划教材

JINGJI YINGYONG SHUXUE

经济应用数学

公共基础课教材

主　编◎李聪睿

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

公共基础课教材

经济应用数学

主　编　李聪睿

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书以“数学为本、经济为用”的原则，适当选材，由浅入深，分别介绍了函数、极限及应用，导数、微分及导数的应用，积分及其应用，常微分方程，概率统计基础，数学模型与数学实验等内容。书后附有全书习题的参考答案与解法提示。

本书可以作为高等院校财经类、管理类及相关专业的教材，也可作为自学者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学 / 李聪睿主编 .--上海：上海交通大学出版社，2012

ISBN 978－7－313－08685－3

Ⅰ.①经… Ⅱ.①李… Ⅲ.①经济数学－高等学校－教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 145286 号

经济应用数学

李聪睿　主编

上海交通大学 出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号　邮政编码 200030)

电话：64071208　出版人：韩建民

北京市后沙峪印刷厂印刷　全国新华书店经销

开本：787mm×1092mm　1/16　印张：16.5　字数：398 千字

2012 年 7 月第 1 版　2012 年 7 月第 1 次印刷

印数：1～3030

ISBN 978－7－313－08685－3/F　定价：32.00 元

前　言

近年来，我国高等教育蓬勃发展，为国家建设培养了大批技能型专业人才，为社会主义现代化建设做出了应有的贡献。当前，高等教育成为社会关注的热点，面临大好的发展机遇。同时，经济、科技和社会发展也对其人才培养工作提出了更高的要求，但在教学实践中，较少学时的经济数学教材却出现了相对滞后的情形，而且，目前教材中的部分内容和中学所必修的数学内容有许多重复。所以，我们以“掌握概念，强化应用，培养技能”为重点，充分体现以应用为目的，本着以“必需、够用”为度，以提高学生的综合能力为指导思想，以培养高等技术应用性专门人才为根本任务，以突出应用性与实践性为原则，以适应社会需要为目标的宗旨，结合我们多年来的教学经验，根据教育部制定的“经济数学基础课程教学的基本要求”编写了这本供经济与管理类和工程造价等专业学生使用的教材。本教材需讲授 102～116 学时，其中带“*”的为选学内容，实践中可根据本校本专业的实际情况和教学计划酌情选用。

本教材具有以下特点：

(1) 根据学生的实际学习情况，适当选材，由浅入深，循序渐进。根据学生的认知规律和教学规律，把我们的教学特点和思想融合到教材中去，除传授给学生数学知识外，还传授一种简单易懂的学习方法和数学思想，使教材简明实用。

(2) 在内容的安排上，建立全新的教材架构。我们将数学知识与经济应用有机结合，淡化了一些高难度的理论推导和证明过程，加强了法则和公式的经济应用。对于中学时期学过的内容，尽量不讲，必须讲授时应起纽带作用，尽量做到少而精。全书以实用性为主，充分体现了“数学为本，经济为用”的原则，在保持数学知识连贯性的同时，建立全新的教材架构，便于学生对数学基础知识的理解和数学思想方法的掌握，进而培养和提高学生的实际应用能力。

(3) 教材内容上突出实用性和专业性。本书涵盖了高等院校财经类、管理类及相关专业必要的数学基础，力求使学生系统地获得微积分、常微分方程、概率统计和数学建模的基础知识，必要的基础理论和常用的运算方法。通过学习，使学生得到基本数学方法的训练和运用这些方法去解决财经、管理中的实际问题，为学生学习财经类、

管理类各专业的后续课程和进一步扩展数学知识打下坚实的基础。

(4) 概念的引入、例题和习题设计科学、新颖。我们力图采用经济、管理类等专业有关的题目，注重数学在经济上的应用，体现经济数学的特点。

(5) 每章均有教学目标和自测题。每节后设有习题。书后附有全书习题的参考答案与解法提示。

由于编者水平有限，时间仓促，存在的不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2012 年 6 月

