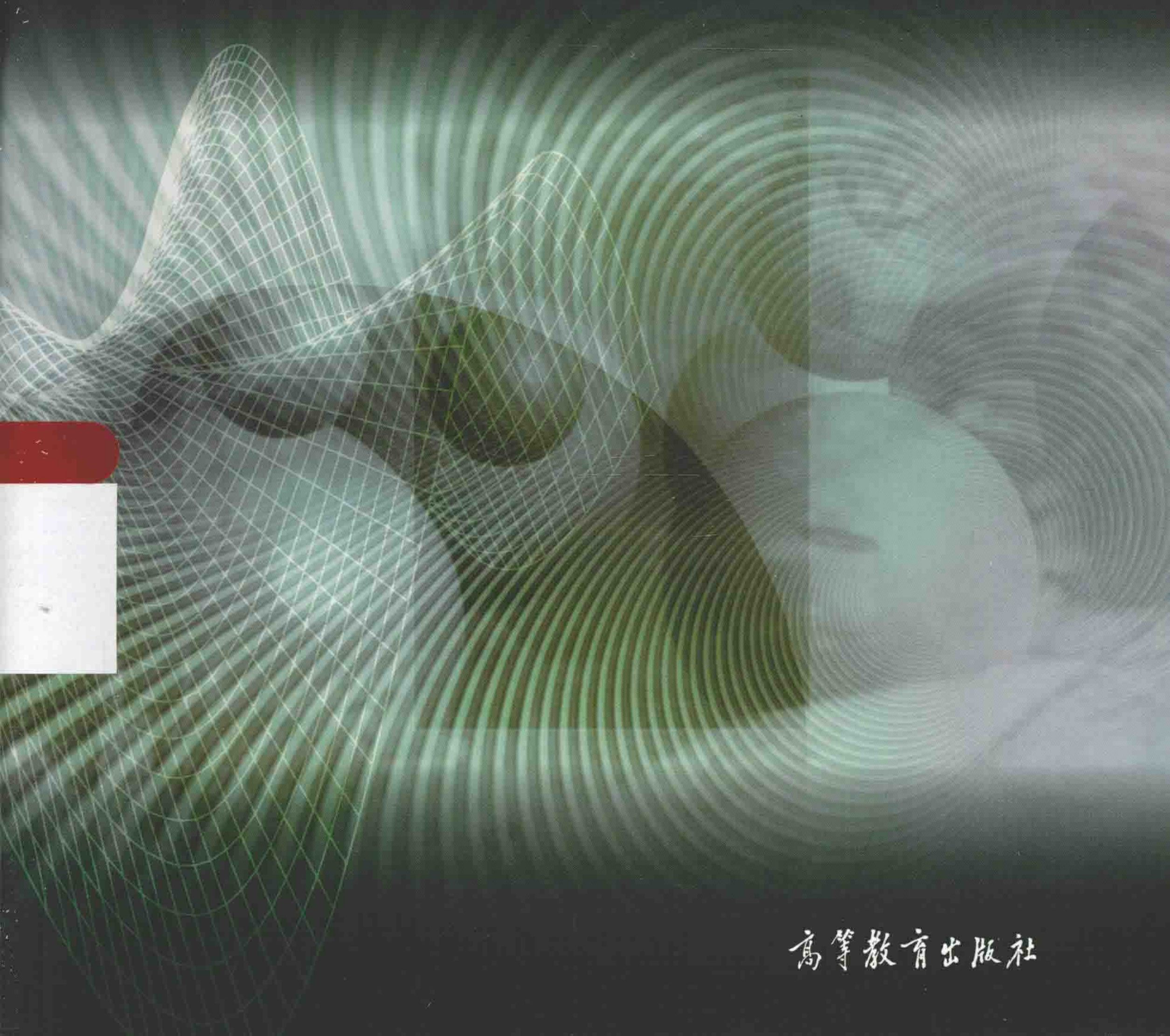
数学分析 第三版 下册

郭大钧 陈玉妹 裘卓明 编著



高等教育出版社

数学分析 第三版 下册

Shuxue Fenxi

郭大钧 陈玉姝 裘卓明 编著

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是郭大钧教授几十年教学经验的总结，从77级大学生开始，一直作为山东大学数学系(院)“数学分析”课的教材，已使用了三十多年。本书具有概念明确、重点突出、由浅入深、循序渐进、启发性强、便于自学等特点，并重视疑难、关键性问题的解惑，重视提高读者利用数学分析解决实际问题的能力。

