



# 重难点手册

新课标

## 高中数学

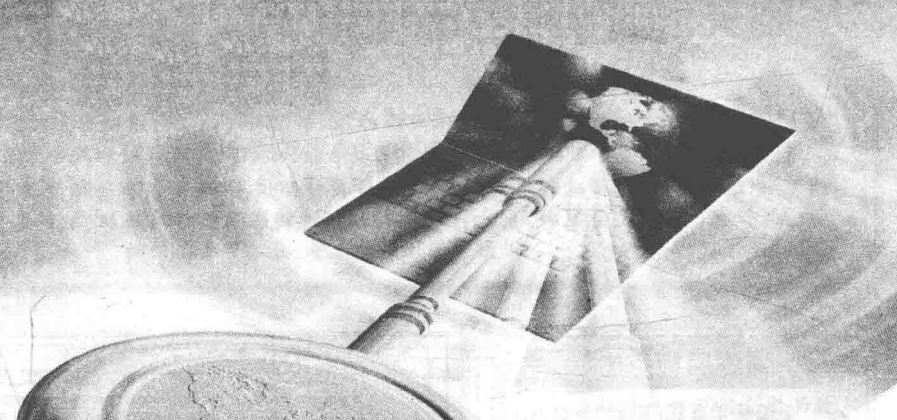
选修 2-1

蔡上鹤 主审

汪江松 主编

- ★四千万学子的制胜宝典
- ★八省市名师的在线课堂
- ★十八年书业的畅销品牌

配人教A版



# 重难点手册

配人教A版

数学  
2-1

|     |     |
|-----|-----|
| 主 审 | 蔡上鹤 |
| 主 编 | 汪江松 |

★十八年书业的畅销品牌  
四千万学子的  
八省市名师的



华中师范大学出版社

# 新出图证(鄂)字 10 号

## 图书在版编目(CIP)数据

重难点手册——高中数学选修 2-1(配人教 A 版)/汪江松 主编. —3 版.

—武汉:华中师范大学出版社,2010.8(2010.9 重印)

ISBN 978-7-5622-4211-6

I. ① 重… II. ① 汪… III. ① 数学课—高中—教学参考资料

IV. ① G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 044497 号

## 重难点手册——高中数学选修 2-1(配人教 A 版)

主编:汪江松

责任编辑:胡小雪 涂庆

责任校对:罗艺

封面设计:新视点

选题设计:第一编辑室(027—67867361)

出版发行:华中师范大学出版社 ©

社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号

邮编:430079

销售电话:027—67863040

027—67867371

027—67867076

传真:027—67863291

邮购:027—67861321

网址:<http://www.ccnpublish.com>

电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn

印刷:武汉市新华印刷有限责任公司

督印:章光琼

字数:368 千字

开本:880mm×1230mm 1/32

印张:11.5

版次:2010 年 8 月第 3 版

印次:2010 年 9 月第 2 次印刷

定价:18.80 元

欢迎上网查询、购书

敬告读者:为维护著作人的合法权益,并保障读者的切身利益,本书封面采用压纹制作,压有“华中师范大学出版社”字样及社标,请鉴别真伪。若发现盗版书,请打举报电话 027—67861321。

## 体例特色与使用说明

- **新课标:** 贯彻新课标精神,定位新课标“三维”目标,贴近新课标高考大纲要求,注重学习规律和考试规律的整合,全面提升考试成绩和综合素质。
- **大突破:** 突破传统的单向学习模式,将教材知识、拓展知识和隐性方法类知识植入新课堂,立体凸现学科知识结构和解题方法规律,破解高考“分”瓶颈。

课程目标点击

全面展示每课(节)的“知识与技能、过程与方法以及情感态度与价值观”三位一体的目标要求,使同学们明确努力的方向和应达到的程度,便于自我评价和相互评价。

## 重点难点突破

把握学生思维情感的发展脉络,恰到好处地指出每课(节)的重点、难点与疑点,各个击破,扫清学生学习中的一切障碍,全力提高学生的学习效率。

## 方法技巧点拨

精选典型例题,通透讲解,并从中总结解题方法与技巧,点拨解题规律,启发学生思维,使学生深刻透彻地把握知识结构,培养学生灵活运用知识的能力。

### 高考真题链接

多角度深入剖析各类高考试题,加深学生对所学知识的理解,激发学生深入探究学习的兴趣。

## 第一章

## 常用逻辑用语

### 命題及其關係

### 1.1.1 命題

[课程目标点击](#)

1. 了解命题的概念, 会用两个条件判断一个语句是否是命题.
2. 能正确指出已知命题的条件和结论, 会将已知命题写成“若  $p$ , 则  $q$ ”的形式.
3. 会判断一些简单命题的真假, 并能举出用举反例的方法来判断某命题为假命题.

