現代应用数学丛书

博 奕 論

〔日〕宫澤光一 著

張 毓 椿 譯

上海科学技术出版社

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展狀况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

序

1928 年 von Neumann 在論文 "Zur Theorie der Gesellshaftsspiele" (Math. Annalen, vol. 100) 中的想法，到 1944 年在他和 Morgenstern 合著的 "Theory of Games and Economic Behavior"一书以及該书 1947 年的第二版中形成了 2 人零和博奕的理論。从此出发，以 n 人博奕的結构分析为中心，建立了完整的体系。这一理論所研究的不是魯濱逊飄流在无人島上的行动，而是現实社会中彼此相互影响的各种活动的合理規律。当然可以想象，这一理論对于人类与自然界的斗爭，社会經济活动，軍事作战等方面都能应用。但是，从实际問題中抽象出来的博奕理論，在应用于实际問題时，由于現实情况远較博奕模型为复杂，因此还有很大困难。所以在开始时，博奕論似乎幷沒有重大的現实意义。

尽管如此，人們把难以掌握的竞爭活动的本质加以抽象化，終究是一項重要的成果。自从 1947 年到現在，又过去十余年了。在这期間，随着科学技术的迅速发展，博奕論也越来越与現实問題相接近。由于大型电子計算机的建立，高速計算工具的发展使复杂的博奕問題逐步具备求解的可能性。

1950 年出版了 "Contributions to the Theory of Games" 第 1 卷 (Annals of Math. Studies, Princeton)，1953 年出版了第 2 卷，1957 年出版了第 3 卷，現在第 4 卷亦已出版。特别是，由于最近运筹学的迅速发展，正表明博奕論在逐步发揮它的眞正作用。此外，在 1957 年末，Luce 和 Raiffa 合写了 "Games and Decisions" 一书，其中有詳細的文献目录，大有参考价值。

在博奕論正取得显著发展的时期，这本小册子的問世似乎是

适时的。作者认为 2 人零和博奕是最基本的，所以是要写的一个重点。但如不先明确效用的理論，就似乎很难讲透，因此先对效用作了簡洁的介紹。

要想从基本的一直介紹到現代成果，卽使仅就 2 人博奕而論也要占去很多的篇幅，何况 n 人博奕与非零和博奕的研究已远較 1947 年时期有了更大的发展。如果不接触到这些內容，又显示不出反映現代博奕理論的意图。因此，这里仅对博奕論中的合作关系以及 Nash 的理論作了一般性的介紹，开始接触到近代的理論。

最后，希望通过数学家和实际工作者的合作，大大促进博奕論的研究。

宮澤光一

1958 年 1 月

目　　录

第1章 博奕的构造

§1 博奕的規則

考慮由几个行动主体参加的竞爭。各主体都希望根据自己选定的方式来决定使自己能收到最大效果的行动方針。所謂竞爭，其意义就是各主体行动的結果不仅取决于自己的行动，而且还取决于其他主体的行动。同时，各主体的目的必須是互不相容或相互对抗的。在这种情况下，各主体的最好行动是什么，以及当各主体采取了在某种意义下最好的行动时，事态通过怎样的形式才能稳定，所有这些問題用数学方法来加以闡明，这就是 von Neumann 和 Morgenstern[7] 所創始的博奕理論。为此，有必要将支配竞爭的因素加以抽象化，并将这些因素的相互关系表为数学模型。由于室内游戏可看作是竞爭的最簡单例子，在此試先把它博奕模型化。

博奕是以几組規則作为特征的。它的規則中首先是指出参加博奕的主体（称为**局中人**）的数目，同时要指出**步法** (move) 的序列。步法有两种：(i)某特定局中人在允許的**选擇事項** (alternatives)中决定选擇其中一个而得的步法(如在奕棋中走一步棋子)，(ii) 不由局中人而由某一特定的机遇装置机械地从选擇事項中选定一項的步法(如在桥牌游戏中分給各局中人一定的牌数)。前者称为**人的步法** (personal move)，后者称为机遇步法 (chance move)。在人的步法时，选出的选擇事項称为**着** (choice)，在机遇步法中出現的选擇事項称为**运**(outcome)。

