普通高等教育“十二五”规划教材（高职高专教育）

基础数学

JICHU SHUXUE

王　彭　主　编
吕　昆　彭书新　郑金玲　副主编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

普通高等教育"十二五"规划教材（高职高专教育）

基础数学

JICHU SHUXUE

主　编　王　彭
副主编　吕　昆　彭书新　郑金玲
编　委　刘　清　李婧梓　赵佃波　刘　佳
主　审　高　宏

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为普通高等教育"十二五"规划教材（高职高专教育），在数学系列课程教学内容与课程体系改革方针的指导下，编者根据多年的教学实践经验和研究成果，结合"数学课程教学基本要求"编写而成．全书共分七章，主要内容为：集合与函数、基本初等函数、三角恒等变换、平面向量、立体几何初步、平面解析几何、复数．每章均配有两套习题，书末附有习题参考答案，便于授课与学习．

本书与全日制初中数学教材衔接，别具特色，体系结构新颖，重视数学思想的陈述，充分运用直观的方法展现数学的概念、理论和方法．在保持理论高度的前提下，陈述和论证推理的难度有较大的降低．

本书可作为普通五年一贯制院校工科类各专业基础数学课程的教材．

图书在版编目（CIP）数据

基础数学/王彭主编．—北京：中国电力出版社，2014.8
普通高等教育"十二五"规划教材．高职高专教育
ISBN 978-7-5123-5994-9

Ⅰ．①基… Ⅱ．①王…Ⅲ．①高等数学—高等职业教育—教材
Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 130645 号

中国电力出版社出版、发行
（北京市东城区北京站西街 19 号 100005 http：//www.cepp.sgcc.com.cn）
北京丰源印刷厂印刷
各地新华书店经售
*
2014 年 8 月第一版 2014 年 8 月北京第一次印刷
787 毫米×1092 毫米 16 开本 13.25 印张 315 千字
定价 **27.00** 元

前言

职业教育是我国现代教育体系的重要组成部分，是国民经济和社会发展的重要基础．为了适应我国目前工科类，特别是建筑、建材类高职教育发展的需要，根据工科类高职学院数学教学大纲的精神，结合高职类（三年制、五年制）高等职业教育的实际情况，以及我院十几年高职教育教学的经验和学生实际情况，我们组织了部分有教学经验的数学教师，编写了一套适合工科类三年制、五年制各专业特点和要求的数学教材．

本书的编写是在 2003 年山东省五年制高等职业教育统编数学教材、 2006 年普通高等教育"十五"国家级规划数学教材（高职高专教育）的基础上进行的．全书共分为三册，本册为第一册《基础数学》，包括了初等数学的绝大部分内容，主要供五年制高职学生第一学年使用．本册教材总学时 220 学时左右．

在编写过程中，注意了与全日制初中数学教材的衔接，加强了数学基础知识的系统性和科学性．考虑到建筑类各专业的特点和对数学的要求，在内容上作了适当的增删和调整，文字叙述力求精练、准确．主要概念由实例引入，即从感性认识入手，再上升到严格的数学定义．每章最后配有趣味知识，以激发学生的学习兴趣，提高学生学习的积极性．例题和习题的配置，难易适度，力求与实际结合，以培养学生分析和解决实际问题的能力．

由于编者水平有限，时间较仓促，所以书中不妥之处在所难免，诚望广大读者朋友批评指正．

编　者

2014 年 6 月

目　录

第一章　集合与函数

集合语言是现代数学的基本语言，使用集合语言，可以简洁、准确地表达数学的一些内容. 本章中只将集合作为一种语言来学习，学生将学会使用最基本的集合语言去表示有关的数学对象，发展运用数学语言进行交流的能力.

函数的学习促使学生的数学思维方式发生了重大的转变：思维从静止走向了运动、从运算转向了关系. 函数是基础数学的核心内容，函数与不等式、数列、导数、立体、解析、算法、概率、选修中的很多专题内容有着密切的联系. 用函数的思想去理解这些内容，是非常重要的出发点. 反过来，通过这些内容的学习，加深了对函数思想的认识. 函数的思想方法贯穿于基础数学课程乃至高等数学的始终，函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型.