### 重点难点突破

1. 命题。我们使用语言、符号表示了表达的, 可以判断真假的陈述句叫做命题。其中判断为真的语句叫做真命题, 判断为假的语句叫做假命题。
- 注意 命题通常用大写字母表示, 如  $p$ 、 $q$  等。命题也可以表示为“若  $p$ , 则  $q$ ”的形式。
- 例 1 判断下列语句是否为命题, 若是命题, 指出是真命题还是假命题。
- (1)  $2 + 2 = 4$  (2)  $3 > 4$  (3)  $x + 1 = 2$  (4)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (5)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (6)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (7)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (8)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (9)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (10)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (11)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (12)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (13)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (14)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (15)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (16)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (17)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (18)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (19)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (20)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (21)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (22)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (23)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (24)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (25)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (26)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (27)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (28)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (29)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (30)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (31)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (32)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (33)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (34)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (35)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (36)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (37)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (38)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (39)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (40)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (41)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (42)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (43)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (44)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (45)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (46)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (47)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (48)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (49)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (50)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (51)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (52)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (53)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (54)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (55)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (56)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (57)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (58)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (59)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (60)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (61)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (62)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (63)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (64)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (65)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (66)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (67)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (68)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (69)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (70)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (71)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (72)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (73)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (74)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (75)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (76)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (77)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (78)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (79)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (80)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (81)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (82)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (83)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (84)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (85)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (86)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (87)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (88)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (89)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (90)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (91)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (92)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (93)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (94)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (95)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (96)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (97)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (98)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (99)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (100)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (101)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (102)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (103)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (104)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (105)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (106)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (107)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (108)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (109)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (110)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (111)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (112)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (113)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (114)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (115)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (116)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (117)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (118)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (119)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (120)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (121)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (122)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (123)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (124)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (125)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (126)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (127)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (128)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (129)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (130)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (131)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (132)  $x + 1 = 2$  且  $x + 1 = 3$  (133)  $x + 1 = 2$  且  $x +$

### 方法技巧点拨

1. 判断命题真假的常用方法  
(1) 逆推验证法  
例 1 (2005 · 天津) 给出下列三个命题:  
① 若  $a > b > -1$ , 则  $\frac{1}{a+b} \geq \frac{b}{a}$   
② 若正整数  $m$  和  $n$  满足  $m < n$ , 则  $\sqrt{m^2 + n^2} = m + n$   
③ 设  $P_1(x_1, y_1)$  为圆  $C: x^2 + y^2 = 9$  上任一点, 点  $Q(a, b)$  为圆  $C$  外一点, 当  $C_1: (x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$  时, 圆  $C_1$  与圆  $C$  相切.  
其中真命题的个数为 ( )  
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 【思维启迪】** 从命题进行验证. ① 逆用比较实数大小的基本方法, 即取差与零的大小, 判定  $\frac{1}{a+b}$  与  $\frac{b}{a}$  的关系.

高考真题链接

- 【例 1】** (2007·北京文) 对于函数: ①  $f(x) = (x+2)^2$ ; ②  $f(x) = (x-2)^2$ ; ③  $f(x) = \cos(x-2)$ , 判断以下两个命题的真假:
- 命题甲:  $f(x+2)$  是偶函数;  
命题乙:  $f(x)$  在  $(-2, 2)$  上是减函数, 在  $(2, +\infty)$  上是增函数.
- 能使命题甲、乙均为真的函数  $f(x)$  的序号是 \_\_\_\_\_.
- (A) ① (B) ② (C) ③ (D) ①②
- 【命题意图】** 考查正弦函数与余弦函数的性质.
- 【解析】** ① 中  $f(x+2) = (x+2)^2$  不是偶函数, 不满足命题甲, 排除 A、B; 对于②,  $f(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$  是偶函数, 满足命题甲, 又  $f(x-2) = x^2$ , 当  $x < 2$  时为减函数, 当  $x > 2$  时为增函数, 满足命题乙.
- ③ 中  $f(x) = \cos(x-2)$ , 显然不满足命题乙, 排除 C.
- 【答案】** D