目　录

第1章　函数、极限及应用 ……………………………………………………………(1)
1.1　函数 ……………………………………………………………………………(1)
1.2　经济学中常见的函数 ………………………………………………………(10)
1.3　极限的概念 …………………………………………………………………(15)
1.4　极限的运算 …………………………………………………………………(20)
1.5　重要极限与无穷小的比较 …………………………………………………(24)
1.6　连续 …………………………………………………………………………(30)
1.7　应用提高 ……………………………………………………………………(36)
自测题一 ……………………………………………………………………………(40)
第2章　导数、微分及导数的应用 ………………………………………………(43)
2.1　导数的概念 …………………………………………………………………(43)
2.2　导数的运算 …………………………………………………………………(47)
2.3　微分 …………………………………………………………………………(51)
2.4　边际与弹性 …………………………………………………………………(54)
2.5　中值定理 ……………………………………………………………………(56)
2.6　洛必达法则 …………………………………………………………………(59)
2.7　函数的单调性与极值 ………………………………………………………(61)
2.8　曲线的凹凸与拐点 …………………………………………………………(67)
2.9　函数图像的描绘 ……………………………………………………………(69)
2.10　多元函数的微分 …………………………………………………………(71)
2.11　应用提高 …………………………………………………………………(76)
自测题二 ……………………………………………………………………………(81)
第3章　积分及其应用 ……………………………………………………………(84)
3.1　不定积分的概念及基本积分公式 …………………………………………(84)
3.2　定积分的概念与性质 ………………………………………………………(89)
3.3　定积分与不定积分的关系 …………………………………………………(95)
3.4　换元积分 ……………………………………………………………………(98)
3.5　分部积分与积分表的使用 …………………………………………………(105)
3.6　无限区间的广义积分 ………………………………………………………(108)

3.7 定积分的应用 …… (111)
3.8 应用提高 …… (117)
自测题三 …… (120)
第 4 章 常微分方程 …… (122)
4.1 微分方程的基本概念 …… (122)
4.2 一阶微分方程 …… (124)
4.3 可降阶的二阶微分方程 …… (129)
4.4 二阶常系数线性微分方程 …… (131)
4.5 微分方程的经济应用 …… (136)
4.6 应用提高 …… (137)
自测题四 …… (144)
第 5 章 概率统计基础 …… (146)
5.1 随机事件 …… (146)
5.2 随机事件的概率 …… (151)
5.3 条件概率与独立性 …… (157)
5.4 随机变量及其分布 …… (162)
5.5 随机变量的数字特征 …… (172)
5.6 样本及分布 …… (180)
*5.7 参数估计 …… (183)
*5.8 参数的假设检验 …… (186)
5.9 应用提高 …… (190)
自测题五 …… (195)
第六章 数学模型与数学实验 …… (199)
6.1 数学建模的概念 …… (199)
6.2 初等数学方法模型 …… (209)
6.3 优化模型 …… (215)
6.4 数列模型 …… (221)
6.5 微分方程模型 …… (230)
6.6 数学实验 …… (235)
6.7 应用提高 …… (237)
自测题六 …… (242)
参考答案 …… (243)
参考文献 …… (258)

第1章 函数、极限及应用

【教学目标】 理解函数的概念、特性，掌握基本初等函数的图像性质；理解分段函数、反函数、复合函数等概念；了解经济学中的常见函数；理解无穷小和无穷大的概念；掌握极限思想、极限概念、极限法则和求极限的方法；理解函数的连续性概念、性质；利用极限解决现实中的具体问题——复利与贴现.

函数是高等数学中最重要的概念之一，在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中，函数关系随处可见. 微积分学是以函数关系为研究对象的，极限是研究函数和解决各种问题的一种基本方法. 本章将首先从函数概念入手，进而讨论函数的极限、函数的连续性等基本概念及它们的一些性质和在经济中的应用.

1.1 函 数

在我们的周围，变化无处不在，可以用数学有效地描述它们的许多变化现象. 实际上，一个量的变化本身意味着这个量是随着其他的量的变化而变化的，而变量之间的依赖关系就是我们所说的函数关系.

1.1.1 函数的概念

1）函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 若对于每一个数 $x \in D$，按照某一确定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称 **y 是 x 的函数**，记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

式中，x 称为自变量，y 称为因变量；数集 D 称为该函数的定义域，是 x 的取值范围.

若一个函数仅用一个数学表达式表示，求函数的定义域通常是求使函数有意义的 x 的取值范围. 在解决实际问题时，还应结合实际情况来确定函数的定义域.