博奕的規則构成如下：对于步法，要求 (a)指出是人的步法还是机遇步法；(b)若是人的步法，指出哪个局中人所选擇的步法

以及当时允許选擇事項的集合是什么；(c)若是机遇步法，指明可能出現的运的集合以及各运能出現的概率。象这样，若直到第 $(k-1)$ $(k>1)$ 步法以前的所有步法都已經指明时，下一步对于作为前 $(k-1)$ 个步法的着和运的函数的第 k 步法，要指出：(a) 第 k 步法是人的步法还是机遇步法；(b)若为机遇步法，可能出現的运的集合和运出現的概率如何；(c)若为人的步法，可选擇事項的集合如何，是哪个局中人的步法，另外还要指出局中人选擇这一着时，一切能够获得的关于前 $(k-1)$ 个步法中所实現的着和运的信息。

最后，博奕的规则还要指出每个步法作为着与运的函数，博奕在何时終了，博奕在終了时，其成果是甚么。这里总假定博奕經过有限次的步法終了。根据以上的博奕規則，博奕到終了的某一次具体实現称为**局**(play)。

§2 博奕的树

博奕可用图形表示。設局中人 i 的某个步法允許在三个选擇事項中进行选取。将各选擇事項用由同一点出发，方向向上而端点在同一水平上的綫段表示，此时这个步法的状态如图 2.1。但是各步法用图 2.1 的图形表現时，博奕步法的意义是不明显的。博奕各个步法的意义主要在于它和其他步法的結合关系。因此各步法除用图 2.1 表示外，还必須表示各步法的着或者运与其他步法的結合关系。这样，博奕可用图 2.2 所示依次向上的綫段的連接体表示之。在此，各支点只由一个分支与低一級的一个支点連接，最低的支点只有一个，它表示第一步法。这样的图形称为**博奕的树** (game tree)。各等高排列的支点表示各个步法，由下而上順次称为第一步法，第二步法等等。各支点所标的数字 $1, 2, \cdots, n$ 表示其步

图 2.1

法是人的步法，且分别为局中人 1, 2, $\cdots$, n 的步法。支点所标的数字若是 0，則表示其为机遇步法。这样，在这个树上，分支終点的各点(卽由此不再有分支的点称为树的**頂点**)表示博弈的終結。

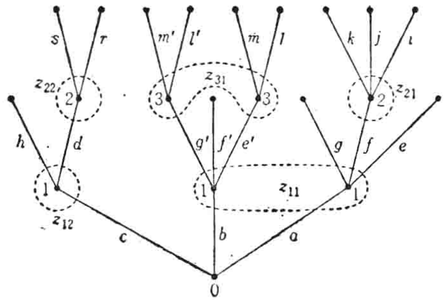

图 2.2

我們根据博弈的树来看一下图 2.2 所表示的博弈。第一步法是机遇步法，在此处假定由指定的机遇装置得出的运是 b。第二步法是局中人 1 的步法。若局中人选取 f'，則局終結。若局中人 1 选取 e'，則第三步法是局中人 3 的步法，在此，局中人 3 选取 l 或 m 而局終結。

这样，博弈的各局在博弈树上就表現为由最低的唯一的支点出发，經一些路綫而到达各分支的頂点，而且这样的路綫和博弈树的頂点是一一对应的。因此，博弈的可能的局的数目，就等于博弈树的頂点的数目。例如图 2.2 的树所表示的博弈，其局的总数是 13。

其次，各局中人在选擇他的步法时，根据博弈的規則，对于以前局中的过程持有一定的信息。这信息也希望能在图上表示。我們看一下图 2.2，把相当于人的步法的支点全体的集合分成用点綫圍成的子集合 z_{11}，z_{12}，z_{21}，z_{22} 和 z_{31}。这些子集合 z_{ij} 的全体用 Z 表示。例如支点集合 z_{11} 的意义是：局中人 1 知道第一步法取 a 或 b 时，第二步法是局中人 1 的步法，但是他所知道的也仅限于此，因为他不能知道第一步法到底取 a 还是取 b，所以也不知道自己現在位于第二步法的哪一点上，也就是說，他还不能判断自己位于集合 z_{11} 所含两个支点中的哪一个上。但这时局中人 1 知道在此

