理 論 力 學

3

浙江大學理論力學教研組編

理 論 力 學

第 二 册

浙江大學理論力學教研組編

1956.4.

運動學目錄

運　動　學

第十二章　點的直綫運動

12-1　導言

理論力學是研究物體機械運動——物體在空間位置的改變——的科學。運動學是理論力學的一部份，在運動學中我們撇開運動的物理本質，純从几何觀點來研究物體的運動。由于運動學是完全建立在几何學的基礎上，因此它的創立和發展無需另外建立新的物理原理。

運動是物質不可分割的屬性，而一切運動又或多或少地與某種位置的變動相聯繫着。爲着充分地研究物體的機械運動，我們必須研究物體在空間中的位置以及位置隨時間而變化的規律。這樣，物體的位置就必然與時間、空間的概念緊緊地聯系在一起。因此說：**時間、空間與運動是物質存在的形式。**

物體在空間中的位置，運動學中常用座標來表示；而時間則以 1 秒 $=\frac{1}{24\times3600}$ 平均太陽日爲其單位。

由經驗知道：物體在空間中運動的情况，與觀察者所在的位置有關。對不同的觀察者，同一物體在同一時間，可能觀察出不同的運動。常見的例子；如：固結于運動車廂的物體，對車廂中不動的乘客看來是靜止的；但對在地面上的人看來却是隨着車廂而運動；又如在運動車廂中下落的物體對乘客看來是直綫運動但對在地面上的人看來却是拋物綫運動。因此，所謂**運動**與**靜止**實質上都是相對的概念；必須與觀察者的立場并列而提。在運動學中爲着紀錄物體的運動，通常采取一座標系統使與觀察者相聯系。如物體在某座標中的位置不隨時間而變，則稱物體對這座標系處于**靜止**；反之則稱爲物體對這座標系處在**運動**狀態。最常用的座標系是與地球相聯繫的座標系。

對這樣的座標系地球被認爲不動，而一切物體的運動都相對于地球來說。以后在某些場合下我們也需要采取對地球是運動的座標系。

本講義中將从質點的運動着手研究。在質點運動學中的基本問題是：

(1) **軌跡**——動點在空間所經過的路綫。

(2) **運動方程式**——質點的位置隨時間變化的規律。

(3) **速度**——位移對時間的變化率，

(4) **加速度**——速度對時間的變化率。

本講義中運動學作爲理論力學的一部份來研究。在這里，僅討論運動的結果，而不研究其原因。在動力學中，將把運動的結果與產生運動的原因聯系起來，因此運動學是動力學的基礎；同時，在高等工業學校中運動學又爲機械原理、機械另件、透平機、起重機、切削機床等課打下根底。隨着社會生產力的向前發展，要求我們設計出更高度地機械化和自動化的機器，以提高勞動生產率，這就要求我們具備精湛的運動學的知識。

12-2 直線運動的運動方程式 運動圖

軌跡爲直綫的質點運動稱爲直線運動。

取軌跡直線爲 x 軸（圖 12—1），在軸上任選一點爲原點。質點在直綫

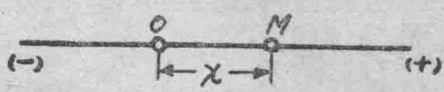


圖 12-1

上的位置可藉横座標 OM＝x 來確定。對應于任意時間 t，質點在軸上都有相應的位置；而當質點从一點移到另一點時，必依次地經過這兩點間的任何點，因此座標必爲時間 t 的單值連續函數，表示爲：

$$x = f(t) \qquad (12\text{—}1)$$

上式表示動點位置隨時間而變化的規律，稱爲點 M 的**運動方程式**或**運動規律**。對應于不同的運動規律，動點在直綫上亦有不動的運動。如把不同的時間 t 代入運動方程式，則可算出對應時間動點至原點的距離。工程