自变量取定义域内某一值时，因变量对应的值叫做函数值. 对于给定的函数 $y = f(x)$，当函数的定义域 D 确定后，按照对应法则 f，因变量的变化范围也随之确定. 函数值的集合叫做函数的**值域**，所以**定义域和对应法则就是确定一个函数的两个要素**. 两个

函数只有在它们的定义域和对应法则都相同时情况下才是相同的.

在上述函数的定义中,规定对于每个 $x \in D$,有且仅有唯一的一个 y 值与之对应的函数称为单值函数.若对于每个 $x \in D$,有 y 的多个值与之对应,则不符合我们上述函数的定义.我们把出现这种情况的函数称为**多值函数**.如果不加特别说明,所有函数都指单值函数.

邻域也是一个重要概念,在以后的学习中会经常遇到.所谓点 a 的 δ 邻域,是指以 a 为中心的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$.也就是说,设 a、δ 为两个实数,$\delta>0$,如果满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数,则称为**点 a 的 δ 邻域**.点 a 为该邻域的中心,δ 为邻域的半径.

若把邻域 $(a-\delta, a+\delta)$ 中的中心点 a 去掉,称为**点 a 的去心 δ 邻域**,可表示为 $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ 或 $0<|x-a|<\delta$.

为了简便,我们把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域,把开区间 $(a, a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

2)分段函数

常用的表示函数的方法有解析法(或称公式法)、列表法和图像法.其中,解析法比较普遍,它是借助于数学式子来表示对应法则的.通常一个函数的解析式是用一个式子来表示的,但有时会遇到一个函数必须用几个式子分别表示,我们把这种**对于自变量的不同取值范围,有不完全相同的对应法则的函数,称为分段函数**.

例如,$y=|x|=\begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$,$\quad f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x \leqslant 5 \\ 0 & x=0 \\ -1 & -5<x<0 \end{cases}$ 都是分段函数.

注意 ① 分段函数是一个函数,而不是几个函数;

② 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

【例题 1.1】 设 $f(x)=\begin{cases} x-2 & 1 \leqslant x<3 \\ x^2 & 3 \leqslant x<5 \end{cases}$,求 $f(x+1)$.

解
$$f(x+1)=\begin{cases} (x+1)-2 & 1 \leqslant x+1<3 \\ (x+1)^2 & 3 \leqslant x+1<5 \end{cases}$$
$$=\begin{cases} x-1 & 0 \leqslant x<2 \\ (x+1)^2 & 2 \leqslant x<4 \end{cases}.$$

【例题 1.2】 A、B 两地间的汽车运输,旅客携带行李按下列标准支付运费:不超过 10kg 的不收行李费;超过 10kg 而不超过 25kg 的部分,每公斤收运费 0.50 元;超过 25kg 而不超过 100kg 的部分,每公斤收运费 0.80 元.试列出运输行李的运费与行李的重量之间的函数关系式,写出定义域,并求出所带行李分别为 16kg 和 65kg 的甲、乙两名旅客各应支付多少运费?

解　设行李重量为 x kg,其运费为 y 元. 根据题意有:

当 $0 \leqslant x \leqslant 10$ 时,$y = 0$;

当 $10 < x \leqslant 25$ 时,$y = (x - 10) \times 0.5 = 0.5x - 5$;

当 $25 < x \leqslant 100$ 时,$y = 15 \times 0.5 + (x - 25) \times 0.8 = 0.8x - 12.5$.

故所求函数为:

$$y = f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0.5x - 5 & 10 < x \leqslant 25 \\ 0.8x - 12.5 & 25 < x \leqslant 100 \end{cases}.$$

其中,定义域为[0,100].

又　$f(16) = 0.5 \times 16 - 5 = 3$,　$f(65) = 0.8 \times 65 - 12.5 = 39.5$.

即甲和乙两旅客应分别支付运费 3.00 元和 39.50 元.

3) 显函数和隐函数

若函数中的因变量 y 用自变量 x 的表达式直接表示出来,这样的函数称为**显函数**.

有些函数的表达方式却不是这样,例如,方程 $x + y^3 - 1 = 0$ 表示一个函数,当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,y 都有唯一确定的值与之对应.

一般地,若两个变量 x、y 的函数关系用方程 $f(x,y) = 0$ 的形式表示,即将 x、y 的函数关系隐藏在方程里,这样的函数叫做**隐函数**.