第一节　集　　合

一、集合的概念

1. 集合的概念

集合是指某些指定的对象汇集在一起成为一个集合（简称集）. 集合是数学中不加定义的原始概念，是最基本的概念之一，它是用描述性语言叙述的. 如"高一（1）班学生"就组成一个集合，记为{高一（1）班学生}. 集合中的每个对象都叫做这个集合的元素. 集合常用大写的拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，元素常用小写的拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. 若 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；若 b 不是集合 A 的元素，就说 b 不属于集合 A，记作 $b\notin A$.

2. 集合中元素的特征

（1）**确定性**：任意给定一个对象，都可以判断它是不是给定集合的元素，也就是说，给定集合必须有明确的条件，依此条件，可以明确地判定某一对象是这个集合的元素或不是这个集合的元素，二者必居其一，不会模棱两可.

如："较大的数"、"著名科学家"等均不能构成集合.

（2）**互异性**：即一个集合中的任何两个元素都应该是不相同的，特别是含有字母的问题，解题后需要进行检验.

（3）**无序性**：集合中不同的元素之间没有地位差异，集合与其中元素的排列顺序无关.

3. 集合的表示方法

（1）**列举法**：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内来表示集合的方法.

注意

①元素间用分隔号"，"，且元素不重复；②对于含有较多元素的集合，如果构成该集合的元素有明显规律，可用列举法，但是必须把元素间的规律显示清楚后才能用删节号.

(2) **描述法：**把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内来表示集合的方法. 它的一般形式是：$\{p \mid p$ 适合的条件$\}$，其中 p 叫做代表元素.

注意

对于一般形式的描述法，不能只把注意力放在竖号“|”右边“p”适合的条件，还要对竖号“|”左边“p”的形式引起足够的重视.

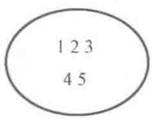

图 1-1

列举法与描述法各有优点，应该根据具体问题确定采用哪种表示法，要注意，一般集合中元素较多或有无限个元素时，不宜采用列举法.

(3) **图示法：**为了形象地表示集合，我们常常画一条封闭的曲线，用它的内部来表示一个集合. 如图 1-1 所示，表示集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

4. 常用数集的符号

(1) 全体非负整数的集合通常简称非负整数集（或自然数集），记作 N；

(2) 全体正整数的集合简称为正整数集，记作 N^* 或 N_+；

(3) 全体整数的集合简称为整数集，记作 Z；

(4) 全体有理数的集合简称为有理数集，记作 Q；

(5) 全体实数的集合简称为实数集，记作 R.

值得注意的是，三个集合 N，N^*，N_+ 的意义及书写形式，切不可写为 N^*，N^+，对于正整数集，手写通常写 N_+，较为方便.

5. 集合的分类

集合含有有限个元素的集合叫做有限集；集合含有无限个元素的集合叫做无限极；不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$.

注意

不含任何元素的集合叫空集，通常记为$\varnothing$，它不同于 $\{0\}$，因为 $\{0\}$ 是指含有一个元素 0 的集合；同时$\varnothing$不能记为 $\{\varnothing\}$，因为 $\{\varnothing\}$ 是指含有一个元素$\varnothing$的集合；另外，在集合的关系与运算中千万别漏了空集这种情况.

6. 集合的包含关系

(1) 子集与真子集.

1) **子集：对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 包含于集合 B（或集合 B 包含集合 A），记作 $A \subseteq B$（或 $B \supseteq A$）.**

注意

①“A 是 B 的子集”的含义是：集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，即由任意 $x \in A$，都能推出 $x \in B$. ②任何一个集合都是它本身的子集. 因为，对于任何一个集合 A，它的任何一个元素都属于集合 A 本身，记作 $A \subseteq A$. ③规定：空集是任何集合的子集，即对于任何一个集合 A，有 $\varnothing \subseteq A$.

