中学数学专题丛书

叶尧城 主编

王华慧 编著

圆锥曲线

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU

湖北教育出版社

2

中学数学专题丛书

叶尧城 主编

圆锥曲线

王华慧 编著

2

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

圆锥曲线/王华慧编著 .—武汉:湖北教育出版社,2001
(中学数学专题丛书/叶尧城主编)
ISBN 7-5351-3158-1

Ⅰ.圆… Ⅱ.王… Ⅲ.圆锥曲线-中学-教学参考资料
Ⅳ.G634.653

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 078198 号

出版 发行:湖北教育出版社
网 址:http://www.hbedup.com
武汉市青年路 277 号
邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:湖北新华印务有限公司 (430034·武汉市解放大道 145 号)
开 本:787mm×1092mm 1/32 6.75 印张
版 次:2002 年 4 月第 1 版 2002 年 7 月第 2 次印刷
字 数:131 千字 印数:5 001-8 000

ISBN 7-5351-3158-1/G·2563 定价:9.00 元

总　序

随着素质教育的深入推进,需要我们在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁,以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建?改革教材成为了人们选择的突破口!当前,国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用,新教材在"为所有的学生打好共同基础"上将有所作为。然而,我国幅员辽阔,地区间的教育水平的差异大,个体间学习水平的差异大。如何真正地体现"以学生发展为本",发展学生的个性特长,让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高,还需要通过特定的教学过程来完成,其中应有好的素材和高质量的课外读物(而非散见于市面上的"检测题"、"同步练习"、"习题集"等)。因此,我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物,以专题讲座的形式,帮助学生了解知识的发生、发展过程,学会分析、解决问题的思想方法,深化、拓宽相关知识。

有鉴于此,我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有 18 个小册子,各册相对独立又相互联系,小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触,介绍一点数

学史料，有助于学生吸收各种不同的数学经验，理解各种不同的数学思想观点，体会数学的人文价值；着力反映知识的纵横联系，并以范例的形式予以说明；精选典型例题，揭示重难点，说明重在何处，难在哪里，如何理解，着重分析解题思路，阐释思想方法；选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题，引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题，供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生，可系统阅读，也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲，该套丛书具有如下特点：

1. **帮助学生夯实基础。**通过知识精讲、典例剖析、归纳小结，落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力。**精选思想性强的综合题，启迪学生的思维，开阔学生的思路，落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用。**精选密切联系生活实际和社会实践的应用题，促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新。**精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题，培养学生的探究能力。

5. **引导学生走向成功。**选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型，有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩，走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试，难免出现这样或那样的疏漏和不足，敬请读者提出批评和建议，以便再版时修改，使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002年1月

目录

第一章 圆锥曲线方程的基本知识

学习《圆锥曲线》，我们要认识圆锥曲线，了解它们在生活和科学技术中的应用，同时对“圆锥曲线”这个名称的来历也要有所了解.

为了认识圆锥曲线，首先要理解曲线与方程的概念，在此基础上学习研究圆锥曲线的定义、方程、几何性质和它的简单应用，还要能够利用平移化简圆锥曲线的方程.

关于圆锥曲线在生活和科学技术中的应用以及名称的来历，我们将在后面章节中论述.

一、曲线与方程

学习曲线与方程，必须掌握曲线的方程，方程的曲线、坐标法、解析几何等概念，能解决求曲线的方程和曲线的交点等问题.

在建立了直角坐标系之后，平面上的点和有序实数对之间就建立了一一对应关系，在此基础上我们进一步研究平面内的曲线与含有两个变数的方程之间的关系，我们把含有两个变数的方程中的 x、y 看作平面上点的坐标，让 x“连续

地改变"，对于每一个 x 的值，就得出一系列的有序实数对 (x, y)，再用它们作为点的坐标而描出一系列的点，一般地就得到一条曲线. 由此，对于含有两个变数 x、y 的一个代数方程 $f(x, y)=0$，就在平面上有一条和它对应的完全确定的曲线.