有的隐函数,可以从方程 $f(x,y) = 0$ 中解出 y 来化为显函数,但有的隐函数化为显函数比较困难,甚至是不可能的. 例如,由方程 $xy - e^{x+y} = 0$ 确定的隐函数就不能化为显函数.

1.1.2　*函数的特性*

1) 单调性

设函数 $y = f(x); x \in (a,b)$,若对任意两点 x_1、$x_2 \in (a,b)$,当 $x_1 < x_2$ 时,总有:

(1) $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是**单调增加**的,区间 (a,b) 称为**单调增加区间**;

(2) $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是**单调减少**的,区间 (a,b) 称为**单调减少区间**.

单调增加的函数和单调减少的函数统称为**单调函数**,单调增加区间和单调减少区间统称为**单调区间**.

2) 有界性

设函数 $y = f(x), x \in D$,如果存在 $M > 0$,使得对任意 $x \in D$,均有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 D 内是有界的;如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 D 内是无界的.

例如,$y = \sin x$ 是有界函数,其中,对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$,均有 $|\sin x| \leqslant 1$;而

$y = x^2$ 是无界函数,因为 $y = x^2$ 在$(-\infty, +\infty)$上仅有下界.

3) 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域关于原点对称,如果对于定义域内的 x 都有:

(1) $f(-x) = -f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**;

(2) $f(-x) = f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称. 如果函数 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数,则称为非奇非偶函数.

例如,$y = \sin x$,$y = x$,对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 是奇函数; $y = \cos x$,$y = x^2$,对任意的$x \in (-\infty, +\infty)$ 是偶函数.

【例题 1.3】 判断函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解 根据题意可知,函数的定义域为 $x \in (-\infty, +\infty)$,又因为

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= \log_a[(-x) + \sqrt{(-x)^2+1}] = \log_a(\sqrt{x^2+1} - x) \\
&= \log_a \frac{(x^2+1) - x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})^{-1} \\
&= -\log_a(x + \sqrt{x^2+1}) = -f(x).
\end{aligned}
$$

所以函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

4) 周期性

设函数 $y = f(x)$,$x \in D$,如果存在常数 $T \neq 0$,对任意的 $x \in D$,$f(x+T) = f(x)$ 恒成立,则称函数 $y = f(x)$ 为**周期函数**;使上式成立的最小正数 T,称为函数 $y = f(x)$ 的**最小正周期**,简称**周期**.

例如,$y = \sin x$,$y = \cos x$ 的周期为 $T = 2\pi$;$y = \tan x$,$y = \cot x$ 的周期为 $T = \pi$;正弦型曲线函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期为 $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

1.1.3 初等函数

1) 反函数

在函数 $y = f(x)$ 中 x 为自变量,y 为因变量. 然而在同一过程中存在着函数关系的两个变量究竟哪一个是自变量,哪一个是因变量,并不是绝对的,要视问题的具体要求而定. 例如,在商品销售中,已知某商品的价格为 P,如果想从该商品的销售量Q来确定其销售收入 R,则 Q 是自变量,R 是因变量,其函数式为

$$R = PQ. \quad ①$$

相反地,要从该商品的销售收入R确定销售量Q,则R是自变量,Q是因变量,函数式为

$$Q = \frac{R}{P}. \quad ②$$

我们称函数②是①的反函数，或者说它们互为反函数.

定义 1.1.1　设函数 $y=f(x), x\in D, y\in Z$，若对于任意一个 $y\in Z$，D 中都有唯一确定的 x 与之对应，这时 x 是以 Z 为定义域的 y 的函数，称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y), y\in Z$.

在函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 表示函数. 但按照习惯，我们需对调函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x, y，把它改写成 $y=f^{-1}(x), x\in Z$.

若不特别说明，函数 $y=f(x)$ 的反函数都是这种改写后的 $y=f^{-1}(x), x\in Z$ 的形式.

函数 $y=f(x), x\in D$ 与 $y=f^{-1}(x), x\in Z$ 互为反函数，它们的定义域与值域互换.

