# 高等数学轻松学

揭示数学问题的内在逻辑与方法选择的前因后果

王志超 / 编著

送给正在学习高等数学的大学新生和因为参加考研而要将它再次拾起的同学们

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

# 高等数学轻松学

揭示数学问题的内在逻辑与方法选择的前因后果

王志超 / 编著

送给正在学习高等数学的大学新生和因为参加考研而要将它再次拾起的同学们

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

## 内容简介

本书是一本教人如何学习高等数学的书。它的关注点不是定义、定理、性质，以及后两者的证明，而是以一道道具体的题为切入点，揭示数学问题的内在逻辑和方法选择的前因后果。它既可以帮助初学高等数学的本科生学好数学，也可以作为考研数学复习的参考书。

本书共有极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、代数视角的多元函数微积分学、几何视角的多元函数微积分学、无穷级数七个内容，详细阐述了44个问题，267道例题，囊括了各类高等数学教材的主要内容，以及全国硕士研究生统一招生考试数学一、数学二、数学三的主要考点。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学轻松学 / 王志超编著. -- 北京 : 北京航空航天大学出版社，2015.4

ISBN 978-7-5124-1746-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 064557 号



高等数学轻松学
王志超 编著
策划编辑 沈 涛
责任编辑 宋淑娟
*
北京航空航天大学出版社出版发行
北京市海淀区学院路37号(邮编100191) http://www.buaapress.com.cn
发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026
读者信箱:shentao@buaa.edu.cn 邮购电话:(010)82316936
北京时代华都印刷有限公司印装 各地书店经销
*
开本:787×1 092 1/16 印张:20.75 字数:531千字
2015年5月第1版 2015年5月第1次印刷 印数:6 000册
ISBN 978-7-5124-1746-5 定价:34.80元

# 使用说明

本书是一本教人如何学习高等数学的书。它的关注点不是定义、定理、性质，以及后两者的证明，而是一个个具体的问题，并以一道道具体的例题为切入点，揭示数学问题的内在逻辑和方法选择的前因后果。每章开始的“问题脉络”可帮助读者了解各章涉及的问题。

本书既可以帮助初学高等数学的本科生学好高等数学，也可以作为考研学生复习高等数学的参考书。

对于初学高等数学的本科生，本书囊括了各类高等数学教材的主要内容。同学们可根据各高校各专业不同的教学情况，选择对自己有价值的章节阅读。阅读本书时应注意前后知识的联系，对于有些一时难以理解的内容，在读完后面的相关章节后可以更好地理解。

对于考研的考生，本书囊括了全国硕士研究生统一招生考试数学一、数学二、数学三的主要考点（虽然并没有面面俱到）。建议参加数学一考试的考生阅读整本书，参加数学二考试的考生阅读本书的第一至五章，参加数学三考试的考生阅读本书的第一至五章及第七章（第七章的问题 4 可以不读）。本书例题中收录的所有考研真题均已注明考试的年份，可帮助考生了解考研试题的命题风格。

本书每章后的“实战演练”可帮助读者检测各章的学习成果。书后给出了每道习题的答案和详细解答。

对于本书的参考文献，如果将其定义为“对本书的写作有启发的文献”，那么我之前看过的所有与数学有关的书、期刊、论文恐怕都要算上；如果将其定义为“本书中所有直接引用的文献”，那么由于写作习惯所致，恐怕一个也列不出来。既然如此，就采用一个折中的办法，把对本书写作有较大帮助的几本书不分先后次序列于书后，并对它们的作者致以由衷的感谢。

此外，感谢北京航空航天大学出版社，尤其是策划编辑沈涛老师对本书的出版做出的辛勤努力。感谢我的家人和朋友在我写作过程中给予的支持与

鼓励。

最后，由于水平有限，对于书中的不当之处，在此先行道歉，并欢迎广大读者朋友批评指正。对此，我将不胜感激。

愿本书能为同学们的高等数学学习提供切实有效的帮助！

王志超

2015 年 3 月

# 目　录

# 引　言

请看下列时间表：

1642年，法国数学家帕斯卡发明了世界上第一部机械式计算器，这部计算器可完成加减运算.

