

高等学校教材

高等数学

(第二版) (上册)

郭大立 主编

谢祥俊 涂道兴 徐东胜 编

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

(第二版) (上册)

郭大立 主编

谢祥俊 涂道兴 徐东胜 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是根据“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写的,分上、下两册出版。上册包括函数与空间解析几何、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学,共四章,每章均设有数学实验和数学文化专题,书末还附有常用的平面曲线和曲面、初等函数的有关性质、二阶和三阶行列式简介、Mathematica 简介、常用的积分公式表、部分习题答案与提示。

本书以面向高等教育新形势、拓宽基础和视野、培养能力和素质、促进教育现代化为目标,对教材体系和教材内容进行了优化整合,并将数学建模与应用、数值计算、数学软件、数学实验、数学文化等有机融入教材之中。本书内容简明直观,深入浅出,富有启发性;精选典型例题和应用实例,合理设置习题,便于教学与自学。

本书可作为高等学校工科类各专业的教材,也可作为教师及工程技术人员参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/郭大立主编;谢祥俊,涂道兴,
徐东胜编.--2 版.--北京:高等教育出版社,2015.8
ISBN 978-7-04-043691-4

I. ①高… II. ①郭…②谢…③涂…④徐… III.
①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 175754 号

策划编辑 杨 波	责任编辑 杨 波	特约编辑 李 哲	封面设计 张 志
版式设计 王艳红	插图绘制 郝 林	责任校对 刘丽娟	责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 保定市中国画美凯印刷有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 19.5
字 数 350 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landraco.com>
<http://www.landraco.com.cn>
版 次 2009 年 6 月第 1 版
2015 年 8 月第 2 版
印 次 2015 年 8 月第 1 次印刷
定 价 31.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 43691-00

第二版前言

自 2009 年 6 月高等教育出版社出版本书第一版以来,我们一直采用它作为高等数学课程的教材,在使用中发现了一些问题和错误,读者和教师向我们提出了许多宝贵意见。在本书第一版历次重印中,我们曾经作了一些修正。

经过几年的修改完善,本教材于 2012 年 1 月被评为第一批四川省“十二五”普通高等教育本科规划教材。借再版之际,我们除了修改第一版的一些错误外,主要是将书中有些定理的证明和例题的解答写得更加详细一些,进一步完善和提炼了教材内容。衷心感谢读者和教师对本书的关心,并欢迎继续提出宝贵意见。

编 者

2015 年 7 月

第一版前言

微积分是人类最伟大的成就之一,在各个领域中发挥着巨大的作用。以微积分为主要内容的高等数学是高等学校工科类各专业的重要基础课程,高等数学教育对后续课程的学习、能力的培养 and 素质的提高起着举足轻重的作用。

为适应高等教育新形势,我们根据“工科类本科高等数学课程教学基本要求”,在认真研究和消化吸收国内外同类优秀教材的基础上,通过系统深入的改革与实践,编写了这本教材。本书以面向高等教育新形势、拓宽基础和视野、培养能力和素质、促进教育现代化为目标,对教材体系和教材内容进行了优化整合,并将数学建模与应用、数值计算、数学软件、数学实验、数学文化等有机地融入教材之中。本书的主要特色体现在:

1. 优化整合了教材体系和教材内容

本书在保持高等数学教材体系和教材内容的科学性和系统性的同时,针对大众化教育和素质教育的新形势,优化了教材体系,整合了教材内容,对很多内容进行了合并或精简,力求教材内容简明直观,深入浅出,富有启发性。本书强调基础,突出基本概念、基本原理、数学思想与方法,淡化运算技巧,同时注重拓宽视野,既留下纵向发展的接口,又强化应用拓展,展示数学的魅力及应用中的思想和方法。本书也兼顾了教材自身及其与中学数学课程、后续数学课程的一致性和发展延伸,与大学数学课程的实用性。本书还突出了实践性教学内容的设计,精选典型例题,增加大量应用实例,合理设置适量并有一定层次性的多种习题,并在书末附有答案与提示,便于读者练习和检验。