本书上册主要介绍了极限理论和一元函数微积分学的基本理论和基础知识，包括函数、极限、连续函数、微分学及其应用、积分学及其应用；下册主要介绍了级数和多元函数微积分学的基本理论和基础知识，包括级数、多元函数的微分学及其应用、广义积分、含参变量的积分、重积分、线积分与面积分、场论、傅里叶级数等内容。书中有较多的习题，每章后还有综合性补充题，书末附有习题参考答案。

本书可作为综合性大学和师范院校数学系(院)的教材，也可作为理工科院校学生学习数学分析的参考书，还可供中学教师及广大读者自学数学分析之用。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析. 下册/郭大钧，陈玉妹，裘卓明编著. --3版. --北京：高等教育出版社，2015.9
ISBN 978-7-04-042780-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①郭… ②陈… ③裘… Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第106037号

策划编辑 李冬莉　责任编辑 李冬莉　封面设计 张 楠　版式设计 杜微言
插图绘制 杜晓丹　责任校对 李大鹏　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	北京人卫印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开 本	787 mm×960 mm 1/16		
印 张	24.5	版 次	1982年6月第1版
字 数	450千字		2015年9月第3版
购书热线	010-58581118	印 次	2015年9月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	38.00元

物 料 号 42780-00

目　　录

第八章　级　　数

某些应用问题以及函数的理论分析和近似计算都需要考虑无穷个数相加的问题，也就是级数的问题.

§1　常数项级数

1.1　级数的定义和性质

设给定数列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,$$

符号

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{8.1-1}$$

叫做**无穷级数**，简称**级数**；a_n 叫级数的**通项**. 级数(8.1-1)简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

定义 1　**级数(8.1-1)前 n 项的和叫做它的部分和，记作 S_n：**

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在且有限(设为 S)，则称级数(8.1-1)收敛，S 叫做它的和，记为

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n;$$

否则(即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在或为无穷大)称级数(8.1-1)发散.

例 1　试研究等比级数(亦称几何级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots \quad (a\neq 0)$$

的敛散性.

解　我们有

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1},$$

两端乘 r，得

$$rS_n=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n.$$

两式相减得

$$S_n - rS_n = a - ar^n.$$

故当 $r \neq 1$ 时，

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

又，显然，当 $r=1$ 时，有

$$S_n = na.$$

由此可知，当 $|r|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$，故此时级数收敛，其和为$\dfrac{a}{1-r}$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \dfrac{a}{1-r}$；当 $|r| \geqslant 1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ 或不存在，故级数发散.

例 2　试研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$的敛散性.

解　由于

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

故部分和

$$S_n = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

由此可知，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$，因此，级数收敛，且和为 1.

例 3　试证级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

发散.

证　我们有

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. 从而级数发散.

例 4　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$$

发散. 这是因为

$$S_{2n} = 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1} = 0,$$

$$S_{2n+1}=1+(-1)+\cdots+(-1)^{2n}+(-1)^{2n+1}+(-1)^{2n+2}=1,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在.

下面简述一下级数的基本性质.

性质 1　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Ca_n$($C$ 是常数) 也收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}Ca_n=C\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

证　用 S_n^* 表示级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Ca_n$ 的部分和，则 $S_n^*=CS_n$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^*=CS$. 证完.

性质 2　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 也收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

证明留作习题(见后面习题一第 2 题).