上爲着一目了然地看出質點運動的規律，常采用圖解法：取横軸表示時間t，縱軸表示位置座標 x，作出函數 $x=f(t)$ 的圖形，則得表明位置——時間，關係的曲線稱爲**運動圖**。

【例12—1】點 M 从 MO 出發沿半徑爲 a 的圓周運動（圖 12—2）。設 M 繞圓周一周所需的時間爲T。求該點在直徑 OM 。上投影 m 的運動規律；并作出運動圖。

【解】：取OX軸使沿投影的直徑，圓心爲原點。設在t時間內半徑OM 的角位移爲φ，顯然有：$\varphi=\frac{2\pi}{T}t$ 此時投影m的座標可由直角三角形 OMm 中得到：

$$x=a\cos\varphi=a\cos\frac{2\pi}{T}t$$

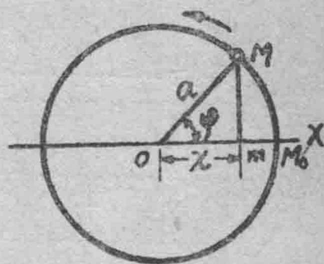


圖 12-2

這就是所求的運動規律。這種運動稱爲簡諧振動，a 稱爲振幅，O 稱爲振動中心，$\varphi=\frac{2\pi}{T}t$ 稱爲位相，T稱爲振動週期。

進而作簡諧振動的運動圖。爲此將T分爲若干等分（今作八等分），代入運動方程式中，算得相應的 x 值列于下表：

t	o	$\frac{1}{8}T$	$\frac{1}{4}T$	$\frac{3}{8}T$	$\frac{1}{2}T$	$\frac{5}{8}T$	$\frac{3}{4}T$	T
x	a	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	o	$-\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$-a$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}a$	o	a

取座標 xot（圖 12—3）。按比例在横軸上標出時間 t，在縱軸上標出相應的位置 x，這樣可確定九个點子。以曲綫連接這些點即得運動圖，顯然得到的是余弦曲綫。

12-3　直線運動的速度　速度圖

設在時間間隔 $\triangle t$ 內點移動了距離 $\triangle x$，我們取比值 $\frac{\triangle x}{\triangle t}$ 以表示點運動快慢的程度，稱爲點在 $\triangle t$ 時間內的平均速度。如在不同的時間間隔中比

值$\frac{\triangle x}{\triangle t}$爲常數，則這種運動稱爲**等速運動**；比值$\frac{\triangle x}{\triangle t}$稱爲等速運動的速度，表示爲：

$$V=\frac{\triangle x}{\triangle t}=\text{常數} \qquad (12\text{—}2)$$

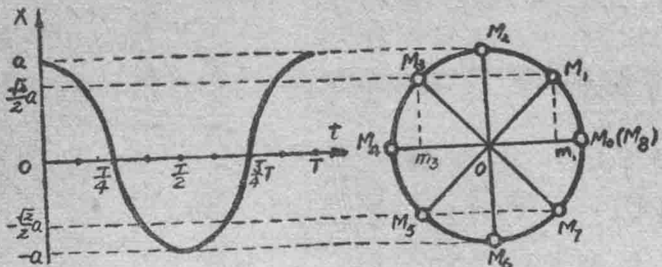


圖 12-3

在一般情況下比值$\frac{\triangle x}{\triangle t}$并非常數，這種運動稱爲**變速運動**。在這種情形下比值$\frac{\triangle x}{\triangle t}$已不能說明點在某一瞬時運動的快慢程度，而僅能表示點在時間間隔 $\triangle t$ 內平均快慢的程度，即**平均速度**。爲了說明變速運動的質點在某一瞬時運動眞正快慢的程度，應取 $\triangle t$ 儘可能小。當趨于零時，比值$\frac{\triangle x}{\triangle t}$的極限就能代表某一瞬時運動的眞正快慢的程度，稱爲**眞速度**或**瞬時速度**，表示爲

$$V=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle x}{\triangle t}=\frac{dx}{dt}=f'(t) \qquad (12\text{—}3)$$