2) **真子集：如果 $A \subseteq B$，且 $A \neq B$，就说集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A \subset B$.**

注意

空集是任何非空集合的真子集，即若 $A\neq\varnothing$，则 $\varnothing\subset A$.

（2）集合相等. **如果集合 A 中的任何一个元素，都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，我们就说集合 A 等于集合 B.**

即若 $A\subseteq B$ **且** $B\supseteq A$，**则称** A **等于** B，**记作** $A=B$.

说明：上述定义给出了我们证明两个集合相等的办法，即欲证 $A=B$，**只需证** $A\subseteq B$ **与** $B\subseteq A$ **都成立即可.**

（3）简单性质.

(1) $A\subseteq A$ **（即任何集合都是它本身的子集）；**

(2) $\varnothing\subseteq A$ **（即空集是任何集合的子集）；**

(3) 若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，**则** $A\subseteq C$ **（集合的传递性）；**

(4) 若集合 A **是** n **个元素的集合，则集合** A **有** 2^n **个子集（其中** 2^n-1 **个真子集）.**

二、集合的运算

如同数与数之间有加、减、乘、除等各种运算一样，集合与集合之间也有一些特定的运算及运算规律，集合的基本运算是并、交、差.

1. 集合的并

设 A 和 B 是两个集合，所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集（简称并），记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$. 图 1-2 中阴影部分表示并 $A\cup B$. 例如，$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{2, 4, 6, 8\}$，则 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$.

2. 集合的交

设 A 和 B 是两个集合，所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集（简称交），记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$. 图 1-3 中阴影部分表示交 $A\cap B$. 例如，$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{2, 4, 6, 8\}$，则 $A\cap B=\{2, 4\}$.

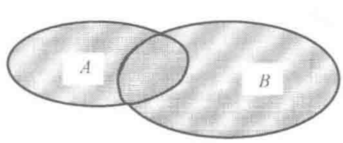

图 1-2

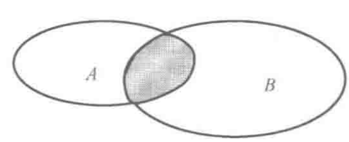

图 1-3

3. 集合的差

设 A 和 B 是两个集合，所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集（简称差），记作 $A-B$，即 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$. 图 1-4 中阴影部分表示差 $A-B$. 例如，$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{2, 4, 6, 8\}$，则 $A-B=\{1, 3\}$.

4. 全集与补集

（1）全集的概念. **包含了我们所要研究的各个集合的全部元素的集合称为全集，记作 S.**

注意

全集是相对于所研究问题而言的一个相对概念，它含有与所研究问题有关的各个集合的全部元素，因此，全集因研究问题而异.

（2）补集的概念. **设 S 是一个集合，A 是 S 的一个子集（即 $A\subseteq S$），则由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做 S 中集合 A 的补集，记作 $\overline{A}$** 或 $C_SA=\{x \mid x\in S$ 且 $x\notin A\}$，如图 1-5 所示.

可见，S 中集合 A 的补集是 S 的一个子集.

（3）简单性质.

1）$C_S(C_SA)=A$；

2）$C_SS=\varnothing$，$C_S\varnothing=S$.

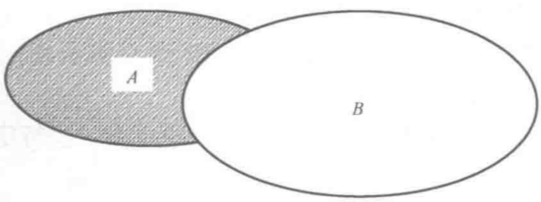

图 1-4

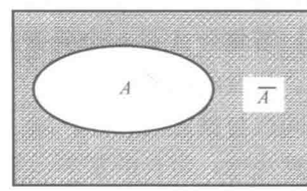

图 1-5

例如，在实数 R 中，集合 $A=\{x \mid 0\leqslant x<1\}$ 的补集就是 $\overline{A}=\{x \mid x<0$ 或 $x\geqslant 1\}$.