性质 3　不改变收敛级数各项的顺序，而对其各项任意加括号所构成的新级数仍收敛，并且其和不变. 也就是说，若级数(8.1-1)收敛，其和为 S，则级数

$$(a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})+\cdots \tag{8.1-2}$$

也收敛，并且其和也是 S. 换句话说，收敛级数具有可结合性.

证　用 S_n、S_n^* 分别表示级数(8.1-1)、(8.1-2)的部分和，则有 $S_n^*=S_{k_n}$，即序列 S_n^* 是序列 S_n 的一子序列，故由 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在有限可知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^*$ 存在有限，并且

$$\lim_{n\to\infty}S_n^*=\lim_{n\to\infty}S_{k_n}=\lim_{n\to\infty}S_n=S.$$

注：反过来，若一个级数加括号后的新级数收敛，则不能推出原级数收敛. 例如，级数

$$[1+(-1)]+[1+(-1)]+\cdots+[1+(-1)]+\cdots$$

收敛(其和为零)，但级数

$$1+(-1)+1+(-1)+\cdots+1+(-1)+\cdots$$

发散.

性质 4　在一个收敛(发散)级数前面加上或去掉有限项，所得级数仍收敛(发散).

证　只需证去掉有限项的情形. 设级数(8.1-1)的部分和是 S_n，从级数(8.1-1)中去掉前 m 项后所得级数为

$$a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+n}+\cdots. \qquad (8.1-3)$$

显然，其部分和 S_n^* 为

$$S_n^*=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+n}=S_{m+n}-S_m.$$

由此可知，级数(8.1-1)和级数(8.1-3)或同时收敛，或同时发散.

性质 5　若级数(8.1-1)收敛，则必有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0. \qquad (8.1-4)$$

证　我们有

$$a_n=S_n-S_{n-1},$$

若级数收敛，则必有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0.$$

注：由性质 5 知，若级数的通项不趋于零，则此级数必发散，这是判断级数发散的一个常用办法. 例如，例 1 中的等比级数，当 $|r|\geqslant 1$ 时，其通项 ar^{n-1} 不趋于零，故发散.

另外，还应注意，通项趋于零只是级数收敛的必要条件，而不是充分条件. 换句话说，通项趋于零的级数可能发散. 例如，例 3 中的级数，其通项趋于零，但它发散.

在结束本节之前，我们要指出，按收敛的定义，研究级数(8.1-1)的收敛性及其和 S 的问题，就是研究数列$\{S_n\}$(S_n 是部分和)及其极限的问题；反之，设给定数列$\{u_n\}$，令

$$a_1=u_1,\ a_2=u_2-u_1,\ \cdots,\ a_n=u_n-u_{n-1},\ \cdots,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=u_n,$$

故研究数列$\{u_n\}$及其极限的问题就相当于研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性及其和的问题. 由此可知：**研究级数及其和与研究数列及其极限是等价的，只是表现形式不同而已，两者可以互相转化.**

习　题　一

1. 试把下列级数缩写成求和的形式，并判断其敛散性，若收敛并求其和：

(1) $\ln\dfrac{2}{1}+\ln\dfrac{3}{2}+\ln\dfrac{4}{3}+\ln\dfrac{5}{4}+\cdots$；

(2) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{2}{3^3}+\dfrac{2}{3^4}+\cdots$；

(3) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}\right)+\cdots$；

(4) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots$.

2. 试证明性质 2.

3. 试再举出一个通项趋于零的发散级数.

4. 求级数$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$的和.

1.2　正项级数

定义 2　**若** $a_n\geqslant0$ $(n=1,2,\cdots)$，**则称级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **是正项级数.**

正项级数最简单，也最重要，许多任意项级数的问题都可归结为正项级数的问题.

基本定理　**正项级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **收敛的充要条件是其部分和** S_n **有上界，即存在常数** $M>0$，**使** $S_n\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$.

证　由于 $a_n\geqslant0$ $(n=1,2,\cdots)$，故其部分和序列 S_n 是单调增大的：

$$S_1\leqslant S_2\leqslant S_3\leqslant\cdots\leqslant S_n\leqslant\cdots.$$

因此，根据第二章 § 2 定理 8 知，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 是有限的充要条件是 S_n 有上界，证完.

