



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

国家理科基地教材

解析几何教程

(第三版)

廖华奎 王宝富 编著



科学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
国家理科基地教材

解析几何教程

(第三版)

廖华奎 王宝富 编著

2002 年全国普通高等学校优秀教材二等奖
国家理科基地创建名牌课程项目资助

科学出版社

北京

内 容 简 介

本教材作为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材之一,是在“十一五”国家级规划教材和四川大学数学学院各专业多年讲授解析几何课程的基础上形成并修订的. 主要内容包括向量代数,直线与平面,常见曲面,二次曲线和二次曲面,正交变换和仿射变换,平面射影几何简介,球面几何与双曲几何初步的专题讨论以及各章小结等.

本教材各章节的主要数学思想显著、突出,脉络清晰分明. 丰富的历史背景介绍,感悟而得的各章小结,渴望一见的非欧几何的专题讨论,穿插在各章节的开放性的思考题、练习题使得教材更加充实和完善. 本教材强调几何的直观性,努力处理好几何与代数的关系,证明尽量简单明了,内容详略得当,注重与后续课程的衔接,尽力为学生建立一个整体的框架.

本教材可供综合性大学和师范类院校数学专业的学生和教师使用,也可作为科技工作者学习解析几何的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

解析几何教程/廖华奎,王宝富编著. —3版. —北京:科学出版社, 2015.6

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材·国家理科基地教材

ISBN 978-7-03-044584-1

I. 解… II. ①廖… ②王… III. 解析几何-高等学校-教材 IV. O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 124804 号

责任编辑:张中兴/责任校对:张凤琴

责任印制:霍 兵/封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

保定市中华美凯印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000 年 8 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2007 年 6 月第 二 版 印张: 13 3/4

2015 年 6 月第 三 版 字数: 277 000

2015 年 6 月第十七次印刷

定价: 26.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

第三版前言

自第二版出版以来,受到许多兄弟院校的支持和关注,并提出了很好的建议,我们在此对兄弟院校的同仁表示衷心的感谢.

在教育教学改革中,教材的改革是一个重要的环节,也是广大教师在教学中经常思索的问题.四川大学在长期的办学实践中,始终坚持和确保本科教育教学的基础和中心地位,在教育教学中牢固确立“质量就是生命、质量就是岗位”的观念,确立了培养“具有深厚人文底蕴、扎实专业知识、强烈创新意识、宽广国际视野的国家栋梁和社会精英”的人才培养新目标.在这样的潮流中,将教材进一步改版成为必然.

根据我们长期积累的教学经验和许多同仁的建议,对第二版中不严密之处加以修改和补充.在第三版教材中,增加了以下内容:

1. 为加强学生在学习过程中对所学知识的重点和难点的掌握,将我们多年来的心得体会写成各章小结.希望有助于学生学会知识的总结,在其他课程学习中起到触类旁通的作用,以期提高学习效率,愉快地完成学业.

2. 为满足学生对知识的渴求,拓展知识范围,开拓视野,增加了非欧几何中的球面几何和双曲几何的内容.由于大学新生的基础知识所限,只能作初步知识的介绍.这部分内容可供学生作为课外阅读,老师可以以讲座的形式向学生介绍,以期增加对几何学的兴趣,为以后的课程学习做一些准备.

借本教材入选“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材的东风,使我们有信心将教学中的感悟和学生感兴趣的非欧几何的初步内容写入教材,在四川大学和科学出版社的大力支持下,顺利形成了第三版教材.在此,我们表示衷心的感谢.赵国松教授和郑泉副教授仔细地审阅了本教材,提出了许多宝贵的建议,作者所在的四川大学数学学院也给予了很多的支持,在此一并表示由衷的谢意.

由于我们的水平有限,错误在所难免.为了把该教材打造得更加完善,希望读者能一如既往地提出宝贵的意见,多多批评指正.

作 者

2015年1月于成都

第二版前言

本教材自出版以来已经多次印刷,得到许多高校教师的支持,被列为国家理科基地创建名牌课程项目.很多读者就教材内容给我们提出许多宝贵的意见.根据这些意见,结合我们的教学实践对本教材作了较全面的修订.

