高中用书

翟连林 主编

高中数学试题一题多解

GAO ZHONG SHU XUE

北京出版社

中学数学智力开发丛书

高中数学试题一题多解

主　编　翟连林

编　委（依姓氏笔划为序）

王学功　王乾岭　叶龄逸

刘盛锡　陈士杰　李福宽

林福堂　施英杰　项昭义

执　笔　刘宗贤　项昭义　屠新民

梁瑞兴　陈久华　王　燕

北京出版社

中学数学智力开发丛书

高中数学试题一题多解

GAOZHONG SHUXUE SHITI

YITI DUOJIE

翟连林　主编

*

北京出版社出版

(北京北三环中路6号)

邮政编码:100011

北京出版社总发行

新华书店北京发行所经销

北京市朝阳新源印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　12.5印张　273 000千字

1993年10月第1版　1997年7月第4次印刷

印数40 001—50 000

ISBN 7-200-01956-9/G·579

定价:12.30元

编者说明

从教学实践中我们体会到：一题多解是开发智力、培养能力的一种行之有效的方法，它对沟通不同知识间的联系，开拓人们的思路，培养发散思维能力，激发读者的学习兴趣都是十分有益的.为此，我们编写了《中学数学智力开发丛书》.这套丛书出版发行后，受到广大读者的欢迎，从1990年初版至今，已印刷四次，总印数达35.6万册。在新形势下我们又重新修订，出版这套丛书的第二版，包括《初中代数一题多解》、《平面几何一题多解》、《高中代数一题多解》、《平面三角一题多解》、《立体几何一题多解》、《平面解析几何一题多解》、《高中数学综合题一题多解》。为了充实内容，这套丛书增加了《初中数学试题一题多解》、《初中数学综合题一题多解》、《高中数学试题一题多解》等书，使整套书囊括了初中数学和高中数学的全部内容，有益于读者按需选择。

与其它各类学习数学的图书比较，这套丛书突出了发散思维能力的培养，精选实用、新颖的题目，增加了巧妙解法，力求体现科学性、趣味性、典型性和启发性。

由于我们的水平有限，书中缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编者

1993年8月

目　录

第一章　怎样培养一题多解能力……………………（ 1 ）
第二章　高考数学试题一题多解举例………………（ 92 ）
　一、代数试题………………………………………（ 92 ）
　二、三角试题………………………………………（171）
　三、立体几何试题…………………………………（210）
　四、解析几何试题…………………………………（245）
第三章　高中数学竞赛试题一题多解举例…………（311）
　一、1981年试题……………………………………（314）
　二、1982年试题……………………………………（323）
　三、1983年试题……………………………………（330）
　四、1984年试题……………………………………（343）
　五、1986年试题……………………………………（346）
　六、1987年试题……………………………………（354）
　七、1988年试题……………………………………（356）
　八、1989年试题……………………………………（367）
　九、1990年试题……………………………………（376）
　十、1991年试题……………………………………（384）

第一章　怎样培养一题多解能力

无论是高考试题、各地区高考预选试题还是数学竞赛试题，多数都出自名家之手．这些题或构思巧妙，或沟通知识面广，或联系知识点多，或运用的基本数学方法灵活多变，或具有某种数学意义的背景，其大多数试题都具有典型性、技巧性、灵活性、综合性，闪耀着命题者的创造思维火花！所以，我们对这些试题进行多侧面、多角度、多方位的探讨与研究是极有意义的．

那么，如何培养一题多解能力呢？我们在此提供一些未臻成熟的思维途径，谨作为在向数学王国进军中的有志者的参考．

1．运用重要知识点培养一题多解能力

初等数学有很多重要知识点．只有深刻地理解这些知识点，熟练地掌握这些知识点，灵活地运用这些知识点，才能学好数学．学会运用重要知识点，沟通它们之间的联系，对于培养一题多解能力是十分有意义的．

例1　已知椭圆的中心在坐标原点，焦点在坐标轴上，直线$y=x+1$与该椭圆相交于P和Q，且$OP\perp OQ$，$|PQ|=\frac{\sqrt{10}}{2}$，求椭圆的方程．　（1991年全国高考数学文科题）

【分析1】　首先设所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

合理的思维途径是利用“点在曲线上点的坐标满足方程”，从而得到关于x的一元二次方程，设其二根为x_1、x_2，由已知条件得到关于x_1、x_2的二次方程组，再运用根与系数的关系，即可求得待定参数a^2、b^2.