2. 突出应用和背景,把数学建模的思想和方法渗透到教材内容之中

只要有可能,本书总是通过实际背景引入数学概念,阐述数学来源于实际又服务于实践的道理;在引入实际问题过程中,注重启发、联想、抽象等思想和方法的应用,贯彻“由特殊到一般、再由一般到特殊”的研究方法和过程。同时,本书也增加了大量简明易懂的实际问题及其训练,内容涉及诸多领域。另外,每章还通过数学实验的综合训练,贯彻数学建模的思想和方法,如展开机理分析、提出合理假设、建立数学模型、求解数学模型、结果分析与检验、应用与调整等,体现应用数学知识解决实际问题的方法和过程,培养应用数学知识解决实际问题的

意识和能力,并在应用中深化对理论知识的理解和延伸,多种知识和工具的综合应用。

3. 发挥数学实验和数学软件的辅助教学作用

本书考虑了数学实验和数学软件的辅助教学作用。例如,利用数学软件的强大功能,显示各种几何图形,直观地演示极限的过程,实现微积分的基本运算等,并进一步优化整合了教材体系和教材内容,将侧重点放在基本概念、基本原理、数学思想与方法上。同时,也力求解决数学软件与数学理论、思想和方法的矛盾和关系。

4. 强化数值计算,突出数值计算的原理和思想

本书强化了与教材内容紧密结合的数值计算,并促进了教学内容的优化整合。例如,引入数值积分,并结合数学软件,使积分的计算得以适当简化或淡化。在有关数值计算方面,本书突出数值计算的原理和思想,而不涉及编程实现。

5. 设置数学文化专题,并在教材内容中尽力融入数学文化

数学不仅是一种强有力的研究工具,而且是一种不可或缺的思维方式和文化精神。本书在每章末专门设置了数学文化的专题,并在教材内容中尽量融入数学文化,即创新的精神,理性的思考,逻辑思维方式,以及融会数学发展史、数学方法论和数学应用的数学素质、科学精神和价值导向。本书期望以此达到不仅传播数学知识,而且培养应用数学知识解决实际问题的兴趣和能力,同时也体验数学文化,提高数学修养,养成良好的思维品格。

本书分上、下两册出版,上册包括函数与空间解析几何、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学,共四章,下册包括多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、微分方程,共四章,每章均设置有数学实验和数学文化的专题。全书参考教学时数为160~180学时,其中含数学实验16学时(上、下册各8学时)。

本书由郭大立教授、谢祥俊教授、涂道兴副教授和徐东胜副教授共同完成。其中,郭大立负责全书的整体设计和修改完善,并编写第一章和第八章,谢祥俊负责本书编写的组织和协调,并编写第四章,涂道兴编写第三章、第五章、第六章和第七章,徐东胜编写第二章、各章的数学实验和数学文化专题。西南石油大学的李小明教授对本书进行了深入细致的审查,并提出了不少宝贵的修改意见和建议。西南石油大学的赵金洲教授对本书的编写和出版给予了很大的帮助。本书还得到了高等教育出版社的关心和支持,在此表示最热诚的谢意。

本书试图突破现有高等数学的理论体系,将数学建模与应用、数值计算、数

学软件、数学实验、数学文化等有机融入教材之中,达到抛砖引玉的效果。但限于水平,书中一定有一些不尽如人意之处,同时也难免疏漏与错误,敬请各位专家、读者提出宝贵意见。

编 者

2009 年 2 月

目 录

第一章 函数与空间解析几何	1
第一节 函数与映射	1
一、引例	1
二、一元函数	2
三、映射	8
四、多元函数	9
习题 1-1	12
第二节 曲面与空间曲线	12
一、空间直角坐标系	13
二、曲面及其方程	15
三、空间曲线及其方程	22
四、柱面坐标与球面坐标	25
习题 1-2	27
第三节 向量及其运算	27
一、向量的概念	28
二、向量的线性运算	28
三、向量的乘法	30
四、向量及其运算的坐标表示	33
习题 1-3	38
第四节 平面与空间直线	39
一、平面及其方程	39
二、空间直线及其方程	43
三、平面与空间直线的关系	47
习题 1-4	50
数学实验(一)	52
一、问题的提出	52
二、Mathematica 初步	52
数学文化(一)	55