设 A、B、C 为任意三个集合，则有下列四个定律成立：

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

（2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

（3）分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

（4）对偶律：$(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cap\overline{B}$，$(\overline{A\cap B})=\overline{A}\cup\overline{B}$.

以上四个定律都可以根据集合相等的定义加以验证.

习题 1—1

一、单项选择题

1. 下列集合中空集是（　　）.

A. $\{1, 2, 3\}\cap\{3, 5, 6\}$　　B. $\{0, 1, 2\}\cap\{3, 5, 6\}$

C. $\{(x, y) \mid y=x^2$ 且 $y=x\}$　　D. $\{x \mid x>3\}$

2. 设集合 $P=\{5, a, 6, 8\}$，$M=\{2, 4, 7, b\}$，若 $P\cap M=\{4, 5\}$，则 a，b 取值（　　）.

A. $a=4$，$b=5$　　B. $a=5$，$b=5$　　C. $a=5$，$b=4$　　D. $a=4$，$b=4$

3. 设 $A=\{x \mid 3<x<6\}$，$B=\{x \mid x>5\}$，则 $A\cup B=$（　　）.

A. $\{x \mid x>5\}$　　B. $\{x \mid x>6\}$　　C. $\{x \mid 5<x<6\}$　　D. $\{x \mid x>3\}$

4. 设 $P=\{1, 2, 3\}$，$M=\{1, 5, 3\}$，则 $P-M=$（　　）.

A. $\{5\}$　　B. $\{2\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\{3\}$

5. 设实数集 R 表示全集，集合 $I=\{x\mid 1\leqslant x<5\}$，那么 $\bar{I}$ 为(　　).

A. $\{x\mid x\leqslant 1\}\cup\{x\mid 1<x<5\}$　　B. $\{x\mid x<1\}\cup\{x\mid 1<x<5\}$

C. $\{x\mid x<1\}\cup\{x\mid x>5\}$　　D. $\{x\mid x<1\}\cup\{x\mid x\geqslant 5\}$

二、计算题

1. 用描述法表示下列集合：

(1) 不小于 6 的所有实数集合；

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 的交点的集合.

2. 用列举法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2-3x+2=0$ 的根的集合；

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 的交点的集合；

(3) 集合 $A=\{x\mid 0<|x-2|<6,\ x\in Z\}$.

3. 设 $A=\{x\mid 3<x<5\}$，$B=\{x\mid x>4\}$，求：(1) $A\cup B$；(2) $A\cap B$.

第二节　函　　数

一、映射与函数

1. 映射概念

设 A，B 分别是两个集合，为简明起见，设 A，B 分别是两个有限集.

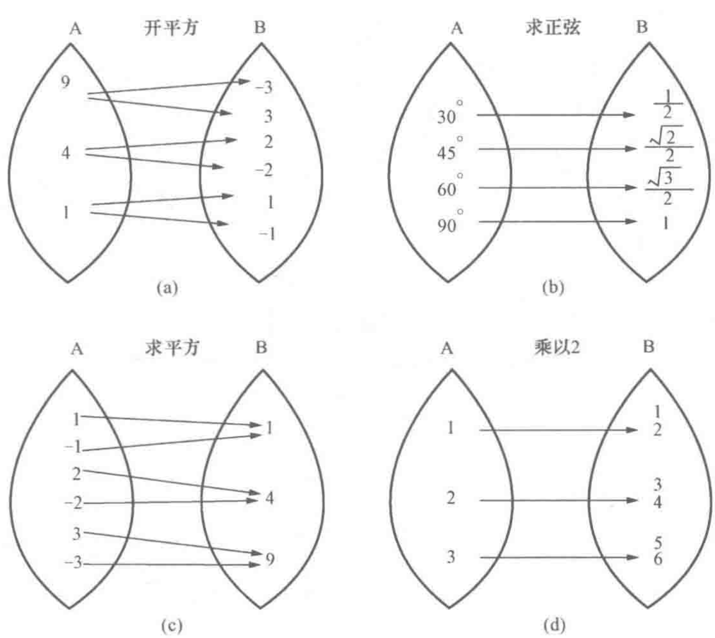

图 1-6

图 1-6 (b)、(c)、(d) 这三个对应的共同特点是：对于左边集合 A 中的任何一个元素，在右边集合 B 中都有唯一的元素和它对应.