上述定理是基础，但具体判断级数的敛散性则需根据它来建立一些实用的判别法.

比较判别法　**设给定两个正项级数：**

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots, \tag{8.1-5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots. \tag{8.1-6}$$

如果

$$a_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots), \tag{8.1-7}$$

则

(1) **从** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ **收敛可推出** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **收敛；**

(2) **从** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **发散可推出** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ **发散.**

证　用 S_n、S_n^* 分别表示级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和，根据(8.1-7)知

$$S_n\leqslant S_n^*\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

因此，从 S_n^* 有上界可知 S_n 有上界，从 S_n 无上界可知 S_n^* 无上界，故由基本定理即获证.

注：由于去掉一个级数前面的有限项不改变其敛散性（性质 4），故知：若将条件(8.1-7)换为“存在正整数 N，使当 $n>N$ 时有 $a_n \leqslant b_n$”，比较判别法的结论仍成立.

例 5　考察 p-级数($p>0$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots. \tag{8.1-8}$$

试证：当 $p>1$ 时，级数(8.1-8)收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，它发散.

证　(1) 设 $p>1$，依次将级数(8.1-8)的一项、两项、四项、八项……括在一起，得

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right)+\cdots, \tag{8.1-9}$$

它的各项显然小于等于级数

$$\begin{aligned}&1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right)+\cdots\\&=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots\end{aligned} \tag{8.1-10}$$

对应的各项，而后一级数(8.1-10)是等比级数，公比 $r=\dfrac{1}{2^{p-1}}<1$，故收敛. 根据比较判别法知级数(8.1-9)收敛，从而去掉括弧的级数(8.1-8)也收敛(见后面习题二第 1 题).

(2) 设 $p=1$，这时，级数(8.1-8)是调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots. \tag{8.1-11}$$

依次把级数(8.1-11)的一项、两项、四项、八项……括在一起，得级数

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots, \tag{8.1-12}$$

级数(8.1-12)的各项分别大于等于级数

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots,\end{aligned} \tag{8.1-13}$$

对应的项，而级数(8.1-13)发散，故由比较判别法知级数(8.1-12)发散，从而级数(8.1-11)发散.

(3) 设 $p<1$，由于这时级数(8.1-8)的各项分别大于等于级数(8.1-11)的对应项

$$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots),$$

故由级数(8.1-11)的发散性，应用比较判别法知级数(8.1-8)发散.

下面是比较判别法的极限形式，在使用上更方便.

比较判别法(极限形式)　设给定两个正项级数(8.1-5)和(8.1-6)，又设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\rho\qquad(0\leqslant\rho\leqslant+\infty).\tag{8.1-14}$$

那么，

(1) 若 $0<\rho<+\infty$，则级数(8.1-5)和(8.1-6)必或同为收敛，或同为发散；

(2) 若 $\rho=0$，则从(8.1-6)收敛可推出(8.1-5)收敛；

(3) 若 $\rho=+\infty$，则从(8.1-6)发散可推出(8.1-5)发散.

证　(1) 设 $0<\rho<+\infty$. 取一充分小正数 ε_0，使 $\rho-\varepsilon_0>0$，于是，由(8.1-14)知：存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，恒有 $\rho-\varepsilon_0<\dfrac{a_n}{b_n}<\rho+\varepsilon_0$，即 $(\rho-\varepsilon_0)b_n<a_n<(\rho+\varepsilon_0)b_n$. 由此，根据比较判别法(及其后的注)，知(8.1-5)和(8.1-6)同为收敛，或同为发散.

(2)、(3)的证明留作习题(见后面习题二第2题).

例 6　试判断下列级数是收敛还是发散：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}$；　　　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

解　(1) 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}+1}=1,$$

而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散(它是 $p=\dfrac{1}{2}$时的 p-级数)，故由比较判别法(极限形式)知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}}$发散.