按上面的方法确定的方程的曲线，我们要特别注意两点：

(1)"曲线上的点的坐标都是这个方程的解"，换句话说就是"坐标不是这个方程的解的点不在这曲线上"，也就是说曲线上所有的点都符合这个条件而毫无例外（纯粹性）.

(2)"以这个方程的解为坐标的点都在曲线上"，也就是说"不在曲线上的点的坐标不是这个方程的解"，即符合这个条件的所有点都在曲线上而毫无例外（完备性）.

例如，过点 (0, 1) 平行于 x 轴的直线 l 与方程 $y=\frac{|x|}{x}$ $(x\neq0)$ 之间的关系，既不具备性质 (1)，这是因为直线上至少有一点 (0, 1) 不适合方程，又不具备性质 (2)，这是因为当 $x<0$ 时，方程化为 $y=-1$ $(x<0)$，不要误认为直线 l 就是 $y=\frac{|x|}{x}$ $(x\neq0)$ 的曲线，那么 $y=\frac{|x|}{x}$ $(x\neq0)$ 的曲线究竟是什么呢？请读者思考一下把它画出来.

实数与方程是我们代数研究的对象，而点和曲线则是我们几何研究的对象，建立了平面直角坐标系后，我们就把这两者结合起来了.

解析几何的方法就是坐标法，它的工具是坐标系，借助

于坐标系研究几何图形的方法叫做坐标法.

解析几何是数学的一个分支，产生于17世纪初期，当时由于资本主义生产的发展，在促进自然科学和生产技术改进的过程中，相应地提出了许多数学问题，例如，在天文学中，开普勒发现行星沿椭圆轨道绕太阳运行，在力学中，伽利略发现抛射体沿抛物线轨道运动，帕斯卡发现大气压力随高度的增加而递减的规律，科学和技术的发展所产生的许多问题，都需要人们对曲线进行研究和计算，从而导致了解析几何的产生和发展.

笛卡儿（René Descartes，1596年～1650年）是解析几何的奠基人，他开始把代数用到几何上去，在他所著的《几何学》一书中，开始曾应用代数解决几何作图问题，后来逐渐出现用方程表示曲线的思想，笛卡儿说：“我决心放弃那个仅仅是抽象的几何，这就是说，不再去考虑那些仅仅是用来练习思想的问题，我这样做是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何”．他断言曲线的次数与坐标轴的选择无关，并指出坐标轴要选得使最后得到的方程越简单越好，笛卡儿称那些可用惟一的含 x 和 y 的有限次代数方程表示出的曲线为几何曲线，其它如旋轮线、对数曲线、对数螺线等为机械曲线，后来莱布尼茨（Leibniz，1646年～1716年）进一步用“代数曲线”和“超越曲线”代替“几何曲线”和“机械曲线”笛卡儿的思想和工作大大推动了对曲线的深入研究，因为给定任何一个含 x 和 y 的代数方程，人们可以求出它的曲线；而且能进一步用代数方法研究这些曲线的性质，还能把这种数和形结合的方法推广到研究“超越曲线”

上来，解析几何的产生对数学的发展，特别是对微积分的出现起了很大作用，恩格斯对笛卡儿的这一发现给予了高度评价，说："数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微积分也就成为必要的了."（恩格斯《自然辩证法》）.

"解析几何"是在坐标系的基础上，用代数方法研究几何问题的一门数学学科，"平面解析几何"研究的主要问题是：(1) 根据已知条件求出表示平面曲线的方程；(2) 通过方程研究平面曲线的性质，并画出曲线的图形. 曲线和方程的概念是解析几何中最基本的内容，掌握了这个概念，才能用解析法研究几何图形的性质. 由于解析几何开创了数、形结合的研究方法，使数学的发展进入了一个新阶段，解析几何就成为进一步学习数学、物理和其它一些科学的基础.