1673年，德国数学家莱布尼茨发明了可完成加、减、乘、除四则运算的机械式计算器.

1832年，英国数学家巴贝奇成功研制了差分机，这是最早采用寄存器存储数据的计算工具，程序设计的思想从此萌芽.

1886年，美国统计学家霍勒瑞斯研制成功世界上第一台可以自动完成四则运算、累计存档、制作报表的制表机.

1946年，世界上第一台电子计算机在美国宾夕法尼亚大学制成.

1988年，Mathematica 软件发布，这标志着现代科技计算的开始.

计算工具的发展历史就是不断用机器的力量代替人的力量的历史. 这当然并不奇怪. 人类作为高级动物，与普通动物的根本差别就在于会制造和使用工具. 不管是从手动计算工具到自动计算工具，还是从机械式计算工具到机电式、电子计算工具，都体现了时代的进步. 伴随着这种进步，机器能够帮助我们解决越来越多的数学问题. 就 Mathematica 软件而言，它不但能够帮助我们解决实数运算、复数运算、解方程等初等数学问题，而且能够帮助我们解决求极限、求导数、求积分等高等数学问题. 难怪 Mathematica 软件已经成为当今世界运用最广泛的数学软件之一，它被称为“世界上最强大的通用计算系统”更是当之无愧.

是的，因为有了“电脑”，“人脑”对于数学的要求在日常的工作和生活中似乎显得不那么重要；因为有了机器，人们对于数学的学习似乎可以逐渐弱化.

诚然，数学软件的开发离不开研制者的数学功底，数学学科的价值也并不仅限于计算，这门学科还需要不断有人推动它的发展. 但我们不得不承认，这些都是少数人的工作. 在中国，完成了高考以后，相当一部分学生很快就忘记了三角函数，忘记了解析几何；大学毕业或完成了考研以后，相当一部分学生很快就不知道该如何求极限，不知道该怎样解微分方程. 通过了考试，取得了学分，拿到了“敲门砖”或“通行证”，太多的人马上就会和数学“分道扬镳”，而且这次“分别”很可能是“永别”. 当然，这样的“分别”并非刻意，也无须刻意. 因为常年不用，所以不必温习；因为学而不习，所以慢慢淡忘. 一个编辑在为新书设计封面时，难道会作一个二次函数的图像吗？一个白领在安排周末家庭郊游时，难道会先建立一个数学模型，再求一下导，或积一下分吗？这些岂非笑谈？

这就是现实. 这就是许多数学教育者在一遍遍向学生们强调“数学很重要”后必须面对的现实. 对于当今绝大多数的中国人，具体的数学知识和数学方法的价值仅仅体现在受教育阶段，或者更直接地说，仅仅体现在应试阶段. 当他们交掉最后一张数学考卷的时候，很可能就是和数学说“再见”的时候.

既然如此，我们还需要这样高要求地学习数学吗？

有些人的答案就是否定的．近年来，“数学无用”，“只要有初中数学水平就足够了”这样的言论充斥着网络，弥漫在媒体、校园和大街小巷．这些言论不容小觑．如果他们的观点成立，数学这门基础学科的“地位”在中国也许会动摇，数学教育长期作为基础教育的历史在中国也许会改写．我想，“是否应该把数学教育作为基础教育”这个问题触及了根本．要想回答这个问题，恐怕要先回答另一个问题，那就是：我们为什么要学数学？具体地说，在很多数学问题能够借助数学软件解决，并且绝大多数人不会从事与数学有关的职业的今天，我们为什么要学数学？而与数学相关的问题适合具体谈，不适合抽象谈．所以，我们选择了“高等数学”这个载体，试图在高等数学的探索之旅中寻找这个问题的答案．

让我们起航．

# 第一章　极限与连续

问题 1　求极限
问题 2　判断函数的有界性
问题 3　无穷小的比较问题
问题 4　判断间断点类型
问题 5　求渐近线
问题 6　极限的证明
问题 7　已知极限问题

