计 算 方 法

沈克精　编著

海南国际新闻出版中心

计　算　方　法

沈克精　编著

海南国际新闻出版中心

琼新登字(05)号
责任编辑:薛奇一
封面设计:任 余

计 算 方 法

沈克精 编著

*

海南国际新闻出版中心出版发行
(570206 海口市南航路侨企大厦B座6楼)
总编辑:沈敏特
安徽杏花印刷厂印刷
新华书店经销
1995年6月第1版 1995年6月第1次印刷
开本 850×1168 毫米 1/32 印张 11
字数 260 千字 印数:0001—2000
ISBN7—80609—194—7/O·2
定价:10.50元

前　言

本书是作者多年在安徽大学为数学系本科生以及理科有关专业的部分研究生讲授计算方法的内容，并结合作者近年来的研究成果编写而的。全书包括微积分、线性代数、微分方程的数值方法等内容。着重介绍计算机上常用的计算方法，对算法的基本理论，都给予详细的推导，每一基本理论都配有相应的例题，每一章都附有相当数量的习题以便帮助读者加深理解各章的内容。

本书可作为大专院校理、工科的教材或参考书，也可供工程科技人员在数字计算机上解题的参考书。读者只要具备微积分和线性代数的基础知识，便能学好这门课程。

在编写过程中，安徽大学数学系郑祖庥教授以及数学系殷承元副主任，对本书提出了很多宝贵的意见，在此，谨向他们深切致谢！

由于水平有限，书中定有许多不妥乃至错误之处，敬请读者给予批评指正。

沈克精

1995 年夏于安徽大学

内 容 简 介

本书是作者十多年来从事计算数学教学和科研的总结。全书分九章，着重介绍计算机上常用的计算方法，包括误差分析、插值方法、数值积分与微分、函数逼近、线性与非线性方程组的解法、迭代法、特征值与特征向量的计算及常微分方程数值解法等基础知识，还包含二重插值和二重积分的数值方法等新的内容，对常用的数值方法，给出了算法的基本思想和算法的主要过程。

本书选材适当，系统性强，叙述由浅入深；通俗易懂，对重要的公式或定理都给予详细的推导与证明，有较丰富的例题，每章均配有相当数量的习题，便于自学与教学。

本书适合作高等院校的数学系（不包括计算数学专业）、计算机系、物理系、自动控制系等的大学生和研究生以及工科院校各有关专业的大学生和研究生开设计算方法课程的教材或参考书之用；也可作为业余科技大学和电视大学有关专业进修计算方法的用书以及工程科技人员在数字计算机上实际解题的参考书。

目　录

第一章　误　　差

§1　引　言

由于应用数学在最后得到数值的结果，所以应用数学工作者便会遇到各种各样的数学公式，这就必须研究各种数学问题求解的数值计算方法，也就是近似计算方法，并希望在各情况下，以最省的时间获得最好的结果。本章的目的，在于阐述一些与近似计算有关的基本概念和方法，并且提出数值计算中的若干问题。

§2　误差的来源

用数学工具来解决实际问题，所得到的数值结果必然与实际问题存在一定的误差，通常在哪些地方可能产生误差呢?

例1　(数学摆问题)一个重质点 m 摆在一条长为 λ 的绳子的一端，假设绳子是无质量、无伸缩的，让它沿一个铅直平面上作圆周运动，试求出从最低点量起的偏角 φ 随时间 t 的变化规律。

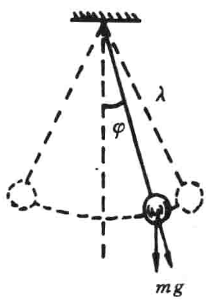

图 1—1

如图 1—1 所示，当 φ 甚小时，$\sin\varphi\approx\varphi$ 可归结为如下微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}+\dfrac{g}{\lambda}\varphi=0\\[2ex]\varphi|_{t=0}=0,\dfrac{d\varphi}{dt}\Big|_{t=0}=\omega\end{cases}$$

的解的问题. 其中 $g \approx 9.81$ 米/秒^2，λ 为摆绳长，ω 为初始时刻的角速度.

显然，这种通过对实际问题进行抽象简化而得到的数学模型与实际问题必然存在误差，这种误差称为“模型误差”.

模型中出现的参数 ω 和 g 常常是通过观测实验得到，它们和实际的大小之间有误差，这种误差称为“观测误差”或“参数误差”.

根据实际问题得到数学模型，多数情况下要想得到准确解往往是困难的，因而常用数值方法，求出它的近似解.

例 2 计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

解 因 e^{-x^2} 的原函数不能用初等函数表示，故应采用数值计算方法，例如可利用幂级数展开

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-x^2}dx &= \int_0^1\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots\right)dx \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 21} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots\right)\Bigg|_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \cdots
\end{aligned}
$$

若取前 6 项的和，记为 S_6

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx$$

$$S_6 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 3!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!}$$

$$R_6 = \frac{1}{13\cdot 6!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \frac{1}{17\cdot 8!} - \frac{1}{19\cdot 9!} + \cdots$$

$$\leqslant \frac{1}{13\cdot 6!} < 0.0002$$

R_6 便是原积分值与前 6 项和 S_6 所产生的误差.