在同一个直角坐标系下，$y=f(x), x\in D$ 与反函数 $y=f^{-1}(x), x\in Z$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例如，函数 $y=3x-2$ 与函数 $y=\dfrac{x+2}{3}$ 互为反函数，如图 1.1 所示，关于直线 $y=x$ 对称. 函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，它们的图形是关于直线 $y=x$ 对称，如图 1.2 所示.

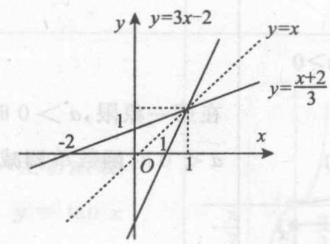


图 1.1

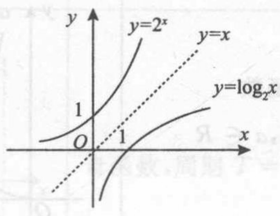


图 1.2

定理 1.1（反函数存在定理）　单调函数必有反函数，且单调增加（减少）的函数的反函数也是单调增加（减少）的.

求反函数可以按以下步骤进行：

(1) 从方程 $y=f(x)$ 中解出唯一的 x，并写成 $x=g(y)$；

(2) 将 $x=g(y)$ 中的字母 x, y 对调，得到函数 $y=g(x)$，这就是所求函数的反函数.

2) 复合函数

在经济管理活动和工程技术中，许多函数关系比较复杂. 例如，企业的产品利润 L 是产量 Q 的函数，如果产量 Q 与生产过程中各种要素投入量的总和 u 有关，可以通过生产函数 $Q=f(u)$ 表示出来，即 L 是 Q 的函数，而 Q 又是 u 的函数，也可以说，L 通过 Q 是 u 的函数，这种函数就是复合函数. 一般地，有以下定义：

定义 1.1.2　假如有两个函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$，与 x 对应的 u 值能使 $y=f(u)$ 有意义，将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$，得到函数 $y=f[\varphi(x)]$. 这个新函数 $y=f[\varphi(x)]$ 就是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 经过复合而成的**复合函数**，称 u 为中间变量.

例如，由 $y = f(u) = e^u$，$u = \varphi(x) = \cos x$ 可以复合成复合函数 $y = f[\varphi(x)] = e^{\cos x}$.

复合函数不仅可用两个函数复合而成，也可以由多个函数相继进行复合而成. 如由 $y = \sqrt{u}$，$u = \ln v$，$v = \sin x$ 可以复合成复合函数 $y = \sqrt{\ln \sin x}$.

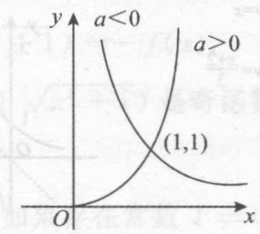
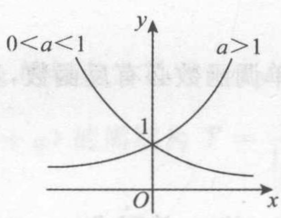
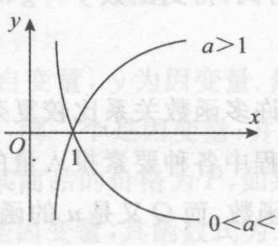
需要指出，**不是任何两个函数都能复合成复合函数**. 由定义易知，只有当 $u = \varphi(x)$ 的值域与 $y = f(u)$ 的定义域的交集非空时，这两个函数才能复合成函数. 例如，函数 $y = \ln u$ 和 $u = -x^2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $u = -x^2$ 的值域为 $(-\infty, 0]$，而 $y = \ln u$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，显然 $(-\infty, 0] \cap (0, +\infty) = \varnothing$，$y = \ln(-x^2)$ 无意义.

3) 基本初等函数

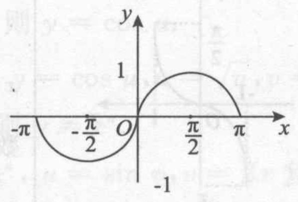
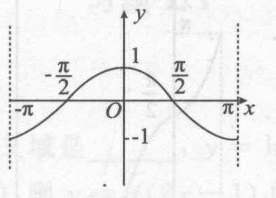
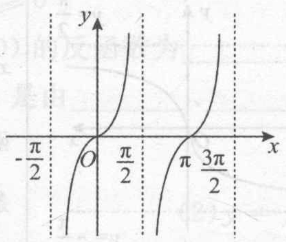
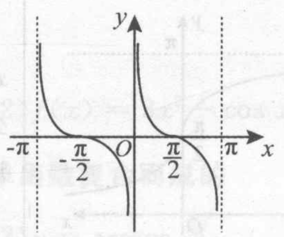
我们学过的六类函数：常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**.