步法上自己可选取的事項是 e, f 和 g 三个。在集合 z_{11} 的另一支点，有用 e', f', g' 表示的可选取的分支，作为选擇事項来説，規定 $e=e', f=f', g=g'$. 这里对另一个选擇事項标以"′"，只是为了表示它是由不同的支点生出的。z_{11} 含有两个支点，如前所述，在第二步法，局中人 1 仅知道第一步法取 a 或 b，但究竟取其中的哪一个是不知道的，从而局中人 1 不能判断 e 和 e'，f 和 f'，g 和 g'. 也就是説，他只知道現在或是位于分支 a 的終止支点，要在 e, f, g 中进行选擇，或是位于分支 b 的終止支点，要在 e, f, g (卽图中的 e', f', g') 中进行选擇。支点集合 z_{12} 仅有一个支点，这是說局中人 1 完全知道第一步法取 c，第二步法是局中人 1 的步法，并且同时表示位于这个步法的局中人 1 的可选擇事項是 d 或 h. 其他集合 z_{ij} 所表示的意义也相同。

这样，对应于人的步法的支点全体的集合所分成的子集合 z_{ij}，可以表示博奕規則所給出的信息。这种集合 z_{ij} 称为**信息集合** (information set)。信息集合中所含的支点愈多，信息愈少；支点愈少，信息愈多。例如信息集合 z_{21} 仅含有一个支点，所以这时，在此步法的局中人 2 完全知道第一步法取 a，第二步法取 f，現在自己是处于第三步法上，且将从 i, j, k 中进行选擇。也就是信息集合 z_{21} 表示了局中人 2 知道自己位于这个步法，以及关于局的以前过程的完全信息。若某个博奕的所有信息集合都只有一个支点，这种博奕特别地称为**完全信息博奕** (perfect-information game) (如象棋，圍棋等)。

博奕树中对应于人的步法支点全体的集合的任一分割 $Z=\{z_{ij}\}$，要使其具有信息集合的性质，必須滿足一定的条件。我們要求的条件是：(1) 信息集合 z_{ij} 所含的各支点属于同一局中人 i 的步法；(2) 同一集合中各支点分出的分支数目相等；(3) 任何信息集合 z_{ij} 不能含有一个局的两个不同步法的支点，也就是，設 v_1

含于 z_{ij} 中，若支点 v_2 可由 v_1 沿着博奕树的一条路綫到达，则 v_2 不含于 z_{ij} 中。(另外必須注意，将博奕規則表現在树上的方法可以不止一种。)

最后考虑作为博奕构成的另一要素，卽各局結果所带来的局的成果。随着博奕規則的不同，可能有各种不同的成果。例如財物的輸贏，或单純决定胜負等等。博奕树的各頂点是局的可能終局点，这些点指出了相应的博奕的局。一般，以 t 表示这些博奕树的頂点。博奕規則还要求指出頂点集合 $\{t\}$ 与可能的成果集合 $\Omega=\{\omega\}$ 之間的一一对应关系，用 $\omega(t)$ 表示。

这样，我們可列出局中人数为 n 的博奕(称为 n **人博奕**) 的規則如下：

(i) 表示出各步法到其他步法的連接关系的树。

(ii) 相当于机遇集合的支点和相当于人的步法的支点，以及后一集合的信息集合分割。

(iii) 相当于机遇步法的支点 0 的所有可能运 (卽分支) 的集合(表現在博奕树上)，以及其上的概率分布。

(iv) 給出含于信息集合中各支点上的可能着 (卽分支) 的集合(表現在博奕树上)。

(v) 給出成果集合 Ω，以及各局(卽博奕树的各頂点 t)与 Ω 中元素对应的函数 $\omega(t)$.

§3 优　序

我們在前节叙述了博奕的規則可用博奕树来表示，可是并未談到博奕中局中人的作用。当然在提到人的步法是哪个局中人的步法时必須提出局中人来，但沒有涉及作为能使局进行的原动力，卽局中人的行动意图。只有明确了这个問題，博奕才可以进行。事实上，对于同一規則的博奕，如果参加博奕的局中人的行动方針