可見速度是運動方程式對時間的一階導數。顯然等速運動只是變速運動的特殊情形。

由 (12—3) 式可推出速度的因次及單位爲：

$$[V]=\frac{\text{長度}}{\text{時間}}=\frac{\text{米}}{\text{秒}}=[\text{米}][\text{秒}]^{-1}$$

如 $\triangle t=1$，$\triangle x=1$，則 $V=1$。因此，速度的單位是米／秒，亦卽每秒內產生1米位移的速度。在(12—3)式中 $\triangle x=x-x_0$；如 $x_0>x$ 則 $\triangle x$ 爲負值，速度亦爲負值，表明運動沿着與座標軸的正向相反的方向。

在一般情形下速度亦爲時間的函數。如分別以不同的時間代入(12—3)式則得到相應的速度值。如運動圖一樣，工程上亦常用圖解法表示速度變化的規律：取橫軸表示時間，縱軸表示速度，作函數 $V=f'(t)$ 的圖形，則得表明速度——時間關係的曲綫稱爲**速度圖**。

【例12—2】求例12—1中簡諧振動的速度，并作速度圖。

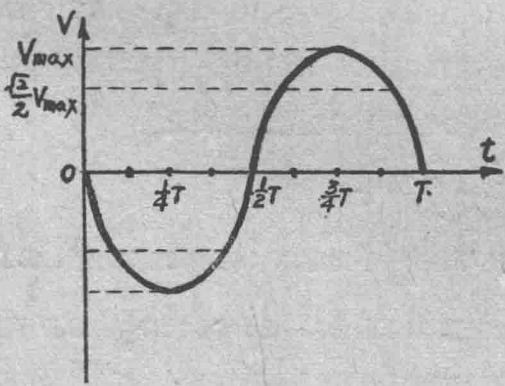


圖12-4

【解】：將上例求得的運動方程式 $x=a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ 對時間求一階導數，則得到速度方程式：

$$V=\frac{dx}{dt}=-\frac{2\pi a}{T}\operatorname{Sin}\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

因正弦函數的絕對值最大等于1，故从上式可知：

$$\left|V\max\right|=\frac{2\pi a}{T}$$

如同例12—1，將T分作八等份而代入速度方程式中，求得對應的速度值，列于下表：

t	o	$\frac{1}{8}T$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}T$	$\frac{1}{2}T$	$\frac{5}{8}T$	$\frac{3}{4}T$	$\frac{7}{8}T$	T
v	o	$-\frac{\sqrt{2}}{2}V_{max}$	$-V_{max}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}V_{max}$	o	$\frac{\sqrt{2}}{2}V_{max}$	V_{max}	$\frac{\sqrt{2}}{2}V_{max}$	o

取座標 otv，作速度——時間曲綫，即得速度圖（圖 12—4），可見簡諧振動的速度圖爲一正弦曲綫。

12-4 直線運動的加速度，加速度圖

在變速運動中速度要隨時間而改變，設在時間間隔 $\triangle t$ 內，速度的改變量爲 $\triangle t$，比值$\frac{\triangle v}{\triangle t}$表示速度變化快慢的程度，稱爲點在 $\triangle t$ 時間內的平均加速度。如在不同的時間間隔內此比值爲一常數，這種運動稱爲**等變速運動**；$\frac{\triangle v}{\triangle t}$稱爲等變速運動的加速度，表示爲：

$$W=\frac{\triangle v}{\triangle t}=\text{常數} \tag{12—4}$$

在一般情形下，$\frac{\triangle v}{\triangle t}$不爲常數，稱爲非等變速運動。爲了研究非等變速運動的眞正加速度，必須令 $\triangle t$ 趨近于零。此時$\frac{\triangle v}{\triangle t}$的極限稱爲**眞加速度**或**瞬時加速度**，表示爲：

$$W=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle v}{\triangle t}=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t) \tag{12—5}$$