【解法 1】 设所求椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

依题意知，点P,Q的坐标满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 & ① \\ y=x+1 & ②\end{cases}$$

把②式代入①式，整理，得

$$(a^2+b^2)x^2+2a^2x+a^2(1-b^2)=0 \qquad ③$$

设方程③的两个根分别为x_1、x_2，那么直线 $y=x+1$ 与椭圆的交点为

$$P(x_1,\ x_1+1),\quad Q(x_2,\ x_2+1).$$

由题设$OP\perp OQ,|PQ|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$,可得

$$\begin{cases}\dfrac{x_1+1}{x_1}\cdot\dfrac{x_2+1}{x_2}=-1, \\ (x_2-x_1)^2+[(x_2+1)-(x_1+1)]^2=\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2.\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}(x_1+x_2)+2x_1x_2+1=0 & ④ \\ 4(x_1+x_2)^2-16x_1x_2-5=0 & ⑤\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x_1x_2=\dfrac{1}{4}, \\ x_1+x_2=-\dfrac{3}{2}; \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_1x_2=-\dfrac{1}{4}, \\ x_1+x_2=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

根据根与系数的关系，由③式，得

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \dfrac{2a^2}{a^2+b^2}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{a^2(1-b^2)}{a^2+b^2}=\dfrac{1}{4}; \end{cases} \quad 或(\mathrm{II})\begin{cases} \dfrac{2a^2}{a^2+b^2}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{a^2(1-b^2)}{a^2+b^2}=-\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

解方程组（I）、（II），得

$$\begin{cases} a^2=2, \\ b^2=\dfrac{2}{3}; \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} a^2=\dfrac{2}{3}, \\ b^2=2. \end{cases}$$

故所求椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\frac{2}{3}}=1 \quad 或 \quad \frac{x^2}{\frac{2}{3}}+\frac{y^2}{2}=1.$$

【分析 2】 在得到含有参数 a、b 的关于x的二次方程后，我们把思维的触角直接伸向一元二次方程的求根公式，这就直接把a、b与x_1，a、b 与 x_2 联系起来，从而获得了一种新的解题思路。

【解法 2】 同解法1，得

$$(a^2+b^2)x^2+2a^2x+a^2(1-b^2)=0 \qquad ③$$

解方程③，得

$$x_1=\frac{-a^2+ab\sqrt{a^2+b^2-1}}{a^2+b^2},$$

$$x_2=\frac{-a^2-ab\sqrt{a^2+b^2-1}}{a^2+b^2} \qquad ④$$

则直线$y=x+1$与椭圆的交点为

$$P(x_1,\ x_1+1),\quad Q(x_2,\ x_2+1).$$

由题设$OP\perp OQ$,得

$$\frac{x_1+1}{x_1}\cdot\frac{x_2+1}{x_2}=-1 \qquad ⑤$$

把④式代入⑤式，整理，得

$$a^2+b^2=2a^2b^2 \qquad ⑥$$

由$|PQ|=\frac{\sqrt{10}}{2}$,得

$$(x_2-x_1)^2+[(x_2+1)-(x_1+1)]^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2,$$

即 $$(x_2-x_1)^2=\frac{5}{4} \qquad ⑦$$

把④式代入⑦式，得

$$\frac{4a^2b^2(a^2+b^2-1)}{(a^2+b^2)^2}=\frac{5}{4} \qquad ⑧$$

联立⑥式、⑧式，整理，得

$$\begin{cases}a^2+b^2=\dfrac{8}{3},\\[2ex] a^2b^2=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases}a^2=2,\\ b^2=\dfrac{2}{3};\end{cases}\qquad 或\ \begin{cases}a^2=\dfrac{2}{3},\\ b^2=2.\end{cases}$$

故所求椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\frac{2}{3}}=1, \qquad 或 \qquad \frac{x^2}{\frac{2}{3}}+\frac{y^2}{2}=1。$$

【评注】 本题是1991年全国高考数学文科压轴题．考查椭圆的性质，两点间距离公式，两条直线垂直条件，二次方程根与系数的关系及分析问题的能力．上述两法各有千秋，但解法1似较简捷．

例 2 已知抛物线$y^2=x+1$，定点$A(3,1)$，B为抛物线上任意一点，点P在线段AB上，且有$BP:PA=1:2$，当点B在抛物线上变动时，求P点的轨迹方程，并指出这个轨迹为哪种曲线？ （1986年全国高考数学文科题）

【分析 1】 本题所求动点在已知抛物线之外，我们可先设点$P(x, y)$，点$B(x', y')$．把问题化归为根据题设条件探求x'，y'关于x，y的函数关系式．