## 《数学重难点手册》编委会

|     |     |     |     |     |  |
|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| 主 编 | 汪江松 |     |     |     |  |
| 编 者 | 汪江松 | 刘 芸 | 黄立俊 | 谢志庆 |  |
|     | 田祥高 | 刘元利 | 齐凤玲 | 方牧丹 |  |
|     | 甘大旺 | 杨志明 | 柯红兵 | 蔡有缘 |  |
|     | 汪 丹 | 胡燕丽 | 陈留闯 | 周 鹏 |  |
|     | 徐 斌 | 袁 雯 |     |     |  |

# 目 录

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| 第一章 常用逻辑用语 .....         | (1)   |
| 1.1 命题及其关系 .....         | (1)   |
| 1.1.1 命题 .....           | (1)   |
| 1.1.2 四种命题及其相互关系 .....   | (11)  |
| 1.2 充分条件与必要条件 .....      | (19)  |
| 1.3 简单的逻辑联结词 .....       | (34)  |
| 1.4 全称量词与存在量词 .....      | (43)  |
| 1.4.1 全称量词 .....         | (43)  |
| 1.4.2 存在量词 .....         | (50)  |
| 1.4.3 含有一个量词的命题的否定 ..... | (59)  |
| 第一章综合评价 .....            | (66)  |
| 第二章 圆锥曲线与方程 .....        | (69)  |
| 2.1 曲线与方程 .....          | (69)  |
| 2.1.1 曲线与方程 .....        | (69)  |
| 2.1.2 求曲线的方程 .....       | (75)  |
| 2.2 椭圆 .....             | (85)  |
| 2.2.1 椭圆及其标准方程 .....     | (85)  |
| 2.2.2 椭圆的简单几何性质 .....    | (97)  |
| 2.3 双曲线 .....            | (116) |
| 2.3.1 双曲线及其标准方程 .....    | (116) |
| 2.3.2 双曲线的简单几何性质 .....   | (132) |
| 2.4 抛物线 .....            | (151) |
| 2.4.1 抛物线及其标准方程 .....    | (151) |
| 2.4.2 抛物线的简单几何性质 .....   | (164) |
| 第二章综合评价 .....            | (184) |



|                              |       |
|------------------------------|-------|
| 第三章 空间向量与立体几何 .....          | (188) |
| 3.1 空间向量及其运算 .....           | (188) |
| 3.1.1 空间向量及其加减运算 .....       | (188) |
| 3.1.2 空间向量的数乘运算 .....        | (194) |
| 3.1.3 空间向量的数量积运算 .....       | (203) |
| 3.1.4 空间向量的正交分解及其坐标表示 .....  | (211) |
| 3.1.5 空间向量运算的坐标表示 .....      | (219) |
| 3.2 立体几何中的向量方法 .....         | (229) |
| 3.2.1 直线、平面的位置关系的向量判定法 ..... | (229) |
| 3.2.2 空间角的计算 .....           | (242) |
| 3.2.3 空间距离的计算 .....          | (260) |
| 第三章综合评价 .....                | (278) |
| 答案详解与提示 .....                | (282) |



# 第一章

## 常用逻辑用语



### 命题及其关系

#### 1.1.1 命题



#### 课程目标点击

1. 了解命题的概念,会用两个条件判断一个语句是否是命题.
2. 能正确指出已知命题的条件和结论,会将已知命题写成“若  $p$ , 则  $q$ ”的形式.
3. 会判断一些简单命题的真假,并能掌握用举反例的方法来判断某一命题为假命题.



#### 重点难点突破

##### 1. 命题

一般地,我们把用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫做命题.其中判断为真的语句叫做真命题,判断为假的语句叫做假命题.

**注意** 命题通常用陈述句来表述,而不能以疑问句、祈使句和感叹句的形式出现.如“ $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上是奇函数吗?”、“证明: $\sin 2x + 1 = (\sin x + \cos x)^2$ ”、“五角星中的黄金比真多啊!”都不是命题.

命题的正确与否,要看它是否与客观事实相符合.判断数学命题的正确与否,常用逻辑推理来推证,或举出反例予以否定.