根据已知条件求出平面曲线的方程，归纳起来有如下的五个步骤：

第一步：立系，建立适当的直角坐标系，用 (x, y) 表示曲线上任意一点 M 的坐标；

第二步：列式，写出适合条件 p 的点 M 的集合 $p=\{M \mid p(M)\}$；

第三步：代换，用 M 的坐标 (x, y) 表示 $p(M)$，得到方程 $f(x, y)=0$；

第四步：化简，化方程 $f(x, y)=0$ 为最简形式；

第五步：证明，证明以化简后的方程的解为坐标的点都是曲线上的点；

在学习根据已知条件求出平面曲线的方程时，应注意如

下几点:

(1) 在求方程之前, 必须先建立坐标系, 否则, 曲线不能转化为方程. 在具体问题中有两种情况: 一是所研究的问题已给定了坐标系, 此时在给定的坐标系中求方程即可; 二是原题中没有确定坐标系, 此时必须首先选取适当的坐标系, 坐标系的选取要使运算过程简单, 从而所得的方程也较简单.

(2) 根据曲线上的点所要适合的条件列出等式, 是求方程的重要一环, 在这里常要用到一些基本公式, 如两点间的距离公式, 点到直线的距离公式, 直线的斜率公式等, 因而我们要经常复习这些知识, 牢固掌握这些知识, 另外, 要认真仔细审题, 分析已知条件和曲线的特征, 抓住与曲线上任意一点 M 有关的相等关系, 这是列出等式的关键.

(3) 求得方程以后, 按照严格的求曲线方程的步骤, 应当证明以所得方程的解为坐标的点都在曲线上, 但在多数情况下, 化简前后的解集相同, 因而所得的方程就是曲线的方程, 证明的步骤可以省略, 但是如果化简前后方程的解集不同, 则应删去增加的解, 或补上失去的解.

(4) 关于求曲线方程的问题, 几乎贯穿解析几何的全过程, 求曲线方程的能力的提高是逐步的和渐进的, 不能急于求成, 由于求曲线方程时所给条件是多种多样的, 解法也比较灵活, 要自觉培养全面分析问题的能力.

关于求曲线的交点的问题, 曲线的交点也就是两条曲线的公共点, 求曲线的交点就是求两条曲线公共点的坐标, 由曲线上点的坐标和它的方程的解之间的对应关系可知, 两条

曲线的交点的坐标，应该是由这两条曲线的方程所组成的方程组的实数解，方程组有几个实数解，这两条曲线就有几个交点，若方程组无实数解，那么这两条曲线就没有交点，即是说，两条曲线有交点的充要条件是由这两条曲线的方程所组成的方程组有实数解，这里涉及解方程组问题，必须随时复习解方程组的知识.

总之，要想学好曲线与方程，必须随时注意复习方程和方程组的知识包括一元二次方程的根的判断式，根与系数的关系等.

二、椭圆

开始学习椭圆时，要认真按照课本中介绍的椭圆的画法，在画图板或桌面上画出椭圆. 在画图的过程中感受椭圆的形成以及椭圆上的点所要满足的条件，得到一些对椭圆的感性认识.

学习椭圆的定义："平面内与两个定点 F_1、F_2 的距离的和等于常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做椭圆"时，要仔细考虑为什么"常数"要加上一个条件，即常数要大于 $|F_1F_2|$，如果常数不大于 $|F_1F_2|$，即等于 $|F_1F_2|$ 或小于 $|F_1F_2|$ 将出现什么情况呢？它的轨迹还是椭圆吗？它的轨迹不是椭圆又是什么呢？请大家认真思考.