可見加速度是速度方程式對時間的一階導數；或，運動方程式對時間的二階導數。顯然等變速運動不過是其特例。

由 (12—5) 或可推出加速度的因次及單位爲：

$$[W]=\frac{\text{速度}}{\text{時間}}=\frac{\text{米}}{\text{秒}}\div\text{秒}=[\text{米}][\text{秒}]^{-2}$$

加速度爲正值時，表示加速度是沿着 x 軸的正方向，速度的代數值隨時間增加（動點的正速度增大或負速度減小）；反之，加速度爲負值時，表示加速度是沿着 x 軸的負方向。

如同運動圖、速度圖一樣，加速度亦可用圖解法表示：取橫軸表示時間，

縱軸表示加速度。作函數 $w=f''(t)$ 的圖形，則得表明加速度——時間關係的曲綫，稱爲**加速度圖**。

【例12-3】求例 12—1 簡諧振動的加速度，并作加速度圖。

【解】:
$$W=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{4\pi^2 a}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t=-\frac{4\pi^2}{T}x$$

由上列結果可見簡諧振動的加速度與點到振動中心的距離成正比。當最大時加速度亦最大；當點經過振動中心時加速度爲零。以不同時間代入加速度方程式，求得加速度之值列于下表：

t	o	$\frac{1}{8}T$	$\frac{1}{4}T$	$\frac{3}{8}T$	$\frac{1}{2}T$	$\frac{5}{8}T$	$\frac{3}{4}T$	$\frac{7}{8}T$	T
w	$\frac{-4\pi^2 a}{T}$	$\frac{-2\sqrt{2}\pi^2 a}{T}$	o	$\frac{2\sqrt{2}\pi^2 a}{T}$	$\frac{4\pi^2 a}{T}$	$\frac{2\sqrt{2}\pi^2 a}{T}$	o	$\frac{-\sqrt{2}\pi^2 a}{T}$	$\frac{-4\pi^2 a}{T}$

取座標 wot 作加速度圖，顯然爲一余弦曲綫（圖12—5）。

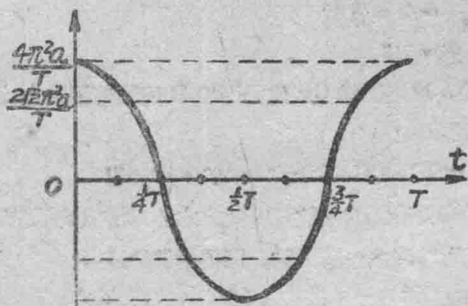


圖 12-5

12-5 運動方程式、速度、加速度間的解析關係及其求法

綜合前面討論的結果我們得到：

$$x=f(t)$$

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$$

通常運動方程式可藉機構的几何關係求得，這樣我們就可以按照求導數

的法则求得速度方程式和加速度方程式。

【例12-4】曲柄連桿機構（圖12—6），曲柄長 OA=r，連桿長 AB=l，曲柄以等角速度ω繞固定軸 O 轉動。求在圖方位置時滑塊B的速度和加速度。

【解】：設以φ表示曲柄在時間間隔 t 內轉動的角度，根据題意中等。用速度的假設可得：

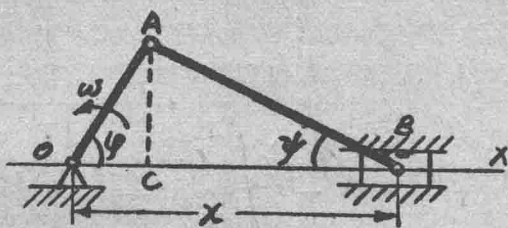


圖 12-6

$$\frac{\varphi}{t}=\omega=\text{常數}$$

或 $\varphi=\omega t$

以 O 為原點，取座標軸 Ox 使與滑塊 B 的軌跡相重合，滑塊在瞬時 t 的位置可表示為：

$$x=OB=OC+CB=r\cos\varphi+l\cos\psi$$

其中φ與ψ均為時間的函數。因此上式即為滑塊的運動方程式。將運動方程式對時間求一階導數，則得滑塊的速度：

$$V=\frac{dx}{dt}=-\left(r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}+l\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