## 方法总结

判断一个语句是不是命题,就是要看它是否符合“是陈述句”和“可以判断真假”这两个条件.

### 2. 命题的形式

数学中的命题通常可以表述成“若 $p$ ,则 $q$ ”的形式,也可以写成“如果 $p$ ,那么 $q$ ”,“只要 $p$ ,就有 $q$ ”等形式.其中 $p$ 叫做命题的条件, $q$ 叫做命题的结论.

对于一般的数学命题,其条件和结论通常比较好区分,但对有些数学命题,特别是简缩了的数学命题,通常其条件与结论并不那么分明,我们应该把它适当改写,就可以写成“若 $p$ ,则 $q$ ”的形式.

例如,“对顶角相等”,可改写成“如果两个角是对顶角,那么这两个角相等”.

又如,“平行于同一平面的两个平面平行”,可改写为“如果两个平面平行于同一个平面,那么这两个平面平行”.

**注意** 科学猜想也是命题.例如:

哥德巴赫猜想:每一个不小于6的偶数都可以表示为两个奇素数之和.

寿命猜想:人类的正常寿命是200岁.

这样的表述也是命题,因为这类猜想首先是陈述句,其次它的真假随着时间的推移和科学的发展,总是可以确定的.



## 方法技巧点拨

### 1. 判断命题真假的常用方法

#### (1) 逻辑推证法

**例1** (2005·天津) 给出下列三个命题:

① 若 $a \geq b > -1$ , 则 $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$ ;

② 若正整数 $m$ 和 $n$ 满足 $m \leq n$ , 则 $\sqrt{m(n-m)} \leq \frac{n}{2}$ ;

③ 设 $P_1(x_1, y_1)$ 为圆 $O_1: x^2 + y^2 = 9$ 上任一点, 圆 $O_2$ 以 $Q(a, b)$ 为圆心且半径为1, 当 $(a-x_1)^2 + (b-y_1)^2 = 1$ 时, 圆 $O_1$ 与圆 $O_2$ 相切.

其中假命题的个数为( ).

(A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 3

**思路点拨** 从正面进行逻辑推证. ①运用比较实数大小的基本方法; ②运用基本不等式; ③注意点 $P_1$ 与 $\odot O_2$ 的关系.

**【解】** ① 方法1  $\because a \geq b > -1, \therefore a+1 \geq b+1 > 0.$

$$\therefore \frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} = \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} \geq 0, \therefore \frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$$

方法2  $\because f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$  在  $(-1, +\infty)$  上为增函数,

$\therefore$  当  $a \geq b > -1$  时,  $f(a) \geq f(b)$ , 即  $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$ .

故①为真命题.

② 因为正整数  $m, n$  满足  $m \leq n$ , 有  $m > 0, n-m \geq 0$ ,

由均值不等式有  $\sqrt{m(n-m)} \leq \frac{m+(n-m)}{2} = \frac{n}{2}$ . 故②为真命题.

③ 的实质是  $P_1(x_1, y_1)$  在  $\odot O_1$  上, 又  $P_1(x_1, y_1)$  也在  $\odot O_2$  上, 但两圆相交于  $P_1$  并不能保证两圆相切. 故③为假命题.

**答案** B

## (2) 举反例判定假命题

**例2** (2006·湖北,文) 关于直线  $m, n$  与平面  $\alpha, \beta$ , 有下列四个命题:

① 若  $m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ , 且  $\alpha \parallel \beta$ , 则  $m \parallel n$ ;

② 若  $m \perp \alpha, n \perp \beta$ , 且  $\alpha \perp \beta$ , 则  $m \perp n$ ;

③ 若  $m \perp \alpha, n \parallel \beta$ , 且  $\alpha \parallel \beta$ , 则  $m \perp n$ ;

④ 若  $m \parallel \alpha, n \perp \beta$ , 且  $\alpha \perp \beta$ , 则  $m \parallel n$ .

其中真命题的序号是( ).

(A) ①②

(B) ③④

(C) ①④

(D) ②③

**思路点拨**

利用正方体中的线面关系, 常可依“实物”的直观性举反例, 使线面关系一目了然.