(2) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^n=0,$$

因为 $n>3$ 时，$\left(\frac{2}{n}\right)^n<\left(\frac{2}{3}\right)^n$，故由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$收敛.

习　题　二

1. 试证：对于正项级数而言，级数性质 3 的逆命题成立，即：假定 $a_n\geqslant 0\quad(n=1,2,\cdots)$，若某加括弧的级数(8.1-2)收敛，则去掉括弧的级数(8.1-1)也必收敛，且其和不变.

2. 试证比较判别法(极限形式)的结论(2)与(3).

3. 试判断下列级数的敛散性：

(1) $\frac{1}{5+1^2}+\frac{1}{5+2^2}+\frac{1}{5+3^2}+\cdots$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^4+1)}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\quad(a>0)$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$；

(6) $1+r\cos^2\theta+r^2\cos^2 2\theta+r^3\cos^2 3\theta+\cdots\quad(0<r<1)$；

(7) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$；

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\quad(x>0)$.

将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}(0<r<1)$相比较，可得下面两个应用上常用的判别法.

达朗贝尔(d'Alembert)判别法　对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho\qquad(0\leqslant\rho\leqslant+\infty),\tag{8.1-15}$$

则当 $\rho<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当 $\rho>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证　(1) 设 $\rho<1$，取一充分小正数 ε_0，使 $\rho+\varepsilon_0=r<1$，于是，由(8.1-15)知，存在正整数 N，使当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho+\varepsilon_0=r.$$

故

$$a_{N+1}<ra_N,\quad a_{N+2}<ra_{N+1}<r^2a_N,\quad a_{N+3}<ra_{N+2}<r^3a_N,\quad \cdots.$$

即级数

$$a_{N+1}+a_{N+2}+a_{N+3}+\cdots \tag{8.1-16}$$

的各项比收敛等比级数

$$a_Nr+a_Nr^2+a_Nr^3+\cdots$$

的对应项小，故由比较判别法知，级数(8.1-16)收敛，再根据级数的性质4知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 设 $\rho>1$，取一充分小正数 ε^*，使 $\rho-\varepsilon^*>1$，由(8.1-15)知，存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\rho-\varepsilon^*>1,$$

故 $a_{n+1}>a_n$($n>N$ 时)，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注：达朗贝尔判别法又称比值判别法.

例 7　试讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^n}=\frac{1}{a}+\frac{2!}{a^2}+\frac{3!}{a^3}+\cdots+\frac{n!}{a^n}+\cdots\qquad(a>0).$

解　(1) 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

故级数收敛.

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{a^{n+1}}}{\frac{n!}{a^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{a}=+\infty,$$

故级数发散.

注：若极限(8.1-15)等于1(即 $\rho=1$)，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 可能收敛，也可能发散，读者可各举一例以说明之(后面习题三第1题).

柯西(Cauchy)判别法　**对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，如果**

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho \qquad (0\leqslant\rho\leqslant+\infty),$$

则当 $\rho<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，当 $\rho>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证　读者自证(后面习题三第 2 题).

注：柯西判别法又称极值判别法.

例 8　试研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

的敛散性.

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

故级数收敛.

注：在实用上，达朗贝尔判别法比柯西判别法更常用，是最常用的判别法.

我们知道，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，则不能利用达朗贝尔判别法来判断正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性. 这时，常可用下面的判别法.

拉比(Raabe)判别法　**对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，如果**

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\rho \qquad (-\infty\leqslant\rho\leqslant+\infty),$$

则当 $\rho>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，当 $\rho<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证　先设 $\rho>1$，取 $\tau>0$ 很小，使 $1+2\tau<\rho$，于是存在正整数 N_0，使当 $n\geqslant N_0$ 时，有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>1+2\tau,$$

或

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{1+2\tau}{n}. \tag{8.1-17}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1+\tau}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\tau)(1+x)^{\tau}}{1}=1+\tau,$$