而$\frac{d\varphi}{dt}=\omega$，又 $AC=r\sin\varphi=l\sin\psi$，將此關係式對時間微分一次，即得導數$\frac{d\psi}{dt}$：

$$r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}=l\cos\psi\frac{d\psi}{d\tau}$$

以ω替代上式中的$\frac{d\varphi}{dt}$移項得到：$\frac{d\psi}{dt}=\frac{r\omega\cos\varphi}{l\cos\psi}$

將導數$\frac{d\psi}{dt}$、$\frac{d\varphi}{dt}$代入速度中，即可得到滑塊的速度為：

$$V=-r\omega\left(\sin\varphi+\sin\psi\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\right)=-r\omega\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}$$

从關係式 $r\sin\varphi=l\sin\psi$ 中，我們得到：

$$\cos\psi=\sqrt{1-\sin^2\psi}=\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\psi}$$

通常在曲柄連桿機構中，連桿的長度比曲柄的長度大五、六倍。這樣，从上列關係式中有足够的准確度可以把 $\cos\psi$ 看作等于 1。于是得：

$$v=-r\omega(\sin\varphi+\sin\psi\cos\varphi)=-r\omega\left(\sin\varphi+\frac{r}{l}\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

$$=-r\omega\left(\sin\varphi+\frac{r}{2l}\sin^2\varphi\right)$$

將速度的近似方程式對時間求一階導數，即得滑塊的加速度的近似公式如下：

$$w=\frac{dv}{dt}=-r\omega\left(\cos\varphi+\frac{r}{2l}\sin 2\varphi\right)\frac{d\varphi}{dt}$$

$$=-r\omega^2\left(\cos\varphi+\frac{r}{2l}\sin 2\varphi\right)$$

藉高等數學的知識，我們亦可解決上述問題的逆問題：已知加速度方程式求速度方程式與運動方程式。這只要將加速度方程式對時間作一次及二次積分。

由等式 $\frac{dv}{dt}=w$ 得：$dv=wdt$

兩邊作定積分得：

$$\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t wdt \qquad \text{或} \qquad v=v_0+\int_0^t wdt \qquad (12\text{—}6)$$

式中 v_0 是在瞬時 $t=0$ 時，動點的速度。

但 $\frac{dx}{dt}=v$ 因而得：$dx=vdt$

兩邊再作定積分得：

$$\int_{x_0}^{x}dx=\int_0^t vdt \qquad \text{或} \qquad x=x_0+\int_0^t vdt \qquad (12\text{—}7)$$

式中 x_0 是在瞬時 $t=0$ 時，動點的座標。

特殊情形：如爲等變速運動則 $w=$ 常數，代入(12—6)式得：

$$v=v_0+wt \tag{12—8}$$

再代入(12—7)式得：

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}wt^2 \tag{12—9}$$

【例12-5】物體在眞空中从高度 $h=10$ 米處自由落下，求到達地面的時間及速度。

【解】：由物理學得知，眞空中的落體有一向下的重力加速度 $g=9.8$ 米／秒²。取開始下落位置爲原點，并取 x 軸爲鉛直向下（圖12—7）。將 $w=g$ 代入(12—6)式中得：

$$v=v_0+\int_0^t gdt=v_0+gt$$

再代入(12—7)式中得：

$$x=x_0+\int_0^t (v_0+gt)dt=x_0+v_0t+\frac{1}{2}gt^2$$

圖 12-7

但根据假設：$t=0$ 時 $v_0=0$，$x_0=0$，于是得：

$$v=gt \quad (1); \qquad x=\frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