1. 调整了部分内容.比如:①在仿射坐标系下,平面方程的系数与平面法向量的表示法的关系作为一个注解,使读者对平面方程有更清晰的认识.②由于本教材对曲面的参数方程的阐述较少,将单叶双曲面和双曲抛物面的参数方程列为思考题,为读者提供一个用参数方程描述曲面的训练机会.

2. 修正了发现的印刷错误和其他错误.

3. 添加了习题的参考答案和提示,以便读者在解答问题时有一个参考和比较.

4. 增加了名词索引,以利于读者查阅基本概念.

我们衷心感谢所有读者的大力支持和宝贵意见.敬请读者一如既往地为本教材提出更多和更好的修改建议.

作 者

2006年2月

第一版前言

解析几何是高等院校各专业的重要基础课程,不仅数学、物理学等的许多后继课程要以此为基础,更为重要的是,它的思想方法和几何直观性可为许多抽象的、高维的数学物理问题提供模型和背景.

在面向 21 世纪教学内容和课程体系改革中,关于解析几何课程的改革已产生许多好的设想和教材. 在我校,解析几何也被作为省级重点课程建设项目进行教改尝试. 本教材的编写旨在对这几年的改革实践作一总结.

在该课程的教学过程中,常常能够感受到,现代的学生虽然有良好的素质,但受应试教育的影响,对数学的学习显得较为机械,对教师的依赖性较强,除了模仿例题做习题外,在怎样读书,特别是主动提出问题,思考问题,理解和掌握数学的思想方法,动手实践方面较为欠缺. 为此,我们在教学过程中作了一些有益的尝试,并试图通过教材的改革来弥补这一点.

首先,我们期盼通过教材改革来引导学生学会看书,我们在全书的每一个章节中穿插了许多的思考题,这些思考题直接与内容相关,但又是学生易忽视的问题,有些是开放性的,想以此来培养学生良好的读书习惯,学会主动思考,动手实践.

第二,按照人们的思维习惯,我们对教学内容进行调整,按照从点到线,到面,再讨论其关系的思路,从简单到复杂,循序渐进,使学生的思维有一个自然的升华过程,以培养学生探索未知的数学素养.

第三,我们试图突出各章节的主要教学思想,立足为学生建立一个整体框架,并努力阐述几何与代数的关系,用代数的手段解决几何的问题,而省略去许多繁琐的运算,其中部分留给学生动手解决.

第四,我们更多地注重与后继课程密切相关的二次曲面阐述,而对二次曲线的讨论则因为思想方法相同而简略.

实事求是地讲,新生刚进校后,有很多地方并不能适应本书思路的讲法,但我们还是坚持这样,只希望通过我们的努力,让学生在后继的课程学习中学得主动、愉快.

解析几何课程是省重点课程建设项目,得到学校及数学学院的大力支持. 李安民教授对几何学的许多深刻见解促进了本教材编写思想的形成,与彭联刚教授的多次讨论使编者获益匪浅. 赵国松教授仔细审阅了本教材,并提出了许多宝贵意

见,在此一并表示感谢.由于编者水平有限,仍会有许多不足之处,另外,本书的编写思想也只是一家之观念,难免有不当之处,还请读者多提宝贵意见.

作 者

2000 年 3 月

目 录

第三版前言

第二版前言

第一版前言

第 1 章 向量代数	1
1.1 向量及其线性运算	1
1.2 标架与坐标	9
1.3 向量的内积	13
1.4 向量的外积	16
1.5 向量的混合积	21
近代科学的始祖——笛卡儿	23
第 1 章小结	24
第 2 章 直线与平面	26
2.1 直线、平面的方程	26
2.2 位置关系	31
2.3 度量关系	38
业余数学家之王——费马	42
第 2 章小结	43
第 3 章 常见曲面	45
3.1 空间曲面和空间曲线的方程	45
3.2 柱面和锥面	48
3.3 旋转面	53
3.4 二次曲面	56
3.5 直纹面	61
3.6 作简图	66
几何之父——欧几里得	69
第 3 章小结	70
第 4 章 二次曲线和二次曲面	73
4.1 坐标变换	73
4.2 二次曲面和二次曲线方程的化简	79
4.3 不变量	85