不同，則竞爭結果将有很大的差异。因此必須討論各局中人对于局的成果的擇优形式的問題。

設 Ω 是成果 ω 的集合，机遇裝置使其中有限个元素 ω_1, ω_2, $\cdots$, ω_n 出現的概率为 p_1, p_2, $\cdots$, p_n（在此 $p_i \geqslant 0$, $\sum p_i = 1$）. 或者将概率分布称为**賭**(gamble)，用 F 或 $F = \sum p_i \omega_i$ 表示。特別給元素 ω 出現的概率为 1 的賭，用 ω 表示。令 Ψ 为賭的全体的集合，同时假定某个特定的主体对于 Ψ 的各元素的賭，有滿足下面条件的优序关系 $\geqq$：

条件(i) (a) 对任意的 F_1, $F_2 \in \Psi$,

$F_1 \geqq F_2$ 或者 $F_2 \geqq F_1$；（两者也可同时成立.）

(b) $F_1 \geqq F_2$ 且 $F_2 \geqq F_3$，則 $F_1 \geqq F_3$.

此处关系 $F_1 \geqq F_2$（或者写作 $F_2 \leqq F_1$）或者表示选取的 F_1 比 F_2 好，或者表示 F_1 和 F_2 沒有差別。若 $F_1 \geqq F_2$ 而不是 $F_2 \geqq F_1$，則选取的 F_1 比 F_2 好，用 $F_1 \succ F_2$ 表示。若 $F_1 \geqq F_2$ 且 $F_2 \geqq F_1$，則 F_1 和 F_2 沒有差別，用 $F_1 \sim F_2$ 表示之。

很明显下面的各关系(1)至(3)是成立的：

(1) 关系"$\sim$"是等价关系。

(2) 对任意的 F_1, $F_2 \in \Psi$，关系 $F_1 \succ F_2$, $F_2 \succ F_1$ 或 $F_1 \sim F_2$ 中必有一个成立。

(3) 若 $F_1 \succ F_2$ 且 $F_2 \geqq F_3$，則 $F_1 \succ F_3$.

有限个賭 F_j ($j=1, 2, \cdots, k$)，可以按下面的意义組合起来：設

$$F_j = \sum_i p_{ij} \omega_{ij} \quad (j=1, 2, \cdots, k),$$

$\sigma_j (j=1, \cdots, k)$ 是滿足 $\sigma_j \geqslant 0$, $\sum \sigma_j = 1$ 的任意实数。$F_j (j=1, \cdots, k)$ 的組合用 $\sum \sigma_j F_j$ 表示，用下式(3.1)定义所給的賭：

$$\sum_j \sigma_j F_j = \sum_i \sum_j (\sigma_j p_{ij}) \omega_{ij}. \tag{3.1}$$

由 $\omega_{ij}\in\Omega$, $\sigma_j p_{ij}\geqslant 0$, $\sum\limits_i\sum\limits_j(\sigma_j p_{ij})=1$, 容易看出它是賭。

联系着賭的組合,假定下面条件:

条件(ii) 設 $F, G, H\in\Psi$, $0<\rho\leqslant 1$, 若 $F\preceq G$, 则

$$\rho F+(1-\rho)H\preceq\rho G+(1-\rho)H \tag{3.2}$$

(在此 $\preceq$ 表示,若 $F\prec G$, 则(3.2)也是 $\prec$, 若 $F\sim G$, 则 (3.2) 也是$\sim$)。

条件 (iii) 对于 $F_1, F_2, F_3\in\Psi$, 若 $F_1\prec F_2\prec F_3$, 则存在 $0<\lambda<1$, $0<\mu<1$ 的实数 λ, μ, 满足下面条件:

$$\lambda F_1+(1-\lambda)F_3\prec F_2, \tag{3.3}$$

$$\mu F_1+(1-\mu)F_3\succ F_2. \tag{3.4}$$

关于賭的优序关系在以上条件(i)至(iii)的假定下,得出下面的諸結果。

定理 3.1 若 $F\sim F'$, $G\sim G'$, 则对于任意实数 ρ, $0\leqslant\rho\leqslant 1$, 下面关系成立:

$$\rho F+(1-\rho)G\sim\rho F'+(1-\rho)G'. \tag{3.5}$$

証明 由条件(ii),

$$\rho F+(1-\rho)G\sim\rho F'+(1-\rho)G,$$

且
$$\rho F'+(1-\rho)G\sim\rho F'+(1-\rho)G'.$$

所以由关系(1)推知(3.5)成立。　証毕

定理 3.2 若 $F\prec G$ 且 $0\leqslant\sigma<\rho\leqslant 1$, 则

$$\rho F+(1-\rho)G\prec\sigma F+(1-\sigma)G. \tag{3.6}$$

証明 如果 $\sigma\neq 0$, $\rho\neq 1$, 则可作如下的变换:

$$\rho F+(1-\rho)G=(\rho-\sigma)F+\{1-(\rho-\sigma)\}\left\{\frac{\sigma}{1-(\rho-\sigma)}F+\frac{1-\rho}{1-(\rho-\sigma)}G\right\},$$

$$\sigma F+(1-\sigma)G=(\rho-\sigma)G+\{1-(\rho-\sigma)\}\left\{\frac{\sigma}{1-(\rho-\sigma)}F+\frac{1-\rho}{1-(\rho-\sigma)}G\right\}.$$

因此由条件(ii)推知(3.6)成立。而当 $\sigma=0$ 且 $\rho=1$ 时，(3.6)显然成立。 証毕

定理 3.3 若 $F_1 \prec F_2$ 且 $F_1 \prec G \prec F_2$，则存在唯一的实数 ρ，$0<\rho<1$，使

$$\rho F_1+(1-\rho)F_2 \sim G. \tag{3.7}$$

証明 由定理 3.2 和实数的性质，存在唯一的实数 ρ_0，满足下面条件:

$$\lambda F_1+(1-\lambda)F_2 \prec G, \text{ 当 } 1 \geqslant \lambda > \rho_0 \text{ 时}, \tag{3.8}$$

$$\mu F_1+(1-\mu)F_2 \succ G, \text{ 当 } 0 \leqslant \mu < \rho_0 \text{ 时}. \tag{3.9}$$

所以若存在使(3.7)成立的实数 ρ，那么这个数非是 ρ_0 不可。現在証明

$$H \equiv \rho_0 F_1+(1-\rho_0)F_2 \sim G. \tag{3.10}$$

若(3.10)不成立，则 $H \prec G$ 或 $H \succ G$. 現設 $H \prec G$，那末取 $0<\mu<\rho_0$ 的任意实数 μ，由(3.9)，

$$K \equiv \mu F_1+(1-\mu)F_2 \succ G. \tag{3.11}$$

所以 $H \prec G \prec K$，由条件(iii)，存在实数 λ，$0<\lambda<1$，使

$$\lambda H+(1-\lambda)K \prec G,$$

即

$$[\lambda\rho_0+\mu(1-\lambda)]F_1+\{1-[\lambda\rho_0+\mu(1-\lambda)]\}F_2 \prec G. \tag{3.12}$$

但 $0<\lambda\rho_0+\mu(1-\lambda)<\rho_0$，因而 (3.12) 的成立和 ρ_0 的性质 (3.9) 相矛盾，故不可能是 $H \prec G$. 同样也可証明不可能是 $H \succ G$. 从而(3.10)成立。 証毕

§4 效用函数

本节探討在第 3 节中所述的賭的优序关系如何用数的大小表示的問題。

定义 4.1 所謂某主体的**效用**(utility)(或**效用函数**) U，是定

义在成果集合 $\Omega=\{\omega\}$ 上的有界实函数，对于任意的两个赌 $F_1=\sum p_{1i}\omega_{1i}$ 和 $F_2=\sum p_{2j}\omega_{2j}$，关系 $F_1\leqq F_2$ 与

$$\sum_i \rho_{1i}U(\omega_{1i})\leqslant\sum_j \rho_{2j}U(\omega_{2j}) \tag{4.1}$$

等价。

对于任意的赌 $F=\sum p_i\omega_i$，数值 $\sum p_iU(\omega_i)$ 称为 F 的**期望效用**(expected utility)，或者簡称为赌 F 的效用，用 $U(F)$ 表示。所以(4.1)的条件可写为 $U(F_1)\leqslant U(F_2)$。

問題在于这样性质的效用函数 U 是否存在，如果存在的話又有多少个，以及它們之間成立怎样的关系。为了証明存在定理的方便，按照下面的顺序进行思考。首先，明显地成立着下面的定理：