【解法 1】 $\because$ 点P为线段BA的定比分点，且定比$\lambda=BP:PA=1:2$（如图1-1），$\therefore$ 由定比分点公式可建立两动点坐标间的函数关系为

$$\begin{cases} x=\dfrac{x'+\dfrac{1}{2}\cdot 3}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2x'+3}{3}, \\ y=\dfrac{y'+\dfrac{1}{2}\cdot 1}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2y'+1}{3}. \end{cases}$$

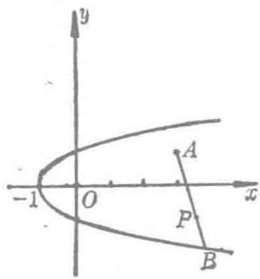

图 1-1

$$\Longrightarrow\begin{cases} x'=\dfrac{3x-3}{2}, \\ y'=\dfrac{3y-1}{2}. \end{cases}$$

又由于$B(x',y')$在已知抛物线上，即有$y'^2=x'+1$,可得轨迹方程为

$$\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right).$$

故所求动点的轨迹是抛物线.

【分析 2】 在寻求两个动点坐标之间的函数关系时，把思维空间开拓到复平面上，利用重要知识点：复数的向量表示，复数的三角形式，复数的模等等来考虑问题。

【解法 2】 把所给平面视为复平面,则$z_A=3+i$, $z_B=x'+y'i$, $z_P=x+yi$分别表示点A、B、P所对应的复数，向量$\overrightarrow{PB}$可看成由向量$\overrightarrow{PA}$按逆时针方向绕点P旋转180°，并把模缩小原来的$\frac{1}{2}$而得到的向量，于是有

$$\overrightarrow{PB}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PA}\cdot(\cos\pi+i\sin\pi),$$

$$z_B-z_P=\frac{1}{2}\cdot(z_A-z_P)\cdot(-1) \qquad ①$$

把复数z_A、z_B、z_P的值分别代入①式，化简得

$$(2x'-3x+3)+(2y'-3y+1)i=0.$$

$$\therefore\ \begin{cases} 2x'-3x+3=0 \\ 2y'-3y+1=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{3x-3}{2},\\ y'=\dfrac{3y-1}{2}.\end{cases}$$

∵ $B(x',y')$在已知抛物线上，即有$y'^2=x'+1$,可得轨迹方程为

$$\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right).$$

故所求的动点轨迹是抛物线。

【评注】 本题的两种解法，一是运用重要知识点：定比分点公式;另一种是运用重要知识点：复数的向量法.而作为贯穿两种方法的一根红线是：函数概念。这是代数中最为重要的知识点。

例 3 设椭圆的中心是坐标原点，长轴在 x 轴上，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,已知点$P\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$到这个椭圆上的点的最远距离是$\sqrt{7}$.求这个椭圆的方程，并求椭圆上到点 P 的距离等于$\sqrt{7}$的点的坐标。 （1990年全国高考数学理科题）

【分析 1】 运用椭圆的参数方程、离心率、椭圆上的点到点P 的距离公式、正弦函数的有界性及配方法等重要知识点求解。

【解法 1】 如图 1-2，根据题设条件，可取椭圆的参数方程是

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta.\end{cases}$$

其中$a>b>0$待定，$0\leqslant\theta<2\pi$。

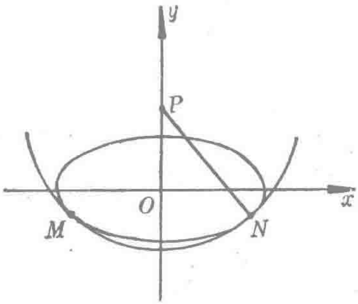

图 1-2

由 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2$,

可得 $\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$,

即 $a=2b$。

设椭圆上的点(x,y)到点P的距离为d，则

$$
\begin{aligned}
d^2&=x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2\\
&=a^2\cos^2\theta+\left(b\sin\theta-\frac{3}{2}\right)^2\\
&=a^2-(a^2-b^2)\sin^2\theta-3b\sin\theta+\frac{9}{4}\\
&=4b^2-3b^2\sin^2\theta-3b\sin\theta+\frac{9}{4}\\
&=-3b^2\left(\sin\theta+\frac{1}{2b}\right)^2+4b^2+3.
\end{aligned}
$$

如果 $\frac{1}{2b}>1$，即 $b<\frac{1}{2}$，则当$\sin\theta=-1$时d^2(从而d) 有

最大值，由题设，得

$$(\sqrt{7})^2=\left(b+\frac{3}{2}\right)^2,$$

由此得　$b=\sqrt{7}-\frac{3}{2}>\frac{1}{2}$，与 $b<\frac{1}{2}$矛盾.