**【解】** 如图 1-1-1,  $\alpha, \beta$  为正方体的上、下底面, 显然图中的  $m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ , 且  $\alpha \parallel \beta$ , 但  $m \nparallel n$ , 故①为假命题, 可排除 A、C 两选项.

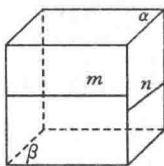


图 1-1-1

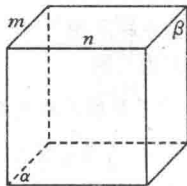


图 1-1-2

对于命题④, 如图 1-1-2,  $\alpha$  为正方体的下底面,  $\beta$  为侧面. 显然图中的  $m \parallel \alpha$ ,  $n \perp \beta$ , 且  $\alpha \perp \beta$ , 但  $m \nparallel n$ , 故④为假命题, 又排除 B.

**答案** D



### (3)综合使用两种方法

**例 3** (2010·哈尔滨市高三质量检测题)下列命题中,真命题的序号为\_\_\_\_\_(写出所有真命题的序号).

- ① 实数  $a, b$  满足  $|a| < 2, |b| < 1$ , 则  $|a-b| < 1$ ;
- ② 若数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = 1 - (-1)^n$ , 则数列  $\{a_n\}$  是等比数列;
- ③ 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$ , 对任意  $x \in \mathbf{R}$  有  $f(x+1) = f(x-1)$ , 则函数  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称;
- ④ 函数  $y = \sin\left(\frac{5}{2}\pi - 2x\right)$  是偶函数.

**思路点拨** 综合运用函数、三角函数、数列的知识进行判断,既可用直接推证的方法,也可用举反例的方法.

**【解】** ① 若令  $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$ , 均满足条件, 但  $|a-b| = \left|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right| = 1$ , 故①为假命题;

②  $a_n = S_n - S_{n-1} = [1 - (-1)^n] - [1 - (-1)^{n-1}] = 2(-1)^{n-1}$ , 又  $a_1 = S_1 = 2$ , 知  $\{a_n\}$  是以 2 为首项, -1 为公比的等比数列, 故②为真命题;

③ 由  $f(x+1) = f(x-1)$  可得  $f(x) = f(x+2)$ , 即函数  $y = f(x)$  是以 2 为周期的函数, 其图象不一定关于直线  $x=1$  对称, 故③为假命题;

④ 由诱导公式知  $y = \sin\left(\frac{5}{2}\pi - 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 2x$ , 为偶函数, 故④为真命题.

**答案** ②④.

### 2. 将命题改写成“若 $p$ , 则 $q$ ”的形式

(1) 对于简缩命题, 先还原, 再改写

**例 4** 将下列命题改写成“若  $p$ , 则  $q$ ”的形式, 并判断命题的真假:

- (1) 到线段两端点距离相等的点在线段的垂直平分线上;
- (2) 实数的平方为正数.

**思路点拨** 对于简缩后的数学命题, 首先分析简缩了什么, 其次再分清条件与结论, 然后用清晰流畅的语句写成“若  $p$ , 则  $q$ ”的形式, 最后还需要判断其真假.

**【解】** (1) 若一个点到已知线段两个端点的距离相等, 则这个点在这条线段的垂直平分线上. 此命题为真命题.

(2) 若一个数为实数, 则它的平方是正数. 此命题为假命题, 因为  $0^2 = 0$ .

(2) 当文字语言不便表述时, 可改为数学语言表述

**例 5** 将下列命题改写成“若  $p$ , 则  $q$ ”的形式:

(1) 三角形两边之和大于第三边;

(2) 实数的平方非负.

**【解】** (1) 若  $a, b, c$  为三角形的三边之长, 则  $a+b>c, b+c>a$  且  $c+a>b$ .

(2) 若  $a \in \mathbf{R}$ , 则  $a^2 \geq 0$ .



## 高考真题链接

**例 1** (2007 · 北京, 文) 对于函数: ①  $f(x) = |x+2|$ , ②  $f(x) = (x-2)^2$ , ③  $f(x) = \cos(x-2)$ , 判断如下两个命题的真假:

命题甲:  $f(x+2)$  是偶函数;

命题乙:  $f(x)$  在  $(-\infty, 2)$  上是减函数, 在  $(2, +\infty)$  上是增函数.

能使命题甲、乙均为真的所有函数的序号是( ).