定理 4.1 設 Ω 上的效用函数 U 存在，并設 α, β 为任意实数。对于 $\alpha>0$，函数

$$U'=\alpha U+\beta \tag{4.2}$$

也是效用函数。(这个效用函数 U' 称为效用函数 U 用正一次变换所得的效用函数。)

由定理 4.1 可直接推出下面的系：

系 4.1 当效用函数存在，若 F, G 是两个赌，且 $F\prec G$，则对于任意两个实数 a, $b\,(a<b)$，存在效用函数 U，使得

$$U(F)=a,\quad U(G)=b.$$

定理 4.1 是說效用的任意增綫性函数仍是效用。下面定理 4.2 是說它的逆定理也成立，卽任意的两个效用函数，互为增綫性函数，亦卽一个是另一个的正一次变换。

定理 4.2 設 U 和 U' 是 Ω 上的两个效用函数，则存在两个实数 α, β，且 $\alpha>0$，使

$$U'=\alpha U+\beta. \tag{4.3}$$

証明 首先証明对于任意的三个成果 ω_1, ω_2, $\omega_3\in\Omega$，下面的恒等式(4.4)成立：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ U(\omega_1) & U(\omega_2) & U(\omega_3) \\ U'(\omega_1) & U'(\omega_2) & U'(\omega_3) \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.4)$$

若成果 ω_1, ω_2, ω_3 中有任意两个相等,则(4.4)左边的行列式有二列相等, 从而(4.4) 成立。如果不是这样, 不失一般性, 假定 $\omega_1 \prec \omega_2 \prec \omega_3$, 则由定理 3.3 可知,存在着实数 ρ, $0<\rho<1$, 使

$$\rho\omega_1 + (1-\rho)\omega_3 \sim \omega_2.$$

由此,根据效用函数的定义,

$$\begin{aligned} 1 &= \rho\cdot 1 + (1-\rho)\cdot 1, \\ U(\omega_2) &= \rho U(\omega_1) + (1-\rho)U(\omega_3), \\ U'(\omega_2) &= \rho U'(\omega_1) + (1-\rho)U'(\omega_3). \end{aligned} \qquad (4.5)$$

从而(4.4)左边行列式的第 2 列是第 1 列与第 3 列的綫性組合,所以(4.4)成立。

現在将 ω_1, ω_2 看作是任意的固定的 $\omega_1 \prec \omega_2$ 的成果, 对任意的成果 $\omega_3 \in \Omega$, 展开等式(4.4), 可得下面的等式:

$$[U(\omega_1)U'(\omega_2) - U'(\omega_1)U(\omega_2)] - U(\omega_3)[U'(\omega_2) - U'(\omega_1)] + U'(\omega_3)[U(\omega_2) - U(\omega_1)] = 0,$$

因此关系式

$$U'(\omega_3) = \frac{U'(\omega_2) - U'(\omega_1)}{U(\omega_2) - U(\omega_1)} U(\omega_3) - \frac{U(\omega_1)U'(\omega_2) - U'(\omega_1)U(\omega_2)}{U(\omega_2) - U(\omega_1)} \qquad (4.6)$$

对任意的 $\omega_3 \in \Omega$ 都成立, 同时(4.6)右边 $U(\omega_3)$ 的系数的分子分母都是正的,所以定理得証。 証毕

由定理 4.2 可直接得出下面的系。

系 4.2 若 Ω 上的二个效用函数 U 及 U', 对 $\omega_1, \omega_2, \omega_1 \prec \omega_2$, 有

$$U(\omega_1) = U'(\omega_1) \text{ 且 } U(\omega_2) = U'(\omega_2),$$

则 U 和 U' 一致,即对任意的 $\omega\in\Omega$, $U(\omega)=U'(\omega)$.