设 A，B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集

合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应（包括集合 A、B 以及 A 到 B 的对应法则 f）叫做集合 A 到集合 B 的映射．记作：f：$A\to B$.

给定一个集合 A 到集合 B 的映射，且 $a\in A$，$b\in B$，如果元素 a 和元素 b 对应，则元素 b 叫做元素 a 的象，元素 a 叫做元素 b 的原象.

对于集合 A 中的不同元素，在集合 B 中有不同的象，这种映射称为单射；集合 B 中的每一个元素都是集合 A 中的每一个元素的象，这种映射称为满射，即集合 B 中的每一个元素都有原象；既是单射又是满射的映射为一一映射.

需要说明的是：

(1)"A 到 B"．映射是有方向的，A 到 B 的映射与 B 到 A 的映射往往不是同一个映射，A 到 B 是求平方，B 到 A 则是开平方，因此映射是有序的.

(2)"任一"．就是说对集合 A 中任何一个元素，集合 B 中都有元素和它对应，这是映射的存在性.

(3)"唯一"．对于集合 A 中的任何一个元素，集合 B 中都是唯一的元素和它对应，这是映射的唯一性.

(4)"在集合 B 中"．也就是说 A 中元素的象必在集合 B 中，这是映射的封闭性.

根据定义，图 1 - 6 中，(b)、(c)、(d) 这三个对应都是集合 A 到集合 B 的映射；注意到其中 (b)、(d) 是一对一，(c) 是多对一．根据定义可以得到一对一，多对一是映射．但一对多显然不是映射．其中 (b)、(d) 是单射，(b)、(c) 是满射，(b) 是一一映射.

从定义可以知道映射有三要素，集合 A，B 以及对应法则 f，缺一不可.

2．函数概念

(1) **定义：设 A，B 是非空的数集，如果按某个确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 f：$A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in A$，其中 x 叫自变量，x 所在的集合 A 叫做函数 $y=f(x)$的定义域；与 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ ($\subseteq B$) 叫做函数 $y=f(x)$ 的值域.**

函数符号 $y=f(x)$ 表示"y 是 x 的函数"，有时简记作函数 $f(x)$.

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总会在 R 内，因此构成函数的要素是：定义域及对应法则 f．如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数是相同的，否则是不同的．至于自变量和因变量用什么字母表示，则无关紧要．比如说只要对应法则 f 相同，定义域也相同时，$y=f(x)$ 与 $u=f(v)$ 就表示同一个函数.

下面举几个例子帮助大家理解函数的定义：

1) 一次函数 $f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$：定义域 R，值域 R.

2) 反比例函数 $f(x)=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$：定义域 $\{x\mid x\neq 0\}$，值域 $\{f(x)\mid f(x)\in R,\ f(x)\neq 0\}$.

3) 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$：定义域 R.

值域：当 $a>0$ 时，$\left\{y\mid y\geqslant\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right\}$；当 $a<0$ 时，$\left\{y\mid y\leqslant\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right\}$.

(2) 求解定义域．为了更好地理解定义域，首先来介绍一下区间的概念.

设 a，$b\in R$ 且 $a<b$，规定：

1）满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数的集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 叫做闭区间，记作 $[a,b]$；
2）满足 $a<x<b$ 的所有实数的集合 $\{x|a<x<b\}$ 叫做开区间，记作 (a,b)；
3）满足 $a<x\leqslant b$ 的所有实数的集合 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 叫做左开区间，记作 $(a,b]$；
4）满足 $a\leqslant x<b$ 的所有实数的集合 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 叫做右开区间，记作 $[a,b)$.
左开区间和右开区间统称为半开区间.

在数轴上表示区间时，属于这个区间的端点的实数，用实心点表示，不属于这个区间端点的实数，用空心点表示. 这些区间可以用数轴上的一条以 a 和 b 为端点的线段来表示. 端点间的距离叫做区间的长. 上述四种区间在数轴上分别如图 1-7 所示.