4.4 中心,渐近方向	91
4.5 二次曲面的直径面、对称面,二次曲线的直径、对称轴	95
4.6 切线、切平面	104
罗巴切夫斯基与非欧几何	106
第4章小结	107
第5章 正交变换和仿射变换	113
5.1 映射与变换	113
5.2 平面的正交变换	116
5.3 平面的仿射变换	120
5.4 二次曲线的度量分类与仿射分类	126
5.5 空间的正交变换与仿射变换	129
数学王子——高斯	134
第5章小结	135
第6章 平面射影几何简介	137
6.1 齐次坐标,射影平面	137
6.2 对偶原理	140
6.3 交比	141
6.4 射影变换与二次曲线的射影分类	145
6.5 极点和配极	148
几何学发展简史	153
第6章小结	160
专题讨论 球面几何与双曲几何初步	164
专题讨论一 球面几何	164
专题讨论二 双曲几何	173
问题探索	182
习题答案与提示	184
参考文献	199
附录 矩阵和线性方程组简介	200
名词索引	207

第1章 向量代数

解析几何是利用代数方法来研究几何图形性质的一门学科,它包括平面解析几何和空间解析几何两部分.通过在几何空间中建立坐标系,就可将空间中的点用坐标表出,从而图形的几何性质可以表为图形上点的坐标之间的关系,特别是代数关系.17世纪初,法国数学家笛卡儿(Descartes R)和费马(Fermat)利用这种关系研究几何图形,创立了解析几何.从此变量被引进了数学,成为数学发展中的转折点,为微积分的出现创造了条件.

我们将从物理学中的力、速度及加速度等量中抽取出共性的东西而得到向量的概念及向量的加法的运算法则.进一步,研究数与向量的乘法运算;从力做功的现象中抽象出向量的内积;由力矩引出向量的外积;从平行六面体的体积计算引进向量的混合积.从而形成向量代数,使向量成为具有广泛应用的基本工具之一.

1.1 向量及其线性运算

1.1.1 向量的概念

我们从力学中知道,力、速度这些量既有大小,又有方向,它们可以用有向线段来表示.不仅如此,力(速度)的合成还可以通过有向线段来进行.这类既有大小,又有方向的量称为向量(或矢量).我们将代数运算引到向量中去,来研究图形性质.这种方法具有直观性,更容易理解图形性质的几何意义,并且它在物理学等学科中有重要的应用.此外向量的概念及其运算也为线性代数中深入理解向量空间提供了直观的几何背景.

既有大小,又有方向的量称为向量(或矢量).我们用符号 $a, b, c, \dots$ 表示.

一个向量 a 可以用一有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示,有向线段的长度 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示向量 a 的大小,从始点 A 到终点 B 的指向表示 a 的方向(图 1.1).

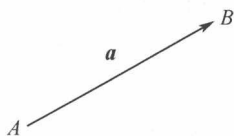


图 1.1

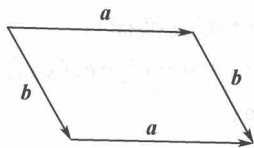


图 1.2

向量 a 的大小称为向量的长度(或模),记为 $|a|$.

长度为零的向量称为零向量,记为 $\mathbf{0}$.

长度为 1 的向量称为单位向量.

如果一个向量能够由另一个向量经平行移动得到,则称这两个向量相等(图 1.2).

如果从同一个始点 A 在同一条直线上作等于向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的有向线段 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, 其终点 B, C 分布在点 A 的同一侧(两侧), 则称向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 同向(反向). 同向或反向的两向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 称为平行的向量, 记为 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$. 与非零向量 $\mathbf{a}$ 同向的单位向量记为 $\mathbf{a}^0$.

与 $\mathbf{a}$ 的长度相等但反向的向量称为 $\mathbf{a}$ 的反向量或负向量, 记为 $-\mathbf{a}$.

思考题: 平面(空间)中具有同一始点的所有单位向量的终点的几何轨迹是什么图形?

1.1.2 向量的加法

回忆物理学中力、速度、位移的合成法.