一、函数概念的起源及演变	55
二、笛卡儿	57
第二章 极限与连续	59
第一节 数列的极限	59
一、数列极限的概念	59
二、收敛数列的性质	63
三、数列极限的四则运算法则	64
习题 2-1	66
第二节 函数的极限	66
一、函数极限的定义	67
二、函数极限的性质	70
三、函数极限的四则运算法则	71
四、无穷小与无穷大	73
五、复合函数的极限运算法则	75
习题 2-2	75
第三节 极限存在准则 两个重要极限	76
一、极限存在准则	76
二、两个重要极限	78
三、无穷小的比较	83
习题 2-3	85
第四节 函数的连续性	86
一、连续与间断	86
二、连续函数的运算性质	90
三、初等函数的连续性	91
习题 2-4	92
第五节 闭区间上连续函数的性质	93
一、最大值与最小值存在定理	93
二、方程根的存在定理与介值定理	94
习题 2-5	96
数学实验(二)	96
一、问题的描述	96
二、实验内容	96
三、思考与练习	98
数学文化(二)	99

一、极限概念的起源与演变	99
二、柯西	100
第三章 一元函数微分学	103
第一节 导数与微分的概念	103
一、导数的概念	103
二、微分的概念	110
习题 3-1	113
第二节 函数的求导法则	114
一、导数的四则运算法则	114
二、反函数的求导法则	117
三、复合函数的求导法则	118
四、参数式函数的求导法则	123
习题 3-2	126
第三节 高阶导数	128
一、高阶导数的定义及其求法	128
二、高阶导数的运算法则	130
习题 3-3	133
第四节 微分中值定理	133
一、罗尔定理	134
二、拉格朗日中值定理	135
三、柯西中值定理	138
习题 3-4	140
第五节 洛必达法则	140
一、洛必达法则	141
二、其他未定式	144
习题 3-5	146
第六节 函数的单调性与曲线的凹凸性	147
一、函数的单调性	147
二、曲线的凹凸性	151
习题 3-6	155
第七节 函数的极值及最大值与最小值	155
一、函数的极值及其求法	156
二、最大值与最小值问题	159
习题 3-7	162

09 数学实验(三)	163
001 一、问题的提出	163
001 二、实验内容	163
001 三、思考与练习	164
60 数学文化(三)	165
611 一、导数概念的起源与演变	165
611 二、牛顿	166
第四章 一元函数积分学	173
61 第一节 定积分的基本概念和性质	173
711 一、两个引例	173
811 二、定积分的定义	175
851 三、定积分的性质	178
851 习题 4-1	180
85 第二节 微积分基本公式	180
851 一、变上限函数及其导数	180
971 二、牛顿-莱布尼茨公式	184
851 习题 4-2	185
81 第三节 不定积分的概念与性质	186
861 一、不定积分的概念	186
861 二、基本积分表	187
861 三、不定积分的性质	189
861 习题 4-3	190
04 第四节 换元积分法	190
141 一、不定积分的第一类换元法	191
641 二、不定积分的第二类换元法	194
041 三、定积分的换元积分法	197
741 习题 4-4	200
75 第五节 分部积分法	202
121 一、不定积分的分部积分法	202
221 二、定积分的分部积分法	205
221 习题 4-5	207
02 第六节 数值积分	208
021 一、梯形法	208
501 二、抛物线法	209

习题 4-6	211
第七节 定积分的应用	211
一、微元法	211
二、定积分在几何中的应用	212
三、定积分在物理中的应用	215
习题 4-7	217
第八节 反常积分	218
一、无穷区间的反常积分	218
二、无界函数的反常积分	220
习题 4-8	221
数学实验(四)	222
一、问题的描述	222
二、实验内容	222
三、思考与练习	223
数学文化(四)	223
一、定积分概念的产生与演变	223
二、莱布尼茨	226
附录	231
附录 I 常用的平面曲线和曲面	231
一、常用的平面曲线	231
二、常用的曲面	234
附录 II 初等函数的有关性质	238
一、基本初等函数及其性质	238
二、常用三角函数公式	241
三、常用双曲函数公式	242
附录 III 二阶和三阶行列式简介	243
附录 IV Mathematica 简介	246
一、概述	246
二、用 Mathematica 求极限和微分	248
三、用 Mathematica 作积分计算	250
四、用 Mathematica 解方程和级数运算	254
五、用 Mathematica 作向量运算和作图	258
六、Mathematica 编程基础	265
附录 V 常用的积分公式表	270

