

# 数学分析

第三版 下册

郭大钧 陈玉妹 裘卓明 编著



高等教育出版社

# 数学分析

第三版 下册

Shuxue

Fenxi

郭大钧 陈玉妹 裘卓明 编著

高等教育出版社·北京

## 内容提要

本书是郭大钧教授几十年教学经验的总结,从77级大学生开始,一直作为山东大学数学系(院)“数学分析”课的教材,已使用了三十多年。本书具有概念明确、重点突出、由浅入深、循序渐进、启发性强、便于自学等特点,并重视疑难、关键性问题的解惑,重视提高读者利用数学分析解决实际问题的能力。

本书上册主要介绍了极限理论和一元函数微积分学的基本理论和基础知识,包括函数、极限、连续函数、微分学及其应用、积分学及其应用;下册主要介绍了级数和多元函数微积分学的基本理论和基础知识,包括级数、多元函数的微分学及其应用、广义积分、含参变量的积分、重积分、线积分与面积分、场论、傅里叶级数等内容。书中有较多的习题,每章后还有综合性补充题,书末附有习题参考答案。

本书可作为综合性大学和师范院校数学系(院)的教材,也可作为理工科院校学生学习数学分析的参考书,还可供中学教师及广大读者自学数学分析之用。

## 图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 下册/郭大钧,陈玉妹,裘卓明编著.  
--3版.--北京:高等教育出版社,2015.9  
ISBN 978-7-04-042780-6

I. ①数… II. ①郭… ②陈… ③裘… III. ①数学  
分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第106037号

策划编辑	李冬莉	责任编辑	李冬莉	封面设计	张楠	版式设计	杜微言
插图绘制	杜晓丹	责任校对	李大鹏	责任印制	刘思涵		

出版发行 高等教育出版社  
社址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120  
印刷 北京人卫印刷厂  
开本 787 mm×960 mm 1/16  
印张 24.5  
字数 450千字  
购书热线 010-58581118  
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
版 次 1982年6月第1版  
2015年9月第3版  
印 次 2015年9月第1次印刷  
定 价 38.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 42780-00

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

# 目 录

第八章 级数 .....	1	全微分 .....	86
§ 1 常数项级数 .....	1	5.1 高阶偏导数 .....	86
1.1 级数的定义和性质 .....	1	5.2 高阶全微分 .....	90
1.2 正项级数 .....	5	§ 6 泰勒公式 .....	93
1.3 任意项级数 .....	13	补充题 .....	97
§ 2 函数项级数 .....	20	第十章 多元函数微分学的应用 .....	102
2.1 一致收敛 .....	20	§ 1 隐函数存在定理 .....	102
2.2 函数项级数和的函数 性质 .....	28	1.1 一个方程的情形 .....	102
2.3 函数序列的极限的 函数性质 .....	31	1.2 方程组的情形 .....	106
§ 3 幂级数 .....	33	1.3 隐函数的微分法 .....	113
3.1 收敛区间 .....	33	§ 2 偏导数在几何上 的应用 .....	120
3.2 逐项积分和微分 .....	36	2.1 空间曲线的切线方程和 法平面方程 .....	120
3.3 泰勒级数、麦克劳林 级数 .....	39	2.2 空间曲面的切平面方程 和法线方程 .....	122
补充题 .....	49	§ 3 多元函数的极值 .....	126
第九章 多元函数的微分学 .....	58	3.1 取极值的必要条件 .....	126
§ 1 多元函数的极限 与连续 .....	58	3.2 取极值的充分条件 .....	128
1.1 多元函数的概念 .....	58	3.3 生产实际中的最大 最小问题 .....	130
1.2 二元函数的极限 .....	61	§ 4 条件极值 .....	133
1.3 二元连续函数 .....	68	补充题 .....	140
§ 2 偏导数 .....	73	第十一章 广义积分 .....	143
§ 3 全微分 .....	76	§ 1 无穷积分 .....	143
§ 4 复合函数的偏导数 .....	82	1.1 无穷积分的概念 .....	143
§ 5 高阶偏导数与高阶		1.2 无穷积分的收敛性	