定义 1.1.1 对于向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 作有向线段 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, 把 $\overrightarrow{AC}$ 表示的向量 $\mathbf{c}$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和, 记为 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (图 1.3), 即

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

由此公式表示的向量加法规则称为三角形法则.

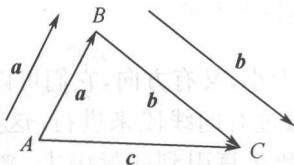


图 1.3

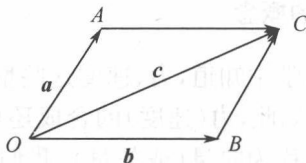


图 1.4

注: 从同一始点 O 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 再以 OA 和 OB 为边作平行四边形 $OACB$, 则对角线 $\overrightarrow{OC}$ 也表示向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和(图 1.4), 这称为向量的平行四边形法则.

向量的加法满足以下规律:

- (1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (交换律);
- (2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (结合律);
- (3) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$;
- (4) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

其中, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为任意向量. 这些规律可由加法运算的定义直接得出, 请读者自己证明.

作为加法的逆运算, 可定义减法如下.

定义 1.1.2 向量的减法 $a-b=a+(-b)$.

减法的几何意义如图 1.5, 即 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

由向量加法的三角形法则容易得到三角不等式

$$|a+b| \leq |a|+|b|,$$

其中, a, b 为任意向量. 其几何意义是, 三角形两边之和大于第三边. 这个不等式可以推广到任意有限多个向量和的情形:

$$|a+b+\cdots+l| \leq |a|+|b|+\cdots+|l|.$$

思考题: 1. 三角不等式中等号成立的条件是什么?

2. $|a+b|=|a|-|b|$ 成立的条件是什么?

3. 证明平面上封闭折线所表示的向量和 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$ 一定为 0 . 将此结论推广至空间.

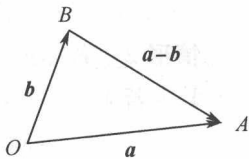


图 1.5

1.1.3 数量与向量的乘法

定义 1.1.3 实数 λ 与向量 a 的乘积 λa 是一个向量, 它的长度为 $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$, 它的方向当 $\lambda > 0$ 时与 a 相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 a 相反. 当 $\lambda = 0$ 或 $a = 0$ 时, 则 $\lambda a = 0$.

设 $a \neq 0$, 因为 $|a|^{-1}a$ 与 a 同向, 且

$$||a|^{-1}a| = |a|^{-1}|a| = 1,$$

所以 $a^0 = |a|^{-1}a$. 这称为把 a 单位化.

思考题: 若 $a \parallel b$, 那么 a, b 之间的关系如何?

对于任意的向量 a, b 和任意实数 λ, μ , 数量与向量的乘法满足以下规律:

$$(1) \lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a;$$

$$(2) (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a;$$

$$(3) \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

规律(1)可以用定义 1.1.3 直接验证.

规律(2)的证明. 若 $a = 0$ 或 λ, μ 中有一个为零时, 则(2)显然成立. 下面设 $\lambda\mu \neq 0, a \neq 0$.

情形 1 若 $\lambda\mu > 0$, 则 λa 与 μa 同向, 且 $(\lambda + \mu)a$ 与 $\lambda a + \mu a$ 同向, 因此有

$$|\lambda a + \mu a| = |\lambda a| + |\mu a| = (|\lambda| + |\mu|)|a|,$$

又有

$$|(\lambda + \mu)a| = |\lambda + \mu||a| = (|\lambda| + |\mu|)|a|.$$

因此

$$|(\lambda + \mu)a| = |\lambda a + \mu a|,$$

故

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a.$$

情形 2 若 $\lambda\mu < 0$, 不妨设 $\lambda > 0, \mu < 0$.

1° 若 $\lambda + \mu = 0$, 则 $(\lambda + \mu)a = 0$, 而

$$\begin{aligned}\lambda a + \mu a &= \lambda a + (-\lambda)a = (\lambda a) + (-1)(\lambda a) \\ &= (\lambda a) - (\lambda a) = 0.\end{aligned}$$

故(2)成立.