在一个无穷级数中，用前面的有限项代替，所产生的误差，称

为“截断误差”或“方法误差”.

$$S_6 \approx 1.0000 - 2.0000 - 0.3333 + 0.1000 - 0.0238 + 0.0046 - 0.0008$$
$$= 0.7467$$

上述计算 S_6 的过程中，由于对数进行四舍五入而引起的误差，称为“舍入误差”.

由于 S_6 中第一与第三项是精确值，而其它四项每项不超过 5×10^{-5} 故 S_6 的舍入误差不超过 $5\times10^{-5}\times4$ 因此，截断误差与舍入误差的总和不超过 0. 0004，即

$$\left|\int_0^1 e^{-x^2}dx - 0.7467\right| \leqslant 0.0004$$

例 3　$\pi = 3.1415926\cdots$，　$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$，$\frac{1}{3} = 0.3333\cdots$，等等，在计算机上运算只能使用有限位小数，如果取小数点后四位数字，则

$$\delta_1 = 3.1416 - \pi = +\ 0.0000074\cdots$$

$$\delta_2 = 1.4142 - \sqrt{2} = -\ 0.000013\cdots$$

$$\delta_3 = 0.3333 - \frac{1}{3} = -\ 0.000033\cdots$$

就是舍入误差.

除上述几种误差外，初始数据有时也有误差这种误差称为“初值误差”.

总起来说，误差一般有：模型误差、观测误差、截断误差、舍入误差、初值误差. 各种误差都会影响计算结果的准确性，因此，需要研究和了解这些误差. 本书着重研究截断误差和舍入误差.

§3　误差的基本概念

3-1　误差与误差限

定义 1　设 x^* 表示准确值 x 的一个近似值，则此近似值 x^* 和准确

值 x 的差称为绝对误差，简称误差. 用 e^* 表示.

$$e^* = x^* - x \quad \text{或} \quad x = x^* - e^*$$

近似值去掉（减去）它的误差就是准确值. 因此，误差的负数 $-e^*$ 称为近似值 x^* 的修正值. 或说，近似值加上它的修正值就是准确值.

误差有正有负，当误差为正时，近似值偏大，称为“强近似”，当误差为负时，近似值偏小，称为“弱近似”.

由于在一般情况情况下，准确值 x 是不知道的，所以误差 e^* 的准确值也不能求出，但根据具体测量或计算的情况，可以估计误差的绝对值不能超出某个正数 ε^*，也就是误差绝对值的一个上界. ε^* 称为近似值的“误差限”.

定义 2 如果 $|e^*| = |x^* - x| \leqslant \varepsilon^*$ 则 ε^* 称为近似值 x^* 的误差限. 误差限 ε^* 一定是一个正数.

由于 $|x^* - x| \leqslant \varepsilon^*$ 或 $|x - x^*| \leqslant \varepsilon^*$ 便有

$$-\varepsilon^* \leqslant x - x^* \leqslant \varepsilon^*$$

即 $x = x^* \pm \varepsilon^*$ 或 $x \in [x^* - \varepsilon^*, x^* + \varepsilon^*]$

常用 $x = x^* \pm \varepsilon^*$ 表示近似值的精度.

例 4 $\left|\int_0^1 e^{-x^2} dx - 0.7467\right| \leqslant 0.0004$ 可写成

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.7467 \pm 0.0004$$

因此，0.0004 是积分 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ 的近似值 0.7467 的一个误差限.

例 5 真空中光速 C 的最好近似值为

$$C^* = 2.997925 \times 10^{10} \text{ 厘米/秒}$$

其误差限为

$$\varepsilon^* = 0.000001 \times 10^{10} \text{ 厘米/秒}$$

通常记为

$$C = (2.997925 \pm 0.000001) \times 10^{10} \text{ 厘米/秒}.$$

2—2　相对误差与相对误差限

上面引入的误差和误差限的概念常常不能说的近似值的好坏程度，它是有量纲单位的.

例 6　第一根轴的设计长为 120mm，加工后测量长为 120.03mm，第二轴的设计长为 12mm，加工后测量长为 12.03mm，试判定哪一根轴加工精度高?

$$e_1^* = 120.03 - 120 = 0.03(mm)$$

$$e_2^* = 12.03 - 12 = 0.03(mm)$$

显然，两根轴加工的精度是不同的，但 $e_1^* = e_2^*$. 因此，误差（绝对误差）不能完全反映误差好坏的程度，下面引入相对误差的概念.

定义 3　近似值 x^* 的误差 e^* 与准确值 x 的比值 $\frac{e^*}{x} = \frac{x^* - x}{x}$ 称为近似值 x^* 的相对误差，记为 e_r^*.

在实际计算中，精确值往往是不知道的，我们把 $e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$ 作为近似值 x^* 的相对误差.

在例 6 中，$$e_{1r}^* = \frac{120.03 - 120}{120.03} = 0.25\%$$

$$e_{2r}^* = \frac{12.03 - 12}{12.03} = 2.5\%$$

显然，第一根轴加工精度比第二根轴加工精度高.

定义 4，相对误差绝对值的上界，称为“相对误差限”.

记作 $$\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|}$$

其中 ε^* 是近似值 x^* 的误差（绝对误差）限.

在例 5 中光速 $C = (2.997925 \pm 0.000001) \times 10^{10}$ 厘米/秒.

$$\varepsilon^* = 0.000001 \times 10^{10}, \qquad C^* = 2.997925 \times 10^{10}$$