(A) ①②

(B) ①③

(C) ②

(D) ③

**思路点拨** 可以正面推理与反面排除相结合.

**【解】** ① 中  $f(x+2) = |4+x|$  不是偶函数, 不满足命题甲, 排除 A、B;

对于②,  $f(x+2) = (x+2-2)^2 = x^2$  是偶函数, 满足命题甲; 又  $f(x) = (x-2)^2$ , 当  $x < 2$  时为减函数, 当  $x > 2$  时为增函数, 满足命题乙.

③ 中  $f(x) = \cos(x-2)$ , 显然不满足命题乙, 排除 D.

**答案** C

**例 2** (2006 · 江西, 文) 如果四棱锥的四条侧棱都相等, 就称它为“等腰四棱锥”, 四条侧棱称为它的腰, 以下四个命题中, 假命题是( ).

(A) 等腰四棱锥的腰与底面所成的角都相等

(B) 等腰四棱锥的侧面与底面所成的二面角都相等或互补

(C) 等腰四棱锥的底面四边形必存在外接圆

(D) 等腰四棱锥的各顶点必在同一球面上

**思路点拨** 依“等腰四棱锥”的定义运用逻辑推证的方法先筛选出真命题.

**【解】** 如图 1-1-3 所示, 四棱锥  $P-ABCD$  为等腰四棱锥, 即  $PA=PB=PC=PD$ .

设  $P$  在底面  $ABCD$  上的投影为  $O$ , 则

$$AO=BO=CO=DO.$$

故 A、C 显然为真命题.

在平面  $PBO$  上作  $PB$  的垂直平分线交  $PO$  于点  $O'$ , 则

$$PO' = BO'.$$

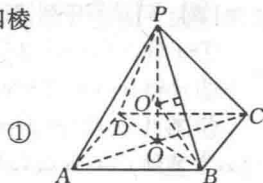


图 1-1-3

又依①知  $AO' = BO' = CO' = DO' = PO'$ .

故 D 为真命题.

**答案** B

**例 3** (2009 · 江西) 如图 1-1-4, 正四面体  $ABCD$  的顶点  $A, B, C$  分别在两两垂直的三条射线  $Ox, Oy, Oz$  上, 则在下列命题中, 错误的为 ( ).

- (A)  $O-ABC$  是正三棱锥
- (B) 直线  $OB \parallel$  平面  $ACD$
- (C) 直线  $AD$  与  $OB$  所成的角是  $45^\circ$
- (D) 二面角  $D-OB-A$  为  $45^\circ$

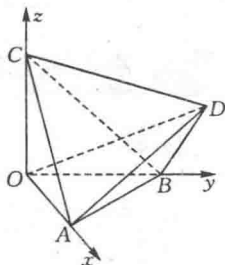


图 1-1-4

**思路点拨** 由顶点  $A, B, C$  分别在两两垂直的三条

射线上, 不难联想将正四面体补形为正方体, 再来逐一考查各命题.

**【解】** 如图 1-1-5, 以正四面体的棱为面对角线构造正方体, 显然 A 正确;

由  $OB \parallel AE$  知 C 正确;

又  $AE \cap$  平面  $ACD = A$ , 且  $AE$  不在平面  $ACD$  上, 所以  $OB$  与平面  $ACD$  也相交, B 错.

**答案** B

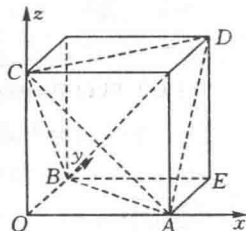


图 1-1-5

**例 4** (2005 · 福建) 把下面不完整的命题补充完整, 并使之成为真命题.

若函数  $f(x) = 3 + \log_2 x$  的图像与  $g(x)$  的图像关于 \_\_\_\_\_ 对称, 则函数  $g(x) =$  \_\_\_\_\_. (注: 填上你认为可以成为真命题的一种情形即可, 不必考虑所有可能的情形)

**思路点拨** 本题为开放性试题, 答案不唯一, 主要用函数  $f(x)$  的图像关于坐标轴或坐标原点或某条直线对称的数形结合思想来处理.

**【解】** 可填写下列情形中的一种:

- ①  $x$  轴,  $g(x) = -3 - \log_2 x$ ;
- ②  $y$  轴,  $g(x) = 3 + \log_2(-x)$ ;
- ③ 直线  $y = x$ ,  $g(x) = 2^{x-3}$ ;
- ④ 直线  $y = -x$ ,  $g(x) = -2^{-x-3}$ ;
- ⑤ 坐标原点,  $g(x) = -3 - \log_2(-x)$ .