因此必有　$\frac{1}{2b}\leqslant 1$成立.于是当 $\sin\theta=-\frac{1}{2b}$时 d^2（从而d）有最大值，由题设得

$$(\sqrt{7})^2=4b^2+3,$$

由此可得　$b=1$，$a=2$.

所求椭圆的参数方程是

$$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=\sin\theta.\end{cases}$$

由$\sin\theta=-\frac{1}{2}$，$\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得椭圆上的点 $M(-\sqrt{3},-\frac{1}{2})$，点$N\left(\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)$到点$P$的距离都是 $\sqrt{7}$.

【分析 2】　运用椭圆的直角坐标方程、离心率、椭圆上的点到点P的距离公式、配方法及关于参数b的讨论等重要知识点求解.

【解法 2】　设所求椭圆的直角坐标方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

其中$a>b>0$待定.

由　$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2$，可得

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2},$$

即 $a=2b$。

设椭圆上的点(x,y)到点P的距离为d，则

$$\begin{aligned}d^2&=x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2\\&=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)+y^2-3y+\frac{9}{4}\\&=4b^2-3y^2-3y+\frac{9}{4}\\&=-3\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+4b^2+3,\end{aligned}$$

其中 $-b\leqslant y\leqslant b$。

若$b<\frac{1}{2}$，则当$y=-b$时d^2(从而d)有最大值．由题设，得

$$(\sqrt{7})^2=\left(b+\frac{3}{2}\right)^2,$$

由此得 $b=\sqrt{7}-\frac{3}{2}>\frac{1}{2}$，与 $b<\frac{1}{2}$矛盾．

∴ 必有 $b\geqslant\frac{1}{2}$成立．于是当$y=-\frac{1}{2}$时d^2(从而d)有最大值．由题设，得

$$(\sqrt{7})^2=4b^2+3,$$

由此可得 $b=1,a=2$。

所求椭圆的直角坐标方程是

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

由$y=-\frac{1}{2}$及求得的椭圆方程,可得椭圆上的点$\left(-\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)$,与$\left(\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)$到点$P$的距离都是$\sqrt{7}$。

【分析3】 运用椭圆的直角坐标方程、离心率、圆的方程、判别式等重要知识点求解。

【解法3】 设点$P\left(0,\frac{3}{2}\right)$到椭圆上的点的最远距离是$d$,则以点$P$为圆心，$d$为半径的圆的方程是

$$x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=d^2 \qquad ①$$

设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

其中 $a>b>0$待定。

由 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $a=2b$。

∴ 椭圆方程可化为

$$\frac{x^2}{4b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad ②$$

联立①、②消去x，可得关于y的一元二次方程

$$3y^2+3y+d^2-\frac{9}{4}-4b^2=0 \qquad ③$$

令 $\Delta=0 \implies 3^2-4\cdot3\left(d^2-\frac{9}{4}-4b^2\right)=0$。

∴ $b^2=\frac{d^2-3}{4}>0$。

当 $d>\sqrt{3}$时，所求椭圆方程是

$$\frac{x^2}{d^2-3}+\frac{4y^2}{d^2-3}=1 \qquad ④$$

取 $d=\sqrt{7}$ 时，椭圆方程是 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

由方程③有重根，不难解出所求点的坐标为 $\left(\pm\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)$.

【评注】 上述三法从运用重要数学知识点的思维角度，广泛联想，从而较深刻地揭示了知识点之间的内在联系.三法相比，解法1、2属常规解题思路，解法3属相切法，联想巧妙，得到的方程④是含参数d的方程。相切法是“解几”* 中求最值时常用的方法。

2. 运用基本数学方法培养一题多解能力

初等数学基本的数学方法，有配方法、待定系数法、换元法、公式法、综合法、分析法、反证法、参数法、数学归纳法，以及某些章节的特定方法，如论证不等式时的放缩法、排列组合中的元素分析法、位置分析法、数列中的错项相减法、颠倒相加法、“解几”中的求轨迹的方法、复数中的利用“复数相等条件”的方法，等等。倘若把这些方法融会贯通，则可收到妙解纷呈之效。

例 4 如图1-3，在三棱台$A_1B_1C_1-ABC$中，已知$A_1A\perp$底面ABC，$A_1A=A_1B_1=B_1C_1=a$，$B_1B\perp BC$，且B_1B和底面ABC所成的角是45°. 求这个棱台的体积。

---

* “解几”是解析几何的简称.同样，“立几”是立体几何的简称，“平几”是平面几何的简称.