一、基本积分表	270
二、常用不定积分表	271
三、部分定积分表	280
部分习题答案与提示	281
参考文献	295

第一章 函数与空间解析几何

高等数学研究的主要对象是变量,更确切地讲,是变量与变量之间的依赖关系——函数.高等数学的主要内容包括一元函数微积分和多元函数微积分,是从研究函数开始的,而用代数方法研究空间几何问题的空间解析几何是学习多元函数的基础.因此,本章先引入函数的有关知识,然后介绍空间解析几何,为高等数学的学习奠定基石.

第一节 函数与映射

函数是高等数学研究的主要对象,其概念和性质已在中学数学中进行了介绍,这里简明扼要地加以叙述,并适当补充和提高,为今后的学习做好准备工作.

一、引例

函数是变量与变量之间的依赖关系.先看下面几个例子:

例 1 圆的面积 A 和圆的半径 r 是两个变量,两者之间的依赖关系可以用公式 $A = \pi r^2$ 表示,因此圆的面积是其半径的函数.

例 2 心电图(ECG)是心脏兴奋的发生、传播及恢复过程的客观记录,见图 1-1,其中横坐标是时间,纵坐标是心脏部位的电流,它们都是变量.医生根据这种重复出现的图形,易于诊断患者的病情.心电图记录的是电流与时间的函数关系.



图 1-1

例 3 某港 2006 年至 2013 年集装箱吞吐量表 1-1. 从表中可以看出,近

几年该港的集装箱吞吐量增长很快,虽然没有集装箱吞吐量随年份变化的公式,但是任意给定 2006—2013 中一个年份,就有一个确定的吞吐量与之对应,因此该港的集装箱吞吐量是年份的函数.

表 1-1

年份	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
吞吐量[TEU(万标箱)]	238	306	391	430	412	376	399	453

例 4 圆锥体的体积 V 与它的底圆半径 r 、高 h 之间具有关系

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

这里,当 r, h 在集合 $\{(r, h) | r > 0, h > 0\}$ 内取定一对值 (r, h) 时, V 的对应值就随之确定,因此圆锥体的体积 V 是它的底圆半径 r 、高 h 的函数.

从以上四个例子可以看出,无论是用公式、图形或表格的形式表达,还是变量的个数多少,函数都是变量与变量之间的依赖关系.

二、一元函数

1. 变量与变化域

在自然科学和工程技术中,经常遇到各种不同的量,有一些量在过程中始终不变化,保持一定的数值,这种量称为常量;另一些量在过程中有变化,可取各种不同的数值,这种量称为变量. 常量与变量是相对的,例如在一天中观察某小孩的身高可近似视为常量,但在一年中观察该小孩的身高则是变量.

变量的变化范围称为变化域. 最常用的变化域是区间,即数轴上介于两个定点(定数)之间的一切点(实数)的集合,这两个定点(定数)称为区间的端点. 区间包括下列四种类型:

- (1) 开区间: $(a, b) = \{x | a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$;
- (2) 闭区间: $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$;
- (3) 半开半闭区间: $[a, b) = \{x | a \leq x < b, x \in \mathbf{R}\}$, $(a, b] = \{x | a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$;
- (4) 无穷区间: $(a, +\infty) = \{x | x > a, x \in \mathbf{R}\}$, $(-\infty, b] = \{x | x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$ 等.

为今后研究方便,常常将开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域,记为 $U(x_0, \delta)$,即

$$U(x_0, \delta) = \{x | |x - x_0| < \delta\}.$$

其中, x_0 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径(图 1-2). 注意,邻域是开区间,只不过是用心和半径而不是用端点来表达而已.

除点 x_0 的 δ 邻域外,还常用到以下概念:

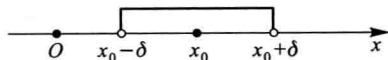


图 1-2

(1) 点 x_0 的 去心 δ 邻域: $\dot{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$;

(2) 点 x_0 的 左邻域: $(x_0 - \delta, x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta \text{ 且 } x < x_0\}$;

(3) 点 x_0 的 右邻域: $(x_0, x_0 + \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta \text{ 且 } x > x_0\}$.