区间的长为有限时，叫做有限区间，以上四种区间都是有限区间.

区间的长为无限时，叫做无限区间.

关于无限区间，又有如下规定：

1）$[a,+\infty)$ 表示 $\{x|a\leqslant x<+\infty\}$，也可以写作 $a\leqslant x<+\infty$；
2）$(a,+\infty)$ 表示 $\{x|a<x<+\infty\}$，也可以写作 $a<x<+\infty$；
3）$(-\infty,b]$ 表示 $\{x|x\leqslant b\}$，也可以写作 $-\infty<x\leqslant b$；
4）$(-\infty,b)$ 表示 $\{x|x<b\}$，也可以写作 $-\infty<x<b$；
5）$(-\infty,+\infty)$ 表示实数集 R，也可以写作 $-\infty<x<+\infty$.

上述前五个区间在数轴上分别如图 1-8 所示.

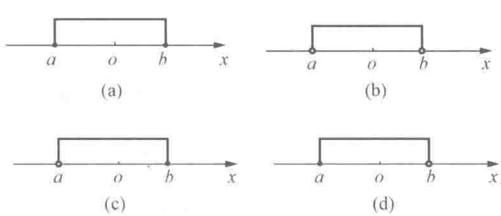

图 1-7

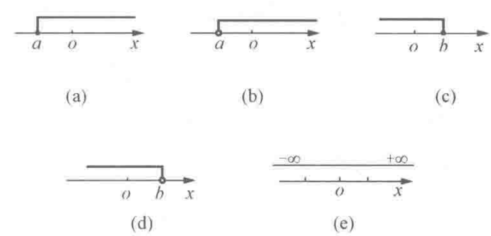

图 1-8

符号"∞"读作"无穷大"，它不表示某一个确定的实数，只表明某个变量变化时，它的绝对值越来越大，永无止境，它描述了一个变量的绝对值无限增大的趋势.

"$+\infty$"读作"正无穷大"表示某个变量沿正方向无限增大.

"$-\infty$"读作"负无穷大"表示某个变量沿负方向绝对值无限增大.

以上五种区间都是无限区间.

下面介绍定义域的求法.

函数的定义域通常由问题的实际背景确定. 如果只给出解析式 $y=f(x)$，而没有指明它的定义域，那么函数的定义域是指能使这个式子有意义的实数 x 的集合. 定义域通常用集合或者区间的形式表示出来.

【例 1-1】 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$；(2) $f(x)=\sqrt{3x+2}$；(3) $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{2-x}$.

解：(1) 因为 $x-2=0$，即 $x=2$ 时，分式 $\dfrac{1}{x-2}$ 无意义，而 $x\neq 2$ 时，分式 $\dfrac{1}{x-2}$ 有意义，所以这个函数的定义域是 $\{x\mid x\neq 2\}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 因为 $3x+2<0$，即 $x<-\frac{2}{3}$时，根式$\sqrt{3x+2}$无意义，而 $3x+2\geqslant 0$，即 $x\geqslant -\frac{2}{3}$时，根式$\sqrt{3x+2}$才有意义，所以这个函数的定义域是 $\{x \mid x\geqslant -\frac{2}{3}\}=\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

(3) 因为当 $x+1\geqslant 0$ 且 $2-x\neq 0$，即 $x\geqslant -1$ 且 $x\neq 2$ 时，根式$\sqrt{x+1}$和分式$\frac{1}{2-x}$同时有意义，所以这个函数的定义域是 $\{x \mid x\geqslant -1$ 且 $x\neq 2\}$.

另解：要使函数有意义，必须：$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\2-x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant -1\\x\neq 2\end{cases}$ 所以这个函数的定义域是 $\{x \mid x\geqslant -1$ 且 $x\neq 2\}=[-1, 2)\cup(2, +\infty)$.