判别法 .....	147	3.2 重心 .....	216
§ 2 瑕积分 .....	154	3.3 转动惯量 .....	220
2.1 瑕积分的概念 .....	154	§ 4 三重积分 .....	222
2.2 瑕积分的收敛判别法 .....	157	4.1 三重积分的定义 .....	222
补充题 .....	160	4.2 三重积分的计算和 应用 .....	224
第十二章 含参变量的积分 .....	163	* § 5 $n$ 重积分 .....	236
§ 1 含参变量的定积分 .....	163	5.1 $n$ 维欧氏空间 .....	236
1.1 积分限是常数的情形 .....	163	5.2 $n$ 重积分的定义及 计算 .....	238
1.2 积分限是函数的情形 .....	167	补充题 .....	242
§ 2 含参变量的广义 积分 .....	170	第十四章 线积分与面积分 .....	246
2.1 一致收敛 .....	170	§ 1 线积分 .....	246
2.2 含参变量广义积分的 性质 .....	175	1.1 对弧长的线积分 .....	247
§ 3 B 函数与 $\Gamma$ 函数 .....	180	1.2 对坐标的线积分 .....	251
3.1 B 函数 .....	180	§ 2 线积分与路径无关的 条件、格林公式 .....	258
3.2 $\Gamma$ 函数 .....	181	§ 3 面积分 .....	266
3.3 B 函数与 $\Gamma$ 函数 的关系 .....	182	3.1 对面积的面积分 .....	267
补充题 .....	184	3.2 对坐标的面积分 .....	270
第十三章 重积分 .....	188	§ 4 高斯公式与斯托克斯 公式 .....	277
§ 1 二重积分的概念 .....	188	补充题 .....	281
1.1 二重积分的定义 .....	188	第十五章 场论 .....	286
1.2 可积的充要条件与二重 积分的性质 .....	191	§ 1 等量面、方向导数、 梯度 .....	286
§ 2 二重积分的计算 .....	194	§ 2 流量(通量)、散度 .....	293
2.1 化二重积分为累次 积分 .....	194	§ 3 环量、旋度 .....	303
2.2 二重积分的变量 代换 .....	202	§ 4 拉普拉斯算子在球 坐标系和柱坐标系 中的表达式 .....	311
§ 3 二重积分的应用 .....	212	补充题 .....	314
3.1 曲面面积 .....	212		

---

第十六章 傅里叶级数 .....	317	2.1 函数用傅里叶积分 表示 .....	335
§ 1 傅里叶级数 .....	317	2.2 傅里叶变换 .....	341
1.1 三角级数与周期函数 ...	317	补充题 .....	345
1.2 以 $2\pi$ 为周期的函数展开 为三角级数 .....	319	附录 幂级数的收敛半径公式 ...	347
1.3 以 $2l$ 为周期的函数展开 为三角级数 .....	330	习题答案和提示 .....	349
§ 2 傅里叶积分 .....	335		

# 第八章 级数

某些应用问题以及函数的理论分析和近似计算都需要考虑无穷个数相加的问题，也就是级数的问题。

## § 1 常数项级数

### 1.1 级数的定义和性质

设给定数列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

符号

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (8.1-1)$$

叫做无穷级数，简称级数； $a_n$  叫级数的通项。级数(8.1-1)简记为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 。

**定义 1** 级数(8.1-1)前  $n$  项的和叫做它的部分和，记作  $S_n$ ：

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

若极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在且有限(设为  $S$ )，则称级数(8.1-1)收敛， $S$  叫做它的和，记为

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n;$$

否则(即  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  不存在或为无穷大)称级数(8.1-1)发散。

**例 1** 试研究等比级数(亦称几何级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots \quad (a \neq 0)$$

的敛散性。

**解** 我们有

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1},$$

两端乘  $r$ ，得

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n.$$



两式相减得

$$S_n - rS_n = a - ar^n.$$

故当  $r \neq 1$  时,

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

又, 显然, 当  $r=1$  时, 有

$$S_n = na.$$

由此可知, 当  $|r| < 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$ , 故此时级数收敛, 其和为  $\frac{a}{1-r}$ , 即

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ ; 当  $|r| \geq 1$  时  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$  或不存在, 故级数发散.

**例 2** 试研究级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  的敛散性.

**解** 由于

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

故部分和

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

由此可知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ , 因此, 级数收敛, 且和为 1.

**例 3** 试证级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

发散.

**证** 我们有

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{n}{\sqrt{2}} = \sqrt{n},$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ . 从而级数发散.

**例 4** 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$$

发散. 这是因为

$$S_{2n} = 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} = 0,$$

$$S_{2n+1} = 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} + (-1)^{2n+2} = 1,$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  不存在.