當落到地面時 $x=h$，于是由(2)式得：

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \qquad 故\ t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\times10}{9.8}}=1.43\ 秒$$

代入(1)式得：

$$v=9.8\times1.43=14\ 米／秒$$

12-6 運動方程式、速度、加速度間的幾何關係

按前節結果，我們得到運動方程式、速度方程式、加速度方程式間的解析關係爲：

$$x=f(t) \qquad v=v_0+\int_0^t w\,dt$$

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t) \qquad x=x_0+\int_0^t v\,dt$$

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$$

又在以前各節中，已討論了運動方程式、速度方程式、加速度方程式的圖解（運動圖、速度圖、加速度圖），現在進一步來研究這些圖解之間的關係。由解析几何知道，函數的導數就等于切線與橫座標軸交角的正切。因此，變速運動的眞速度和眞加速度的數值分別等于運動圖和速度圖的切綫與時間軸所成交角的正切，亦卽各該對應點的斜率（圖 12—8，圖 12—9）。表示爲：

$$v=\mathrm{tg}\,\alpha \qquad ; \qquad w=\mathrm{tg}\,\gamma$$

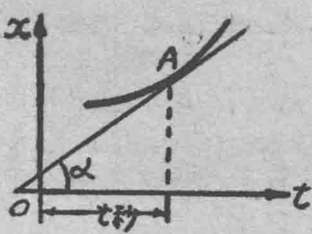


圖 12-8

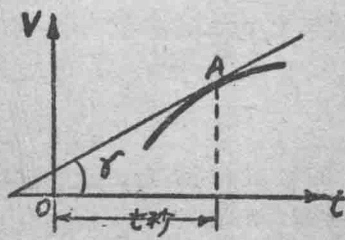


圖 12-9

上述結果僅當運動圖，速度圖中 x、v 和 t 的值以同一比例尺表示時才爲正確。設三者采用不同的比例尺，如以 σ、β 與 τ 分別表示 x、v 與 t 的比例尺，則上式應改成：

$$v=\frac{\sigma}{\tau}\mathrm{tg}\,\alpha \qquad ; \qquad w=\frac{\beta}{\tau}\mathrm{tg}\,\gamma$$

由高等數學可知，函數的定積分等于曲綫，橫軸以及兩端的縱座標所包含的面積。因此，加速度圖（或速度圖）中，由時間軸，加速度曲綫以及兩端的縱座標所包含的面積，等于速度圖（或運動圖）中對應于兩端的縱距的差。

从上述結論，我們極易从已知一種圖解出另外兩个圖解。這種方法常應用于當運動方程式的函數關係爲未知時求質點的速度與加速度。

【例 2—6】電梯上開時的速度圖如圖 12—10 所示。求在下列三个時間間隔內電梯的加速度和位移：(1)由 $t=o$ 到 $t=2$ 秒；(2)由 $t=2$ 秒到 $t=8$ 秒；(3)由 $t=8$ 秒到 $t=10$ 秒；并作加速度圖和運動圖。