为了便于应用，下面就其图像和性质作简要的复习，如表 1-1 所示.

表 1-1　基本初等函数及图像性质

序号	函　　数	图　　像	性　　质
1	幂函数 $y = x^a, a \in R$		在第一象限，$a > 0$ 时函数单调增加；$a < 0$ 时函数单调减少，都过点(1,1)
2	指数函数 $y = a^x$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$		$a > 1$ 时函数单调增加，$0 < a < 1$ 时函数单调减少. 都过(0,1)点，以 x 轴为渐近线
3	对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$		$a > 1$ 时函数单调增加；$0 < a < 1$ 时函数单调减少. 都过(1,0)点，以 y 轴为渐近线

(续表)

序号	函 数		图 像	性 质
4	三角函数	正弦函数 $y=\sin x$		奇函数,周期 $T=2\pi$,有界 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$
		余弦函数 $y=\cos x$		偶函数,周期 $T=2\pi$,有界 $\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$
		正切函数 $y=\tan x$		奇函数,周期 $T=\pi$,无界
		余切函数 $y=\cot x$		奇函数,周期 $T=\pi$,无界

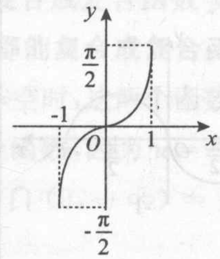
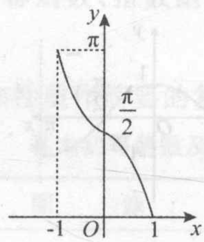
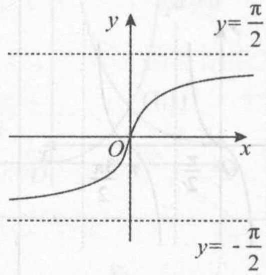
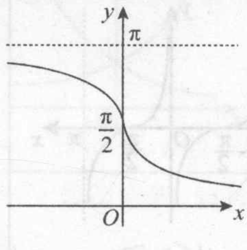
4) 初等函数

定义 1.1.3 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成的,并能用一个式子表示的函数,统称为初等函数.

为了研究需要,今后经常要将一个给定的初等函数看成由若干个简单函数经过四则运算或复合而成的形式.简单函数是指基本初等函数,或由基本初等函数经过有限次四则运算而成的函数.

【例题 1.4】 下列函数是由哪几个简单函数复合而成的.

（续表）

序号	函数		图像	性质
5	反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$		$x \in [-1,1]$，$y \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，奇函数，单调增加，有界
		反余弦函数 $y = \arccos x$		$x \in [-1,1]$，$y \in [0,\pi]$，单调减少，有界
		反正切函数 $y = \arctan x$		$x \in (-\infty,+\infty)$，$y \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 奇函数，单调增加，有界，$y = \pm\frac{\pi}{2}$ 为两条水平渐近线
		反余切函数 $y = \text{arccot}\, x$		$x \in (-\infty,+\infty)$，$y \in (0,\pi)$，单调减少，有界，$y = 0$，$y = \pi$ 为两条水平渐近线

4）初等函数

定义 1.1.3 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合所构成的，并能用一个式子表示的函数，统称为**初等函数**.

为了研究需要，今后经常要将一个给定的初等函数看成由若干个简单函数经过四则运算或复合而成的形式. 简单函数是指基本初等函数，或由基本初等函数经过有限次四则运算而成的函数.

【例题 1.4】 下列函数是由哪几个简单函数复合而成的.

(1) $y=\ln\sin x$；　(2) $y=\cos\sqrt{x+1}$；　(3) $y=e^{\sin 2x}$.

解　(1) 令 $u=\sin x$，则 $y=\ln u$.

所以 $y=\ln\sin x$，是由 $y=\ln u, u=\sin x$ 复合而成的.

(2) 令 $v=x+1, u=\sqrt{v}$，则 $y=\cos u$.