解题时要注意书写过程，注意紧扣函数定义域的含义. 由［例 1-1］可知，求函数的定义域就是根据使函数式有意义的条件，布列自变量应满足的不等式或不等式组，解不等式或不等式组就得到所求的函数的定义域.

【例 1-2】 已知函数 $f(x)=3x^2-5x+2$，求 $f(3)$，$f(-\sqrt{2})$，$f(a+1)$.

解： $f(3)=3\times 3^2-5\times 3+2=14$

$f(-\sqrt{2})=3\times(-\sqrt{2})^2-5\times(-\sqrt{2})+2=8+5\sqrt{2}$

$f(a+1)=3(a+1)^2-5(a+1)+2=3a^2+a$

【例 1-3】 下列函数中哪个与函数 $y=x$ 是同一个函数？

(1) $y=(\sqrt{x})^2$；(2) $y=\sqrt[3]{x^3}$；(3) $y=\sqrt{x^2}$.

解： (1) $y=(\sqrt{x})^2=x$ $(x\geqslant 0)$，$y\geqslant 0$，定义域不同且值域不同，不是同一个函数；

(2) $y=\sqrt[3]{x^3}=x$ $(x\in R)$，$y\in R$，定义域值域都相同，是同一个函数；

(3) $y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\-x, & x<0\end{cases}$，$y\geqslant 0$；值域不同，不是同一个函数.

3. 函数的表示法

常用的函数表示法包括解析法、表格法、图像法等.

(1) 解析法：就是把两个变量的函数关系，用一个等式表示，这个等式叫做函数的解析表达式，简称解析式.

例如，$s=60t^2$，$A=\pi r^2$，$S=2\pi rl$，$y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$，$y=\sqrt{x-2}$ $(x\geqslant 2)$ 等都是用解析式表示函数关系的.

优点：一是简明、全面地概括了变量间的关系；二是可以通过解析式求出任意一个自变量的值所对应的函数值. 中学阶段研究的函数主要是用解析法表示的函数.

(2) 列表法：就是列出表格来表示两个变量的函数关系. 例如，学生的身高见表 1-1.

表 1-1 **学生的身高** cm

学号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
身高	125	135	140	156	138	172	167	158	169

数学用表中的平方表、平方根表、三角函数表，银行里的利息表，列车时刻表，公共汽车上的票价表等都是用列表法来表示函数关系的.

优点：不需要计算就可以直接看出与自变量的值相对应的函数值.

(3) 图像法：就是用函数图像表示两个变量之间的关系.

例如，在气象观测站，气门自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上，如图 1-9 所示的曲线，由图可以看到一昼夜内的每一时刻 t，都由唯一确定的温度 T 与之对应，因此图中曲线在闭区间 $[0, 24]$ 上确定了一个函数，也就是用图像表示函数.

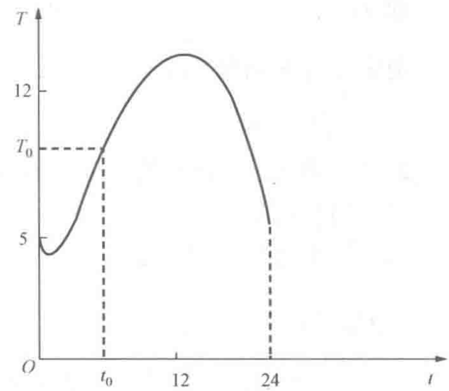

图 1-9

优点：能直观形象地表示出自变量的变化和相应的函数值变化的趋势，这样使得我们可以通过图像来研究函数的某些性质.

二、函数的性质

1. 增函数与减函数

定义：对于函数 $f(x)$ 的定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1，x_2.

(1) 若当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数.

(2) 若当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则说 $f(x)$ 在这个区间上是减函数.

说明：函数是增函数还是减函数，是对定义域内某个区间而言的. 有的函数在一些区间上是增函数，而在另一些区间上不是增函数. 例如函数 $y=x^2$，当 $x\in[0, +\infty)$ 时是增函数，当 $x\in(-\infty, 0)$ 时是减函数.