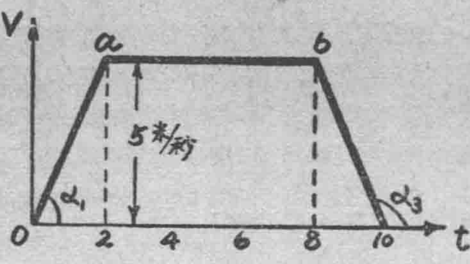


圖 12-10

【解】：根据上節結論，在第一段中速度圖爲一傾斜直綫，斜率爲一常數，故爲等加速運動。其加速度爲：

$$w_1=tg\alpha_1=\frac{5}{2}=2.5 \text{ 米/秒}^2$$

在第二段中速度圖爲一水平直綫，斜率爲零，故其加速度亦爲零，所以爲等速運動。

$$w_2=tg\alpha_2=0$$

在第三段中，速度圖爲一傾斜直綫，但 $\alpha_3>90°$，所以傾角的正切爲負值故爲等减速運動。

$$w_3=tg\alpha_3=-\frac{5}{2}=-2.5 \text{ 米/秒}^2$$

根据上述結果可作加速度圖（圖 12—11）。

又根据上節討論，在第一段中電梯的位移應等于速度圖下面的面積。故：

$$\triangle X_1=X_2-X_0=\text{面積 }\triangle(O2a)=\frac{1}{2}\times2\times5=5 \text{ 米}$$

同理，第二段位移爲：

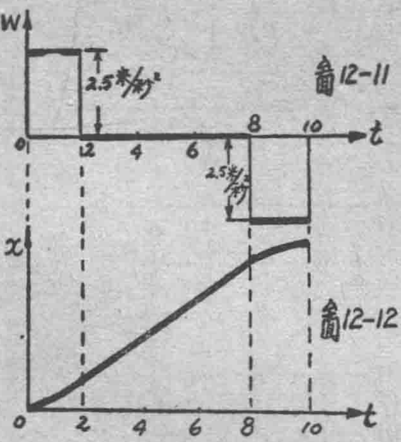
$$\triangle X_2 = X_8 - X_2 = \text{面積}\ \square(2ab8) = 6\times5 = 30\ \text{米}$$

第三段位移爲：

$$\triangle X_3 = X_{10} - X_8 = \text{面積}\triangle(8b10) = \frac{1}{2}\times2\times5 = 5\ \text{米}$$

總位移爲：

$$X = \triangle X_1 + \triangle X_2 + \triangle X_3 = 5+30+5 = 40\ \text{米}$$



根据上列結果可作運動圖（圖12—12）。在第一段中加速度爲一正常數，亦即運動方程式的二階導數爲一正常數，故運動圖爲一向上凹的拋物綫。在第二段中加速度等于零，亦即運動方程式二階導數等于零，故運動圖爲一直綫；而在此段中速度爲一正數，亦即運動方程式的一階導數爲一正數，故此直綫的斜率大于零，直綫向上傾斜。在第三段中，加速度爲負常數，故運動圖爲一向下凹的拋物綫。

【例12—7】起重機在加剎車后的速度圖如（圖 12—13）所示。試作出運動圖與加速度圖。

【解】：从圖中談出對應于瞬時 0.1 秒，0.2 秒，……，0.6 秒的速度大小，并列于表（一）。

t(秒)	v(米/秒)
0	1.19
0.1	1.13
0.2	1.01
0.3	0.82
0.4	0.57
0.5	0.29
0.6	0

（表一）

t(秒)	x(米)
0	0
0.1	0.116
0.2	0.223
0.3	0.314
0.4	0.384
0.5	0.427
0.6	0.441

（表二）

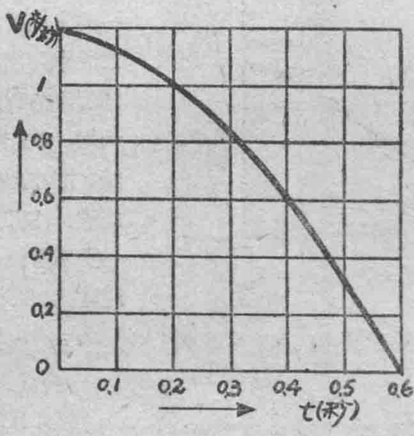


圖 12-13

先作運動圖。取開始剎車的位置作爲座標原點，則 t=o 時 $x_0=o$。取 0.1 秒作爲時間間隔，并近似地認爲在每一間隔中起重機均作爲等速運動，其速度等于這一間隔中的平均速度。這樣可以近似地計算出在每一間隔中起重機的位移。例如在 t=o 至 t=0.1 秒間隔中，其平均速度爲：