在不需要强调邻域的半径时,可用 $U(x_0)$ 表示点 x_0 的某个邻域,用 $\dot{U}(x_0)$ 表示点 x_0 的某个去心邻域.

2. 函数的定义

定义 1 设 x 和 y 是两个变量, D 是给定的数集,若存在对应法则 f ,使得对于任意 $x \in D$,变量 y 总有确定的数值与之对应,则称对应法则 f 是从 x 到 y 的一个 一元函数,简称为 函数,记为 $y = f(x)$. 其中, x 称为 自变量, y 称为 因变量, D 称为 函数的定义域.

根据定义可以看出,函数是由定义域与对应法则确定的. 对于两个函数,当且仅当它们的定义域和对应法则都分别相同时,才表示同一函数,而与自变量和因变量采用什么符号无关. 正因如此,在给出函数时,一般都需标明其定义域;否则,定义域就是指 自然定义域,即使得函数有意义的自变量取值范围. 对于定义域 D ,数集 $R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的 值域.

若自变量 x 在定义域内任取一个数值时,因变量 y 的对应值只有一个,这种函数称为 单值函数,否则称为 多值函数. 今后若无特别声明,均指单值函数.

3. 函数的表示法

函数有三种表示法,分别是公式法、图示法和表格法. 前面例 1、例 2 和例 3 中的函数就是分别用公式法、图示法和表格法表示的.

在应用公式法表示函数时,对于一些特殊的函数,采用极坐标方程或参数方程比采用直角坐标方程更为简明直观. 下面对极坐标方程和参数方程加以说明.

(1) 极坐标方程

在平面上,取一个定点 O ,称为 极点;经过点 O ,作水平射线 Ox 轴,称为 极轴;在极轴上规定单位长度,这样就构成了一个 极坐标系. 极坐标系和平面直角坐标系如图 1-3 所示.

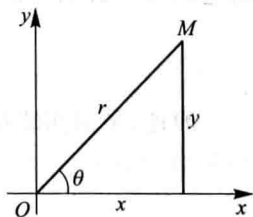


图 1-3

平面上任意点 M 的位置,可以由点 M 到点 O 的距离 r 和极轴与 OM 的夹角 θ 来确定,即平面上点 M 与二元有序数组 (r, θ) 一一对应. r 称为点 M 的极径或向径, θ 称为点 M 的极角, (r, θ) 称为点 M 的极坐标,其中 θ 值规定依逆时针方向转动所成的角度为正,依顺时针方向转动所成的角度则为负.

显然,如果点 M 在直角坐标系下的坐标为 (x, y) ,在极坐标系下的坐标为 (r, θ) ,则两者之间的转换公式为

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

或者

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

利用上述转换公式,易于实现函数的直角坐标方程与极坐标方程的相互转换.例如,以 $(1, 0)$ 为圆心、半径为 1 的圆,其直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 2x$,根据转换公式,可以得到其极坐标方程为 $r = 2 \cos \theta$;反之,将极坐标方程转换为直角坐标方程也是容易的.

(2) 参数方程

在实际问题中,有时会遇到平面曲线的参数方程.简单的平面曲线(例如圆、椭圆等)的参数方程已在中学学习过,这里介绍斜抛物体问题.抛射体的运动轨迹(图 1-4)可用下列参数方程表达

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2, \end{cases}$$

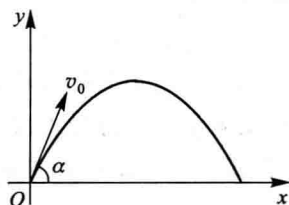


图 1-4

其中, v_0 是斜抛射体的初速度, α 是抛射角度, g 是重力加速度, t 是飞行时间, x 和 y 分别是抛射体在飞行过程中位置的横坐标和纵坐标.

在上述参数方程中, x 和 y 都是参数 t 的函数.如果把对应于同一个 t 值的 x 和 y 的值看做是对应的,那么就得到 x 与 y 之间的函数关系.事实上,该函数关系通过消去参数 t ,可以直接表达为

$$y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

一般地,平面曲线用参数方程表达为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

如果把对应于同一个 t 值的 x 和 y 的值看做是对应的,那么就得到 x 与 y 之间的函数关系.