下面简述一下级数的基本性质.

**性质 1** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} C a_n$  ( $C$  是常数) 也收敛, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} C a_n = C \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

证 用  $S_n^*$  表示级数  $\sum_{n=1}^{\infty} C a_n$  的部分和, 则  $S_n^* = C S_n$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* = C S$ . 证完.

**性质 2** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  都收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  也收敛, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

证明留作习题(见后面习题一第 2 题).

**性质 3** 不改变收敛级数各项的顺序, 而对其各项任意加括号所构成的新级数仍收敛, 并且其和不变. 也就是说, 若级数(8.1-1)收敛, 其和为  $S$ , 则级数

$$(a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + (a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}) + \cdots \quad (8.1-2)$$

也收敛, 并且其和也是  $S$ . 换句话说, 收敛级数具有可结合性.

证 用  $S_n$ 、 $S_n^*$  分别表示级数(8.1-1)、(8.1-2)的部分和, 则有  $S_n^* = S_{k_n}$ , 即序列  $S_n^*$  是序列  $S_n$  的一子序列, 故由  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在有限可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^*$  存在有限, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

注: 反过来, 若一个级数加括号后的新级数收敛, 则不能推出原级数收敛. 例如, 级数

$$[1+(-1)] + [1+(-1)] + \cdots + [1+(-1)] + \cdots$$

收敛(其和为零), 但级数

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots+1+(-1)+\cdots$$

发散.

**性质 4** 在一个收敛(发散)级数前面加上或去掉有限项, 所得级数仍收敛(发散).

证 只需证去掉有限项的情形. 设级数(8.1-1)的部分和是  $S_n$ , 从级数(8.1-1)中去掉前  $m$  项后所得级数为

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+n} + \cdots \quad (8.1-3)$$

显然, 其部分和  $S_n^*$  为

$$S_n^* = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+n} = S_{m+n} - S_m.$$

由此可知, 级数(8.1-1)和级数(8.1-3)或同时收敛, 或同时发散.

**性质 5** 若级数(8.1-1)收敛, 则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (8.1-4)$$

**证** 我们有

$$a_n = S_n - S_{n-1},$$

若级数收敛, 则必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

**注:** 由性质 5 知, 若级数的通项不趋于零, 则此级数必发散, 这是判断级数发散的一个常用办法. 例如, 例 1 中的等比级数, 当  $|r| \geq 1$  时, 其通项  $ar^{n-1}$  不趋于零, 故发散.

另外, 还应注意, 通项趋于零只是级数收敛的必要条件, 而不是充分条件. 换句话说, 通项趋于零的级数可能发散. 例如, 例 3 中的级数, 其通项趋于零, 但它发散.

在结束本节之前, 我们要指出, 按收敛的定义, 研究级数(8.1-1)的收敛性及其和  $S$  的问题, 就是研究数列  $\{S_n\}$  ( $S_n$  是部分和)及其极限的问题; 反之, 设给定数列  $\{u_n\}$ , 令

$$a_1 = u_1, \quad a_2 = u_2 - u_1, \quad \cdots, \quad a_n = u_n - u_{n-1}, \quad \cdots,$$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = u_n,$$

故研究数列  $\{u_n\}$  及其极限的问题就相当于研究级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的收敛性及其和的问题. 由此可知: 研究级数及其和与研究数列及其极限是等价的, 只是表现形式不同而已, 两者可以互相转化.

### 习 题 一

1. 试把下列级数缩写成求和的形式, 并判断其敛散性, 若收敛并求其和:

$$(1) \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \ln \frac{5}{4} + \cdots;$$

$$(2) \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \cdots;$$

$$(3) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \cdots;$$

$$(4) \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \cdots.$$

2. 试证明性质 2.

3. 试再举出一个通项趋于零的发散级数.

4. 求级数  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$  的和.

## 1.2 正项级数

**定义 2** 若  $a_n \geq 0$  ( $n=1, 2, \cdots$ ), 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是正项级数.

正项级数最简单, 也最重要, 许多任意项级数的问题都可归结为正项级数的问题.

**基本定理** 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的充要条件是其部分和  $S_n$  有上界, 即存在常数  $M > 0$ , 使  $S_n \leq M$  ( $n=1, 2, \cdots$ ).