# 第一章　极限与连续

## 问题脉络

- 极限与连续
  - 思维
    - 正向　求出极限（问题1）
    - 逆向　已知极限（问题7）
  - 应用
    - 代数
      - 有界性的判断（问题2）
      - 无穷小的比较（问题3）
      - 间断点的类型（问题4）
    - 几何　渐近线的求法（问题5）
  - 问题
    - 正面　证明有极限
    - 反面　证明无极限
    - （问题6）

## 问题 1　求极限

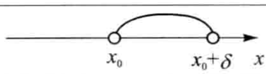
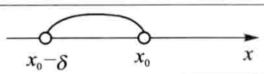
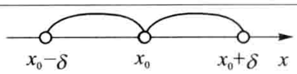
## 知识储备

### 1. 极限的概念

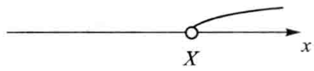
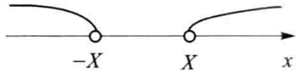
从函数极限的记法入手，$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=A$ 的含义是当 $x\to\cdot$ 时 $f(x)\to A$，其中：

① $x\to\cdot$ 的含义如表 1－1 所列.

表 1－1

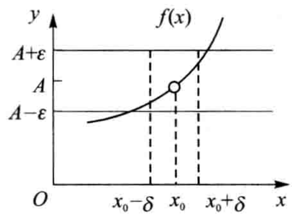
| $x$ 的趋向 | 几何表达 | 代数表达 |
| --- | --- | --- |
| $x\to x_0^+$ |  | 存在 $\delta>0$，使 $x_0<x<x_0+\delta$ |
| $x\to x_0^-$ |  | 存在 $\delta>0$，使 $x_0-\delta<x<x_0$ |
| $x\to x_0$ |  | 存在 $\delta>0$，使 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ |

续表 1-1

| $x$ 的趋向 | 几何表达 | 代数表达 |
| --- | --- | --- |
| $x\to+\infty$ |  | 存在 $X>0$，使 $x>X$ |
| $x\to-\infty$ |  | 存在 $X>0$，使 $x<-X$ |
| $x\to\infty$ |  | 存在 $X>0$，使 $\lvert x\rvert>X$ |

② $f(x)\to A$ 的含义(以 $x\to x_0$ 为例)如表 1-2 所列.

表 1-2

| 几何表达 | 代数表达 |
| --- | --- |
|  | 任取足够小的 $\varepsilon>0$，(存在 $\delta>0$，使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时)满足 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ |

【注】

(i) 数列极限可参照 $x\to+\infty$ 时的函数极限;

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 又记作 $f(x_0^+)$ 或 $f(x_0+0)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 又记作 $f(x_0^-)$ 或 $f(x_0-0)$;

(iii) $x\to x_0$ 表示"$x\to x_0^+$ 且 $x\to x_0^-$"，$x\to\infty$ 表示"$x\to+\infty$ 且 $x\to-\infty$".

## 2. 极限存在的充要条件

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0^+)=f(x_0^-)=A$;

② $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

## 3. 与无穷小有关的重要结论

① 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

② 若 $\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{1}{f(x)}=0$；若 $\lim\limits_{x\to\cdot}f(x)=0$，且 $f(x)\neq0$，则 $\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

【注】这就是 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{C}{x}=\infty$($C$ 为非零常数)的原因.

## 4. 极限运算法则

### (1) 极限的四则运算法则

若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则:

① $\lim[k_1 f(x)\pm k_2 g(x)]=k_1 A\pm k_2 B$；

② $\lim[f(x)\cdot g(x)]=AB$；

③ $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

**(2) 复合函数的极限运算法则**

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，且在 $x_0$ 的去心邻域内有 $\varphi(x)\neq a$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A.$$

**【注】**这就是用换元法求极限时自变量的趋向也要一起换的原因.

### 5. 洛必达法则

设：

① $\lim f(x)=\lim F(x)=0\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$或 $\lim f(x)=\lim F(x)=\infty\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$；