**例 5** (2008 · 江西) 如图 1-1-6(1), 一个正四棱柱形的密封容器水平放置, 其底部镶嵌了同底的正四棱锥形实心装饰块, 容器内盛有  $a$  升水时, 水面恰好

经过正四棱锥的顶点  $P$ . 如果将容器倒置, 水面也恰好经过点  $P$  (如图 1-1-6(2)). 有下列四个命题:

(A) 正四棱锥的高等于正四棱柱高的一半;

(B) 将容器侧面水平放置时, 水面也恰好经过点  $P$ ;

(C) 任意摆放该容器, 当水面静止时, 水面都恰好经过点  $P$ ;

(D) 若往容器内再注入  $a$  升水, 则容器恰好能装满.

其中真命题的代号是\_\_\_\_\_ (写出所有真命题的代号).

**思路点拨** 本题主要涉及组合体的体积计算, 具体方法是设参数推理来进行验证.

**【解】** 设正四棱锥的高为  $h$ , 四棱柱的高为  $H$ , 底面正方形的边长为  $c$ .

图 1-1-6(1) 中,  $a = c^2 h - \frac{1}{3} c^2 h = \frac{2}{3} c^2 h$ ;

图 1-1-6(2) 中,  $a = c^2 (H - h)$ .

依  $c^2 (H - h) = \frac{2}{3} c^2 h$  得  $H = \frac{5}{3} h$ , 故排除 A.

假设 B 成立, 此时水面的高度为  $\frac{1}{2} c$ , 水的体积为

$$\frac{5}{3} hc \cdot \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} c^2 h = \frac{2}{3} c^2 h = a,$$

故 B 正确.

若往容器中再注入  $a$  升水, 容器恰好装满, 则  $2 \times \frac{2}{3} c^2 h + \frac{1}{3} c^2 h = c^2 H$ , 得  $H = \frac{5}{3} h$ . 这说明 D 正确.

假设 C 正确, 当水面与正四棱柱的一个侧面重合时, 经计算知水的体积为  $\frac{25}{36} c^2 h > \frac{2}{3} c^2 h$ , 产生矛盾, 故 C 不正确.

**答案** B、D.

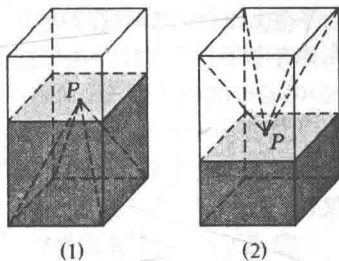


图 1-1-6

## 探究创新拓展

**例 1** (2006 · 上海) 如图 1-1-7, 平面中两条直线  $l_1$  和  $l_2$  相交于点  $O$ . 对

于平面上任意一点  $M$ , 若  $p, q$  分别是  $M$  到直线  $l_1$  和  $l_2$  的距离, 则称有序非负实数对  $(p, q)$  是点  $M$  的“距离坐标”. 已知常数  $p \geq 0, q \geq 0$ , 给出下列三个命题:

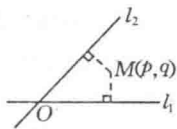


图 1-1-7

① 若  $p=q=0$ , 则“距离坐标”为  $(0, 0)$  的点有且仅有 1 个;

② 若  $pq=0$ , 且  $p+q \neq 0$ , 则“距离坐标”为  $(p, q)$  的点有且仅有 2 个;

③ 若  $pq \neq 0$ , 则“距离坐标”为  $(p, q)$  的点有且仅有 4 个.

上述命题中, 正确命题的个数是( ).

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

**思路点拨** 注意理解“斜坐标系”中“距离坐标”的定义, 然后逐一考查.

**【解】** ① 若  $p=q=0$ , 则“距离坐标”为  $(0, 0)$  的只有点  $O$ , 故①正确;

② 若  $pq=0$ , 且  $p+q \neq 0$  的点有无穷多, 它们是直线  $l_1$  与  $l_2$  除去点  $O$  的点, 故②不正确;

③ 若  $pq \neq 0$ , 又  $p \geq 0, q \geq 0$ , 则“距离坐标”为  $(p, q)$  的点有且仅有 4 个, 这 4 个点分居两直线  $l_1, l_2$  相交所成的 4 个角的内部, 且两两关于点  $O$  对称, 故③正确.