**证** 由于  $a_n \geq 0$  ( $n=1, 2, \cdots$ ), 故其部分和序列  $S_n$  是单调增大的:

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots.$$

因此, 根据第二章 § 2 定理 8 知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  是有限的充要条件是  $S_n$  有上界, 证完.

上述定理是基础, 但具体判断级数的敛散性则需根据它来建立一些实用的判别法.

**比较判别法** 设给定两个正项级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \quad (8.1-5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots. \quad (8.1-6)$$

如果  
则

$$a_n \leq b_n \quad (n=1, 2, \cdots), \quad (8.1-7)$$

(1) 从  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛可推出  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(2) 从  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散可推出  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散.

**证** 用  $S_n$ 、 $S_n^*$  分别表示级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  的部分和, 根据(8.1-7)知

$$S_n \leq S_n^* \quad (n=1, 2, \cdots).$$

因此, 从  $S_n^*$  有上界可知  $S_n$  有上界, 从  $S_n$  无上界可知  $S_n^*$  无上界, 故由基本定理即获证.

注：由于去掉一个级数前面的有限项不改变其敛散性(性质4)，故知：若将条件(8.1-7)换为“存在正整数 $N$ ，使当 $n>N$ 时有 $a_n \leq b_n$ ”，比较判别法的结论仍成立。

例5 考察 $p$ -级数( $p>0$ )

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots. \quad (8.1-8)$$

试证：当 $p>1$ 时，级数(8.1-8)收敛；当 $p \leq 1$ 时，它发散。

证 (1) 设 $p>1$ ，依次将级数(8.1-8)的一项、两项、四项、八项……括在一起，得

$$1 + \left( \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left( \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{7^p} \right) + \left( \frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{15^p} \right) + \cdots, \quad (8.1-9)$$

它的各项显然小于等于级数

$$\begin{aligned} & 1 + \left( \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} \right) + \left( \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{4^p} \right) + \left( \frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{8^p} \right) + \cdots \\ & = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left( \frac{1}{2^{p-1}} \right)^2 + \left( \frac{1}{2^{p-1}} \right)^3 + \cdots \end{aligned} \quad (8.1-10)$$

对应的各项，而后一级数(8.1-10)是等比级数，公比 $r = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$ ，故收敛。根据比较判别法知级数(8.1-9)收敛，从而去掉括弧的级数(8.1-8)也收敛(见后面习题二第1题)。

(2) 设 $p=1$ ，这时，级数(8.1-8)是调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots. \quad (8.1-11)$$

依次把级数(8.1-11)的一项、两项、四项、八项……括在一起，得级数

$$1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} \right) + \left( \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} \right) + \cdots, \quad (8.1-12)$$

级数(8.1-12)的各项分别大于等于级数

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8} \right) + \left( \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} \right) + \cdots \\ & = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots, \end{aligned} \quad (8.1-13)$$

对应的项，而级数(8.1-13)发散，故由比较判别法知级数(8.1-12)发散，从而级数(8.1-11)发散。

(3) 设 $p<1$ ，由于这时级数(8.1-8)的各项分别大于等于级数(8.1-11)的对应项

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

故由级数(8.1-11)的发散性, 应用比较判别法知级数(8.1-8)发散.

下面是比较判别法的极限形式, 在使用上更方便.

**比较判别法(极限形式)** 设给定两个正项级数(8.1-5)和(8.1-6), 又设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \rho \quad (0 \leq \rho \leq +\infty). \quad (8.1-14)$$

那么,

(1) 若  $0 < \rho < +\infty$ , 则级数(8.1-5)和(8.1-6)必或同为收敛, 或同为发散;

(2) 若  $\rho = 0$ , 则从(8.1-6)收敛可推出(8.1-5)收敛;

(3) 若  $\rho = +\infty$ , 则从(8.1-6)发散可推出(8.1-5)发散.

证 (1) 设  $0 < \rho < +\infty$ . 取一充分小正数  $\varepsilon_0$ , 使  $\rho - \varepsilon_0 > 0$ , 于是, 由(8.1-14)知: 存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时, 恒有  $\rho - \varepsilon_0 < \frac{a_n}{b_n} < \rho + \varepsilon_0$ , 即  $(\rho - \varepsilon_0)b_n < a_n < (\rho + \varepsilon_0)b_n$ . 由此, 根据比较判别法(及其后的注), 知(8.1-5)和(8.1-6)同为收敛, 或同为发散.

(2)、(3)的证明留作习题(见后面习题二第2题).