2° 若 $\lambda + \mu > 0$, 则由情形 1 知

$$[(\lambda + \mu) + (-\mu)]a = (\lambda + \mu)a + (-\mu)a,$$

即得

$$\lambda a = (\lambda + \mu)a + (-\mu a) = (\lambda + \mu)a - \mu a,$$

从而有

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a.$$

3° 若 $\lambda + \mu < 0$, 则由情形 1 知

$$\begin{aligned}[(\lambda + \mu) + (-\lambda)]a &= (\lambda + \mu)a + (-\lambda)a \\ &= (\lambda + \mu)a + (-\lambda a),\end{aligned}$$

类似于 2° 可得(2)式.

规律(3)的证明. 若 $\lambda = 0$ 或者 a, b 中有一个为 0 , 则(3)显然成立. 下面设 $\lambda \neq 0, a \neq 0, b \neq 0$.

情形 1 若 a 与 b 平行, 则由定义 1.1.3 后面的思考题结论知存在实数 μ 使 $b = \mu a$, 于是

$$\begin{aligned}\lambda(a + b) &= \lambda(a + \mu a) = \lambda[(1 + \mu)a] \\ &= [\lambda(1 + \mu)]a = [\lambda + \lambda\mu]a \\ &= \lambda a + (\lambda\mu)a = \lambda a + \lambda(\mu a) = \lambda a + \lambda b.\end{aligned}$$

情形 2 若 a 与 b 不平行, 那么当 $\lambda > 0$ 时, 如图

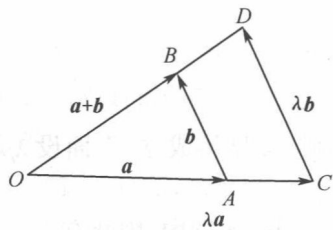


图 1.6

1.6 作 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{AB} = b$, 于是 $\overrightarrow{OB} = a + b$, 作 $\overrightarrow{OC} = \lambda a, \overrightarrow{CD} = \lambda b$, 则 $\triangle OAB \sim \triangle OCD$, 从而 D 必在直线 OB 上. 于是 $\overrightarrow{OD} = \lambda(a + b)$, 又 $\overrightarrow{OD} = \lambda a + \lambda b$. 故有

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

当 $\lambda < 0$ 时, 可作类似的讨论.

1.1.4 共线、共面的向量组

向量的加法和数量与向量乘法统称为向量的线性运算.

设 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是一组向量, $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是一组实数, 则 $\sum_{i=1}^n k_i a_i$ 是一个向量, 称它为向量组 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的一个线性组合.

定义 1.1.4 平行于同一直线(平面)的向量组称为共线的(共面的)向量组.

两个向量共线等价于它们平行. 因而共线向量组实质上是一组互相平行的向量.

零向量与任意向量共线; 共线的向量组一定共面; 若 $a = \lambda b$ 或 $b = \mu a$, 则 a 与 b 共线.

思考题: 两个向量是否一定共面?

定义 1.1.5 若对于向量组 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$, 存在不全为 0 的实数 $k_i (i=1, 2, \dots, n)$, 使

$$\sum_{i=1}^n k_i a_i = 0,$$

则称向量组 $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ 线性相关, 否则称向量组线性无关.

思考题: 对照此定义, 采用陈述的方式, 写出向量组线性无关的定义.

命题 1.1.1 两个向量 a, b 共线的充要条件是 a, b 线性相关.

证明 必要性 若 a, b 中有一个为零向量, 不妨设 $a = 0$, 则对实数 $k_1 = 1, k_2 = 0$, 有

$$k_1 a + k_2 b = 1 \cdot 0 + 0 \cdot b = 0,$$

因而 a, b 线性相关.

若 a, b 都不为 0, 且同向, 则 $a^0 = b^0$, 从而有

$$b = |b| b^0 = |b| a^0 = |b| (|a|^{-1} a) = |b| (|a|^{-1}) a.$$

令 $k_1 = |b| |a|^{-1}, k_2 = -1$, 则有

$$k_1 a + k_2 b = 0.$$

故 a, b 线性相关. 若 a, b 反向, 可作类似的讨论.

充分性 设存在不全为 0 的实数 k_1, k_2 使 $k_1 a + k_2 b = 0$. 不妨设 $k_1 \neq 0$, 则有 $a = (-k_1^{-1} k_2) b$, 故 a, b 共线.