② $f(x)$，$F(x)$在自变量趋向的附近可导，且 $F'(x)\neq 0$；

③ $\lim \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在(或为$\infty$)，则

$$\lim\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

**【推论】** 若 $\lim f'(x)=\lim F'(x)=0$(或为$\infty$)，且相应满足条件②、③，则

$$\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\frac{f''(x)}{F''(x)}.$$

**【注】**深受解题者喜爱的洛必达法则是"万能"的吗？当然不是. 条件①、②需在解题前验证，条件③只能在解题过程中验证. 若用洛必达法则得到极限不存在(且不为$\infty$)，则一般不能说明极限不存在(且不为$\infty$)，只能说明法则失效，需用其他方法求解. 例如，对于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}+\sin x}{x}$，若用洛必达法则，

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}+\cos x}{1},$$

看似极限不存在. 但若改用极限运算法则，则有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0+1=1.$$

故原极限存在，只是洛必达法则不管用了而已.

### 6. 等价无穷小

**(1) 等价无穷小的定义**

设 $\lim\limits_{x\to\cdot}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to\cdot}\beta(x)=0$，若 $\lim\limits_{x\to\cdot}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$，则 $\beta(x)$与$\alpha(x)$是等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$ $(\alpha(x)\neq 0)$.

**(2) 无穷小的等价替换**

① 若 $\alpha_1\sim\alpha_2$，$\beta_1\sim\beta_2$，$\lim\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}$存在，则 $\lim\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}=\lim\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}$；

② 若 $\alpha\sim\beta$，$\varphi(x)$极限存在或有界，则 $\lim\alpha\varphi(x)=\lim\beta\varphi(x)$.

**【注】**

(i) 若 $\alpha_1\sim\alpha_2$，$\beta_1\sim\beta_2$，则不能轻易下结论 $\alpha_1\pm\beta_1\sim\alpha_2\pm\beta_2$ 并相互替换(原因后面会讲)；

(ii) 等价无穷小具有传递性，即若 $\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$.

**(3) 常用于替换的等价无穷小**

当 $\alpha(x)\to0$ 时，$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$，$\tan\alpha(x)\sim\alpha(x)$，$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$，$\arctan\alpha(x)\sim\alpha(x)$，$\ln[1+\alpha(x)]\sim\alpha(x)$，$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$，$1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{\alpha^2(x)}{2}$，$[1+\alpha(x)]^{\mu}-1\sim\mu\alpha(x)$.

## 7. 重要极限

① $\lim\limits_{f(x)\to0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$；

② $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{f(x)}\right]^{f(x)}=\lim\limits_{f(x)\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=e$.

## 8. 极限存在准则

① (夹逼准则)$\begin{cases}y_n\leqslant x_n\leqslant z_n,\\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a,\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；

② 单调有界数列必有极限.

**【注】**此处“单调有界”表现为单调递增且有上界或单调递减且有下界.

## 9. 定积分定义式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**【注】**更常用的是当 $a=0$，$b=1$ 时的形式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

## 10. 初等函数定义

由常数和基本初等函数(即幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数)经有限次四则运算或有限次复合构成的用一个式子表示的函数叫做初等函数.

## 11. 连续性定义

设 $f(x)$在 $x_0$ 的某一邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在点 $x_0$ 上连续. 在

区间上每一点都连续的函数叫做在该区间上的连续函数.

特别地,一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

## 12. 求极限时常用的泰勒展开式

① $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$;　　② $\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$;

③ $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$;　　④ $\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$;

⑤ $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$;　　⑥ $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$;

⑦ $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$.

**【注】** 此处 $o(x^n)$ 表示比 $x^n$ 次数更高的项.

# 问题研究

## 1. 初等函数

**题眼探索**　走在学习高等数学的路上,要翻越的第一座山就是求那个含有 lim 的东西.如果翻不过去,则导数定义(详见第二章)没法用,级数的收敛性(详见第七章)难判断,这一路将不知错过多少风景!

面对这样一个庞大的问题,我们的研究该从何处下手呢?有一个“另类”给出了启发,它叫做初等函数.为什么说它是另类呢?因为初等函数在定义区间上一定连续,而 $f(x)$ 在连续区间内的点 $x_0$ 处一定满足 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.这太棒了!因为只要把自变量趋于的东西代入函数表达式,就可能得到极限值.所以,探索之旅不妨自初等函数始.同时,也可以说,**求初等函数极限的基本策略是“代入”,即自变量趋于什么,就先把什么代入函数表达式**(不论是 $x_0,x_0^+,x_0^-,\infty,+\infty,-\infty$).那么,问题又来了,代入之后就能马上知道极限是什么吗?恐怕要分两种情况讨论:

1° 若根据代入后的形式能确定极限值,则不妨称这样的形式为“已定型”,并分 3 种情况讨论;

2° 若根据代入后的形式不能确定极限值,则不妨称这样的形式为“未定型”,并分 7 种情况讨论.