**答案** C

**例 2** (2009 · 江西) 设直线系  $M: x \cos \theta + (y-2) \sin \theta = 1 (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ , 对于下列四个命题:

(A)  $M$  中所有直线均经过一个定点;

(B) 存在定点  $P$  不在  $M$  中的任一条直线上;

(C) 对于任意整数  $n (n \geq 3)$ , 存在正  $n$  边形, 其所有边均在  $M$  中的直线上;

(D)  $M$  中的直线所能围成的正三角形面积都相等.

其中真命题的代号是\_\_\_\_\_ (写出所有真命题的代号).

**思路点拨** 过点  $A(\cos \theta, \sin \theta + 2)$  作圆  $x^2 + (y-2)^2 = 1$  的切线, 方程为  $x \cos \theta + (y-2) \sin \theta = 1$ , 切点  $A$  是以  $(0, 2)$  为圆心, 1 为半径的圆.

**【解】** 依切点  $A(\cos \theta, \sin \theta + 2)$  的游动性知切线  $M$  不过定点 (也可以分别令  $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$  得三直线, 知三线不共点), A 错;

显然, 点  $(0, 2)$  不在切线  $M$  上, B 正确;

对任意整数  $n (n \geq 3)$ , 作图  $x^2 + (y-2)^2 = 1$  的正  $n$  边形, 这  $n$  条边均为直线系  $M$  中的直线, C 正确;

这些能围成正三角形的三条直线中, 圆  $x^2 +$

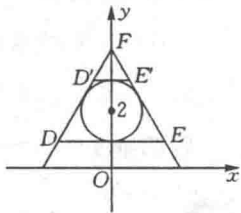


图 1-1-8

$(y-2)^2=1$ 可以是正三角形  $FDE$  的内切圆,也可以是正三角形  $FD'E'$  的旁切圆(该圆与正三角形三边相切,但在正三角形的一旁),如图 1-1-8 所示,D 错.

**答案** B、C.



### 三级题型测训

#### I 夯实基础

1. 给出下列语句:

- |                                      |               |
|--------------------------------------|---------------|
| ① 太阳是绕着地球转的;                         | ② H1N1 是禽流感吗? |
| ③ $\{1,2,3\} \subseteq \mathbf{R}$ ; | ④ $ x+a $ ;   |
| ⑤ $a+2\sqrt{3}$ 是有理数;                | ⑥ 奇数的偶次方是偶数.  |

其中命题的个数是( ).

- (A) 2                      (B) 3                      (C) 4                      (D) 5

2. (2008 · 安徽) 已知  $m, n$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta, \gamma$  是三个不同的平面, 下列命题正确的是( ).

- (A) 若  $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$ , 则  $m \parallel n$   
 (B) 若  $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ , 则  $\alpha \parallel \beta$   
 (C) 若  $m \parallel \alpha, m \parallel \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$   
 (D) 若  $m \perp \alpha, n \perp \alpha$ , 则  $m \parallel n$

3. 若  $A, B$  是两个集合, 则下列命题中是真命题的是( ).

- (A) 若  $A \subseteq B$ , 则  $A \cap B = A$                       (B) 若  $A \cap B = B$ , 则  $A \subseteq B$   
 (C) 若  $A \subseteq B$ , 则  $A \cup B = A$                       (D) 若  $A \cup B = B$ , 则  $B \subseteq A$

4. (2009 · 广东) 给定下列四个命题:

- ① 若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行, 那么这两个平面相互平行;  
 ② 若一个平面经过另一个平面的垂线, 那么这两个平面相互垂直;  
 ③ 垂直于同一直线的两条直线相互平行;  
 ④ 若两个平面垂直, 那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直.

其中为真命题的是( ).

- (A) ①和②                      (B) ②和③  
 (C) ③和④                      (D) ②和④

5. (2005 · 辽宁) 已知  $m, n$  是两条不重合的直线,  $\alpha, \beta, \gamma$  是三个两两不重合的平面, 给出下列四个命题:

- ① 若  $m \perp \alpha, m \perp \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$ ;