下面給出几个定义:

在賭的集合 Ψ^* 上, 对于任意的 F, $G\in\Psi^*$ 和任意的实数 ρ, $0\leqslant\rho\leqslant 1$, 如果有 $\rho F+(1-\rho)G\in\Psi^*$, 則称集合 Ψ^* 为凸集。

对两个固定賭 G, H, $G\leqq H$, 滿足 $G\leqq F\leqq H$ 的 F 全体的集合,称为有端点 G, H 的賭的区間。

賭的凸集 Ψ^* 上的**超效用函数** (hyper-utility function) V 是定义在 Ψ^* 上的有界实函数,并滿足下列条件:

(i) F, $G\in\Psi^*$ 时, $F\leqq G$ 和 $V(F)\leqslant V(G)$ 等价。

(ii) F, $G\in\Psi^*$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$ 时,

$$V[\rho F+(1-\rho)G]=\rho V(F)+(1-\rho)V(G). \tag{4.7}$$

根据这些定义,下列各命题是显然的。

(1) 所有賭的集合 Ψ 都是凸的。

(2) 賭的两个凸集的交是凸的。

(3) 賭的区間是凸的。另外存在着含有有限个任意的賭的区間。

与推导系 4.1, 4.2 一样,下面命题成立:

(4) 若賭的凸集 Ψ^* 上的超效用函数存在, 当 F, $G\in\Psi^*$, $F\prec G$ 时,只存在唯一的一个超效用函数 V, 使得 $V(F)=0$, $V(G)=1$.

輔助定理 4.1 在由任意两个賭 F_1, F_2, $F_1\prec F_2$ 所确定的区間 I 上, 存在着超效用函数 V.

証明 对任意的 $F\in I$, 由定理 3.3, 只存在一个实数 (用 $V(F)$ 表示),使

$$F\sim(1-V(F))F_1+V(F)F_2. \tag{4.8}$$

現在証明 I 上这样定义的函数 V 是区間 I 上的超效用函数。

当 G, $H\in I$, $G\leqq H$ 时, 由定理 3.2, 3.3 和函数 V 的定义,

很明显 $V(G)\leqslant V(H)$. 再有

$$G\sim(1-V(G))F_1+V(G)F_2,\ H\sim(1-V(H))F_1+V(H)F_2,$$

所以对任意的 $0\leqslant\rho\leqslant1$, 由定理 3.1, 下面等式成立:

$$\begin{aligned}\rho G+(1-\rho)H &\sim\rho[(1-V(G))F_1+V(G)F_2]\\ &\quad+(1-\rho)[(1-V(H))F_1+V(H)F_2]\\ &=[1-\{\rho V(G)+(1-\rho)V(H)\}]F_1\\ &\quad+\{\rho V(G)+(1-\rho)V(H)\}F_2.\end{aligned}$$

因而,由函数 V 的定义,

$$V(\rho G+(1-\rho)H)=\rho V(G)+(1-\rho)V(H).$$

从而 V 是区間 I 上的超效用函数。 証毕

定理 4.3 成果 ω 的集合 Ω 上,存在着效用函数。

証明 将任意的两个成果 ω_1, ω_2, $\omega_1\prec\omega_2$, 固定为 1 組。这时由輔助定理 4.1 及超效用函数的性质 (4), 在含有 ω_1 及 ω_2 的任意的賭的区間 I 上,只存在一个使 ω_1 及 ω_2 对应的数値分别为 0 和 1 的超效用函数。对于这样的賭所定义的任意两个区間 I_1 和 I_2, 設使 ω_1 和 ω_2 对应的数值同时为 0 和 1 的两个超效用函数为 V_1 和 V_2. 由于 $I_1\cap I_2$ 是含有 ω_1, ω_2 的凸集, 从而 V_1 和 V_2 是 $I_1\cap I_2$ 上的两个超效用函数, 而且 $V_1(\omega_1)=V_2(\omega_1)=0$, $V_1(\omega_2)=V_2(\omega_2)=1$. 因而由超效用函数的性质 (4), 在 $I_1\cap I_2$ 上两个超效用函数 V_1 和 V_2 是一致的。現在以 F 为任意的賭,这时含有 ω_1, ω_2 及 F 的賭的区間至少存在一个,在这些区間上使 ω_1, ω_2 对应的数値分别为 0, 1 的超效用函数, 如上面所証明, 使 F 对应于同一的数値, 这数値用 $V(F)$ 表示。这样得出了定义在所有賭的集合 Ψ 上的函数 V. 現在証明这个函数 V 就是 Ψ 上的超效用函数。

为此,設 F_1, F_2 为任意的两个賭, ρ 为 $0\leqslant\rho\leqslant1$ 的任意实数。此时,存在着含有 ω_1, ω_2, F_1, F_2 及 $\rho F_1+(1-\rho)F_2$ 的賭的区間。