所以 $y=\cos\sqrt{x+1}$，是由 $y=\cos u, u=\sqrt{v}, v=x+1$ 复合而成的.

(3) 令 $v=2x, u=\sin v$，则 $y=e^u$.

所以 $y=e^{\sin 2x}$，是由 $y=e^u$，$u=\sin v, v=2x$ 复合而成的.

本课程研究的函数主要是初等函数，凡不是初等函数的其他函数，皆称为非初等函数.

习题 1.1

1) 填空题

(1) 函数 $y=\sqrt{2x+1}$ 的定义域是______，$y=\ln(x^2-4)$ 的定义域是______.

(2) 设 $y=f(x), x\in[1,3)$，则 $y=f(2x-1)$ 的定义域为______.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ 1-x & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $f(-2)=$______，$f[f(-2)]=$______.

(4) 函数 $y=1-x^2\ (x<0)$ 的反函数为______.

(5) 函数 $y=\ln(\arcsin e^x)$ 是由______、______、______复合而成的.

2) 求下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x^2-9}$；　(2) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；

(3) $y=\ln(1-x)+\sqrt{x+2}$；　(4) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$.

3) 确定下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=x^2\sin x$；　(2) $f(x)=3x^2-\cos x$；　(3) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

4) 下列函数是由哪几个简单函数复合而成的

(1) $y=\sin x^3$；　(2) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$；　(3) $y=\cos\sqrt{x}$；

(4) $y=\ln\tan 3x$；　(5) $y=\sin^2(1+2x)$；　(6) $y=(3+x+2x^2)^3$；

(7) $y=\sqrt{\ln 2x}$；　(8) $y=e^{-x^2}$；　(9) $y=\ln\ln\sin x$.

5) 求下列函数的反函数

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；　(2) $y=3+\ln(x+1)$；　(3) $y=\sqrt[3]{2x-1}$.

6) 计算题

一台机器的价值是 50 万元，如果每年的折旧率为 4.5%（即每年减少它的价值的 4.5%），经过 n 年后机器的价值是 Q 万元，试写出 Q 与 n 的函数关系式.

1.2 经济学中常见的函数

1.2.1 需求函数与供给函数

1) 需求函数

在经济学中,**需求**是指在一定价格条件下,消费者愿意并且有支付能力购买的商品的数量.消费者对某种商品的需求是由多种因素决定的,其中,商品的价格是影响需求的一个主要因素.假设其他条件不变(如消费者的收入、偏好及其他替代商品的价格等),把商品的需求量 Q 仅看成是其价格 P 的函数,这个函数就称为**需求函数**.记作:

$$Q=f(P),P\geqslant 0.$$

从需求的特征来看,需求函数一般是减函数:商品的价格低,则需求量大;商品的价格高,则需求量小.需求函数的图像,称为需求曲线,需求曲线是单调下降的.

常用的需求函数有如下几种:

(1) 线性函数

$$Q=a-bP \quad (a>0,b>0).$$

(2) 二次函数(抛物线形)

$$Q=a-bP-cP^2 \quad (a>0,b\geqslant 0,c>0).$$

(3) 指数函数

$$Q=Ae^{-bP} \quad (A>0,b>0).$$

对具体问题,可根据实际情况确定需求函数的类型及其中的参数.

在经济学中,需求函数常以反函数的形式 $P=f^{-1}(Q)$ 给出,需求函数的反函数也称为需求函数,有时也称为价格函数.

【例题 1.5】 市场上销售的某种衬衫的件数 Q 是价格 P 的线性函数.当价格 P 为 50 元一件时可售出 1 500 件;当价格 P 为 60 元一件时,可售出 1 200 件,试确定需求函数和价格函数.

解 设需求线性函数为 $Q=a-bP \quad (a>0,b>0)$.

根据题意,有

$$\begin{cases}1\,500=a-50b\\1\,200=a-60b\end{cases},\text{解之得 } a=3\,000,b=30.$$

于是所求需求函数为 $Q=3\,000-30P.$

从而得其价格函数为 $P=100-\dfrac{Q}{30}.$

2) 供给函数

在经济学中,**供给**是指在一定价格条件下,商品生产者或企业愿意并能够出售的商品数量.供给也是由多种因素决定的,其中,最主要的也是商品的自身价格.因此,在分析