思考题: 请用几何方法证明命题 1.1.1.

思考题: 请考虑两向量线性无关的充要条件及其几何特征.

推论 1.1.1 若 a, b 共线且 $a \neq 0$, 则存在唯一的实数 λ 使得 $b = \lambda a$.

命题 1.1.2 三向量 a, b, c 共面(不共面)的充要条件是 a, b, c 线性相关(线性无关).

此命题的证明留作习题.

思考题: 在平面和空间中各画出一线性相关和线性无关的向量组.

定理 1.1.1 设 a, b 不共线, 则 c 与 a, b 共面的充要条件是存在唯一的一对实数 λ, μ 使得

$$c = \lambda a + \mu b.$$

证明 必要性 由 c 与 a, b 共面及命题 1.1.2 知, 存在不全为 0 的实数 k_1, k_2, k_3 使

$$k_1 \mathbf{a} + k_2 \mathbf{b} + k_3 \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

我们断定 $k_3 \neq 0$. 否则有不全为 0 的实数 k_1, k_2 , 使得

$$k_1 \mathbf{a} + k_2 \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

这与 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线矛盾. 因而我们得到

$$\mathbf{c} = (-k_3^{-1} k_1) \mathbf{a} + (-k_3^{-1} k_2) \mathbf{b}.$$

令 $\lambda = -k_3^{-1} k_1, \mu = -k_3^{-1} k_2$, 那么

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}.$$

假如另有 λ', μ' 使 $\mathbf{c} = \lambda' \mathbf{a} + \mu' \mathbf{b}$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{c} - \mathbf{c} = (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) - (\lambda' \mathbf{a} + \mu' \mathbf{b}) \\ &= (\lambda - \lambda') \mathbf{a} + (\mu - \mu') \mathbf{b}. \end{aligned}$$

因为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线, 所以必有

$$\lambda - \lambda' = 0, \quad \mu - \mu' = 0,$$

于是 $\lambda = \lambda', \mu = \mu'$. 唯一性得证.

充分性是显然的.

定理 1.1.2 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, 则对空间中任一向量 $\mathbf{d}$ 均存在唯一的数组 (λ, μ, γ) , 使得

$$\mathbf{d} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}.$$

证明 如图 1.7, 取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}, \overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$. 过 D 作一直线与 OC 平行, 且与 OA 和 OB 决定的平面交于 M . 过 M 作一直线与 OB 平行, 且与 OA 交于 N . 因为

$$\overrightarrow{ON} \parallel \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{NM} \parallel \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{MD} \parallel \mathbf{c},$$

所以分别存在实数 λ, μ, γ 使得

$$\overrightarrow{ON} = \lambda \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{NM} = \mu \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{MD} = \gamma \mathbf{c}.$$

从而

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MD} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}.$$

唯一性 若

$$\overrightarrow{OD} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \lambda_1 \mathbf{a} + \mu_1 \mathbf{b} + \gamma_1 \mathbf{c},$$

则得

$$(\lambda - \lambda_1) \mathbf{a} + (\mu - \mu_1) \mathbf{b} + (\gamma - \gamma_1) \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 不共面, 所以

$$\lambda = \lambda_1, \quad \mu = \mu_1, \quad \gamma = \gamma_1.$$

思考题: 平面上的任意三个向量是否线性相关? 空间中的任意四个向量是否线性相关?

例 1.1.1 设 A, B 是不同的两点, 则点 P 在直线 AB 上的充要条件是存在唯

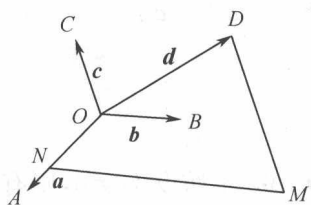


图 1.7

一的一对实数 λ, μ ,使得

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}, \\ \lambda + \mu = 1, \end{cases} \quad (*)$$

其中 O 是任意取定的一点,而 P 在线段 AB 上的充要条件是 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ 且 $(*)$ 成立.