### (1) 初等函数呈已定型

1) 常数型(极限值一定为该常数)

**【例 1】** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x)}{\arcsin(\tan x)}=$____________.

**【分析】** 紧紧抓住求初等函数极限的基本策略,把 $x=\frac{\pi}{4}$ 代入 $\frac{\ln(\sin x)}{\arcsin(\tan x)}$,得 $-\frac{1}{\pi}\ln 2$.

答案为$-\frac{1}{\pi}\ln 2$.

**【题外话】** 不论给出的初等函数"长相"有多奇怪，只要把自变量趋于的东西代入后是一个常数，就尽管放心大胆地将这个常数作为答案.

2）"$\frac{\text{非零常数}}{0}$"型（极限值一定为$\infty$）

**【例 2】** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x-1}=$__________.

**【分析】** 把 $x=1$ 代入$\frac{x+2}{x-1}$，分子得 3，分母得 0，答案为$\infty$.

**【题外话】** 这是多么简单的一道题啊！但是初学者很容易想到用洛必达法则，得到错误答案"1"$\left(\text{错在洛必达法则仅适用于未定型}\frac{\infty}{\infty}\text{和}\frac{0}{0}\right)$；也可能想到将分子、分母的最高次项系数作比，得到相同的错误答案$\left(\text{这种方法后面会讲，仅适用于未定型}\frac{\infty}{\infty}\right)$. 为什么会在阴沟里翻船呢？因为**求初等函数极限不是以函数的形式为导向的，而是以"代入"后的"型"为导向的. 一种已定型对应一个结果，一种未定型对应若干种方法.**

3）"0 · 有界函数"型（极限值一定为 0）

**【例 3】** $\lim\limits_{x\to 0^+}x\cos(\ln x)=$__________.

**【分析】** 当 $x\to 0^+$ 时，$\ln x\to -\infty$，$\cos(\ln x)$的振荡不会超过上界 1 和下界$-1$，呈"0 · 有界函数"型，答案为 0.

**【题外话】** 当 $f(x)\to\infty$ 时，$\sin f(x)$，$\cos f(x)$，$\sin f(x)\pm\cos f(x)$的振荡都"有界".

**（2）初等函数呈未定型**

**题眼探索**　面对未定型，目标很明确——转化为已定型. 换言之，就是使函数"代入"后成为常数型、"$\frac{\text{非零常数}}{0}$"型或"0 · 有界函数"型. 那么该如何实现呢？我们最容易想到两个方向. 第一，对函数变形；第二，用洛必达法则. 许多解题者对洛必达法则乐此不疲，但不得不承认，它存在三个缺陷：1°仅限分式；2°可能失效；3°运算复杂（尤其在函数多重复合或需多次求导才能得出答案时）. 因此，**"变形"才是求解未定型函数极限的优先方法，而洛必达法则只能作为保底的"救命稻草"**. 也就是说，用洛必达法则很多时候是需要通过先变形来创造条件的，而且是能不用尽量不用. 这样，也就明白了变形的目的：1°尽可能变未定型为已定型，"一步到位"求出极限；2°若变不成已定型，则能够变不便于用洛必达法则为便于用洛必达法则也是极好的. 这就有了变形的三个大体方向：

1° **化复杂为简单**（如约分、有理化、无穷小的等价替换等）；

2° **化整式为分式**（如对 0 · $\infty$型、$\infty-\infty$型的处理方法）；

3° **化无穷大为无穷小**（如"同除法"）.

下面，一起聊聊求 7 种未定型极限的具体方法.