**例6** 试判断下列级数是收敛还是发散:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

解 (1) 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + 1} = 1,$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  发散(它是  $p = \frac{1}{2}$  时的  $p$ -级数), 故由比较判别法(极限形式)知级

数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$  发散.

(2) 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n = 0,$$

因为  $n > 3$  时,  $\left(\frac{2}{n}\right)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ , 故由级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  收敛可知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$  收敛.

## 习 题 二

1. 试证: 对于正项级数而言, 级数性质 3 的逆命题成立, 即: 假定  $a_n \geq 0$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 若某加括弧的级数 (8.1-2) 收敛, 则去掉括弧的级数 (8.1-1) 也必收敛, 且其和不变.

2. 试证比较判别法 (极限形式) 的结论 (2) 与 (3).

3. 试判断下列级数的敛散性:

$$(1) \frac{1}{5+1^2} + \frac{1}{5+2^2} + \frac{1}{5+3^2} + \dots;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^4+1)}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0);$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n};$$

$$(6) 1+r \cos^2 \theta + r^2 \cos^2 2\theta + r^3 \cos^2 3\theta + \dots \quad (0 < r < 1);$$

$$(7) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right);$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad (x > 0).$$

将  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和等比级数  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$  ( $0 < r < 1$ ) 相比较, 可得下面两个应用上常用的判别法.

达朗贝尔 (d' Alembert) 判别法 对于正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \quad (0 \leq \rho \leq +\infty), \quad (8.1-15)$$

则当  $\rho < 1$  时级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 当  $\rho > 1$  时级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

证 (1) 设  $\rho < 1$ , 取一充分小正数  $\varepsilon_0$ , 使  $\rho + \varepsilon_0 = r < 1$ , 于是, 由 (8.1-15) 知, 存在正整数  $N$ , 使当  $n \geq N$  时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \varepsilon_0 = r.$$

故

$$a_{N+1} < r a_N, \quad a_{N+2} < r a_{N+1} < r^2 a_N, \quad a_{N+3} < r a_{N+2} < r^3 a_N, \quad \dots$$

即级数

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \dots \quad (8.1-16)$$

的各项比收敛等比级数

$$a_N r + a_N r^2 + a_N r^3 + \dots$$

的对应项小, 故由比较判别法知, 级数(8.1-16)收敛, 再根据级数的性质 4

知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

(2) 设  $\rho > 1$ , 取一充分小正数  $\varepsilon^*$ , 使  $\rho - \varepsilon^* > 1$ , 由(8.1-15)知, 存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \rho - \varepsilon^* > 1,$$

故  $a_{n+1} > a_n$  ( $n > N$  时), 因此,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

注: 达朗贝尔判别法又称比值判别法.

例 7 试讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^n} = \frac{1}{a} + \frac{2!}{a^2} + \frac{3!}{a^3} + \dots + \frac{n!}{a^n} + \dots \quad (a > 0).$$

解 (1) 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{(n+1)!}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

故级数收敛.

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{a^{n+1}}}{\frac{n!}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{a} = +\infty,$$

故级数发散.

注: 若极限(8.1-15)等于 1 (即  $\rho = 1$ ), 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  可能收敛, 也可能发散, 读者可各举一例以说明之(后面习题三第 1 题).



柯西 (Cauchy) 判别法 对于正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho \quad (0 \leq \rho \leq +\infty),$$

则当  $\rho < 1$  时级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 当  $\rho > 1$  时级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

证 读者自证(后面习题三第 2 题).

注: 柯西判别法又称极值判别法.

例 8 试研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

的敛散性.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

故级数收敛.

注: 在实用上, 达朗贝尔判别法比柯西判别法更常用, 是最常用的判别法.

我们知道, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ , 则不能利用达朗贝尔判别法来判断正项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的敛散性. 这时, 常可用下面的判别法.

拉比 (Raabe) 判别法 对于正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \rho \quad (-\infty \leq \rho \leq +\infty),$$

则当  $\rho > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 当  $\rho < 1$  时级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

证 先设  $\rho > 1$ , 取  $\tau > 0$  很小, 使  $1 + 2\tau < \rho$ , 于是存在正整数  $N_0$ , 使当  $n \geq N_0$  时, 有

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1 + 2\tau,$$

或

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{1 + 2\tau}{n}. \quad (8.1-17)$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1+\tau} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\tau)(1+x)^\tau}{1} = 1 + \tau,$$