证明 必要性 设 P 在直线 AB 上,则 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线,显然 $\overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$.由推论 1.1.1 得存在唯一的 k 使

$$\overrightarrow{AP} = k \overrightarrow{AB}.$$

任取一点 O (图 1.8),由上式得

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}),$$

即有

$$\overrightarrow{OP} = (1-k) \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{OB}.$$

令 $\lambda = 1-k, \mu = k$,因而 $\lambda + \mu = 1$,且

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}.$$

由 k 的唯一性知 λ, μ 是唯一的.

充分性 若对某一点 O , $(*)$ 式成立,则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} - (\lambda + \mu) \overrightarrow{OA} \\ &= \mu \overrightarrow{OB} - \mu \overrightarrow{OA} = \mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \mu \overrightarrow{AB}, \end{aligned}$$

因而 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线,所以 P 在直线 AB 上.

对于后半部分,由于 P 在线段 AB 上,所以 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 同向,故 $(*)$ 成立且有 $0 \leq |\overrightarrow{AP}| \leq |\overrightarrow{AB}|$,即 $0 \leq k \leq 1$,从而 $(*)$ 中的 $\lambda = 1-k \geq 0, \mu = k \geq 0$.反之,若 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$,由 $\lambda + \mu = 1$,知 $0 \leq \mu \leq 1$,因而 $0 \leq |\overrightarrow{AP}| \leq |\overrightarrow{AB}|$,即 P 在线段 AB 上.

例 1.1.2 如图 1.9,已知 $\triangle ABC$ 及一点 O ,试证 O 是 $\triangle ABC$ 的重心的充要条件是 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$.

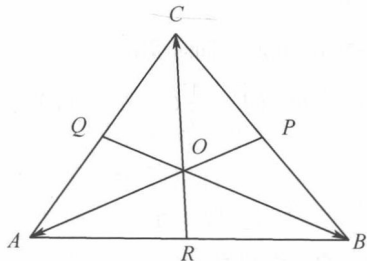


图 1.9

证明 必要性 设 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, P, Q, R 分别是三边 BC, CA, AB 的中点,则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= \frac{2}{3} \overrightarrow{PA} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \right) \\ &= \frac{1}{3} \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BA}, \end{aligned}$$

同理得到

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{CB},$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}.$$

于是

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

充分性 设 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 而 $\triangle ABC$ 的重心为 O^* , 则由必要性知 $\overrightarrow{O^*A} + \overrightarrow{O^*B} + \overrightarrow{O^*C} = \mathbf{0}$. 但是

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*A}, & \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*B}, \\ \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*C}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*A} + \overrightarrow{O^*B} + \overrightarrow{O^*C} \\ &= 3\overrightarrow{OO^*}. \end{aligned}$$

故 $\overrightarrow{OO^*} = \mathbf{0}$, 即 $O^* = O$.

习题 1.1

1. 试证向量加法的结合律, 即对任意向量 a, b, c , 成立

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

2. 设 a, b, c 两两不共线, 试证顺次将它们的终点与始点相连而成为一个三角形的充要条件是 $a + b + c = \mathbf{0}$.

3. 试证三角形的三中线可以构成一个三角形.

4. 用向量法证明梯形两腰中点连线平行于上、下底且等于它们长度和的一半.

5. 试证命题 1.1.2.

6. 设 A, B, C 是不共线的三点, 它们决定一平面 Π , 则点 P 在 Π 上的充要条件是存在唯一的数组 (λ, μ, γ) 使得

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC}, \\ \lambda + \mu + \gamma = 1, \end{cases} \quad (*)$$

其中, O 是任意一点. P 在 $\triangle ABC$ 内的充要条件是 $(*)$ 与 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \gamma \geq 0$ 同时成立.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在边 BC 与 CA 上, 且 $BD = \frac{1}{3}BC, CE = \frac{1}{3}CA$, AD 与 BE 交于 R , 试证

$$RD = \frac{1}{7}AD, \quad RE = \frac{4}{7}BE.$$

8. 用向量法证明 $\triangle ABC$ 的三条中线交于一点 P , 并且对任意一点 O 有

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

9. 用向量法证明四面体 $ABCD$ 的对棱中点连线交于一点 P , 且对任意一点 O 有

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$