2. 单调性与单调区间

若函数 $y=f(x)$ 在某个区间是增函数或减函数，则函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有（严格的）单调性，这一区间叫做函数 $y=f(x)$ 的单调区间，此时也说函数是这一区间上的单调函数.

在单调区间上，增函数的图像是上升的，减函数的图像是下降的.

【例 1-4】 证明函数 $y=f(x)=3x+2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

证明： 设任意 x_1，$x_2\in(-\infty, +\infty)$，且 $x_2>x_1$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=(3x_2+2)-(3x_1+2)=3(x_2-x_1)$$

因为 $x_2>x_1$，所以 $x_2-x_1>0$.

即 $f(x_2)-f(x_1)>0$，$f(x_2)>f(x_1)$.

由定义可知 $y=f(x)=3x+2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

【例 1-5】 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

证明： 设任意 x_1，$x_2\in(0, +\infty)$，且 $x_2>x_1$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_2x_1}$$

因为 $x_1>0$，$x_2>0$，$x_2>x_1$

所以 $x_1-x_2<0$，$x_1x_2>0$

即 $f(x_2)-f(x_1)<0, f(x_2)<f(x_1)$.

由定义可知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

3. 函数的奇偶性

定义：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是对称于原点的数集.

(1) 如果对 $\forall x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，那么 $f(x)$ 叫做奇函数.

(2) 如果对 $\forall x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$ 成立，那么 $f(x)$ 叫做偶函数.

注意

奇函数的图像关于原点对称. 所谓点 P 和 Q 关于原点对称，即 P 绕原点 O 旋转 $180°$ 后与 Q 重合. 平面图像 F 关于原点对称，即 F 上任意一点 P 绕原点 O 旋转 $180°$ 后仍在图像 F 上.

偶函数的图像关于 y 轴对称. 所谓点 P 和 Q 关于 y 轴对称，即 P、Q 在 y 轴的两侧，若以 y 轴为折缝，将纸折叠，则 P 与 Q 重合. 平面图像 F 关于 y 轴对称，平面图像在 y 轴两侧，若以 y 轴为折缝，将纸折叠，则两侧图像完全重合.

【例 1-6】 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^3$；(2) $f(x)=x^2+1$；(3) $f(x)=x+1$；(4) $f(x)=x^2$，$x\in[-1, 3]$.

解：(1) 因为 $f(-x)=(-x)^3=-f(x)$，所以 $f(x)=x^3$ 是奇函数.

(2) 因为 $f(-x)=(-x)^2+1=f(x)$，所以函数 $f(x)=x^2+1$ 是偶函数.

(3) 因为 $f(-x)=-x+1$，显然 $f(-x)\neq f(x)$，所以 $f(x)=x+1$ 既不是奇函数，也不是偶函数. 这样的函数称为非奇非偶函数.

(4) 因为 $[-1, 3]$ 不是关于原点的对称区间，比如 $2\in[-1, 3]$ 而 $-2\notin[-1, 3]$，所以 $f(x)=x^2$ 在 $[-1, 3]$ 上是非奇非偶函数.

三、一次函数与一元一次不等式

两个一次函数有时根据需要，要比较其函数值的大小，这时问题就转化为一元一次不等式的问题. 另外，利用解不等式的方法也可以求出两个一次函数的值的大小. 事实上，不等式与函数和方程是紧密联系的一个整体.

一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq0)$ 的图像是一条直线，当 $kx+b>0$ 时，表示图像在 x 轴上方的部分；当 $kx+b=0$ 时，表示直线与 x 轴的交点；当 $kx+b<0$ 时，表示图像在 x 轴下方的部分.

1. 不等式的解集

在含未知数的不等式中，能使不等式成立的未知数的值的全体所构成的集合，叫做不等式的解集. 不等式的解集一般可用集合的描述法或者区间来表示. 例如 $2x-1>0$ 的解集可表示为 $\{x \mid 2x-1>0\}=\left\{x \mid x>\dfrac{1}{2}\right\}=\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

2. 一元一次不等式和不等式组的解法

一元一次不等式和不等式组的解法，是解各种不等式（组）的基础. 这部分内容在初中