求椭圆的方程，首先要建立坐标系，曲线上同一个点在不同的坐标系中的坐标不同，曲线的方程也不同，为了使方

程简单，必须注意坐标系的选择．怎样选择坐标系，要根据具体情况确定．在一般情况下，应注意使已知点的坐标和曲线的方程尽可能简单．在求椭圆的标准方程时，我们根据画出椭圆的感觉，意识到它是一条以直线 F_1F_2 为对称轴的对称曲线，这样，我们选择 x 轴经过两个定点 F_1、F_2，并且使坐标原点与线段 F_1F_2 的中点重合，两个定点的坐标比较简单，便于推导方程．

在求方程时，设椭圆的焦距为 $2c$（$c>0$），椭圆上任意一点到两个焦点的距离的和为 $2a$（$a>0$），这是为了使焦点及长轴两个端点的坐标不出现分数形式，以便导出的椭圆的方程形式简单，令 $a^2-c^2=b^2$ 是为了使方程的形式整齐而便于记忆，同时 b 也还有特定的几何意义，下面学习椭圆的性质时就知道了．

根据两点间的距离公式，代换所列等式，我们就得到了一个根式方程，得到的根式方程为两个根式的和等于一个非零常数，化简时要进行两次平方，方程中字母超过三个，且次数高．项数多，我们在初中学习时几乎没有做过这样的题目，解根式方程的基本方法之一是两边平方，去掉根号，(1) 如果方程中只有一个根式，需把它单独留在方程的一侧，把其它各项移至另一侧后两边平方；(2) 若方程中有两个根式时，把一个根式单独留在一侧，其它各项移至另一侧后两边平方，这样，方程中就只有一个根式了．

得到了化简后的椭圆方程后，根据曲线和方程的概念，还需证明坐标适合方程的点一定在椭圆上，由于椭圆方程的化简过程是等价变形，而证明过程较繁，因而教材中没有给

出证明，下面介绍一下分析证明过程，供学有余力的同学参考.

设点 M（x，y）满足方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（其中 $a>b>0$，$c>0$，$a^2-c^2=b^2$），下面要证 M 在椭圆上，即要证 $|MF_1|+|MF_2|=2a$，其中 F_1 和 F_2 的坐标分别为（$-c$，0）和（c，0），下面我们首先用坐标表示并化简 $|MF_1|$ 和 $|MF_2|$

由椭圆方程得：$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$

$$\therefore |MF_2|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$=\sqrt{(x^2+2cx+c^2)+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$$

$$=\sqrt{b^2+c^2+2cx+\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2}$$

$$=\sqrt{a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2}=\left|a+\frac{c}{a}x\right|$$

同理 $|MF_2|=\left|a-\frac{c}{a}x\right|$

在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，$\because \frac{y^2}{b^2}\geqslant 1$，$\therefore \frac{x^2}{a^2}\leqslant 0$，即 $|x|\leqslant a$，则

$$\left|\frac{c}{a}x\right|=\left|\frac{c}{a}\right|\cdot|x|\leqslant\left|\frac{c}{a}\right|\cdot|a|=c<a$$

即 $-a<\frac{c}{a}x<a$

$\therefore a-\frac{c}{a}x>0$，$a+\frac{c}{a}x>0$

从而 $|MF_1| = |a + \frac{c}{a}x| = a + \frac{c}{a}x$

$|MF_2| = |a - \frac{c}{a}x| = a - \frac{c}{a}x$

$\therefore |MF_1| + |MF_2| = (a + \frac{c}{a}x) + (a - \frac{c}{a}x) = 2a$

$\therefore M$ 在以 F_1、F_2 为焦点，到两焦点的距离之和为 $2a$ 的椭圆上.

以上讨论的椭圆的标准方程，其焦点在 x 轴上. 若焦点分别为 F_1 $(0, -c)$、F_2 $(0, c)$ 在 y 轴上，a、b 的意义同前，则所得的方程为：

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0,\ a^2 - c^2 = b^2)$$

关于这两种椭圆的标准方程，我们应认识到：

(1) 在椭圆的两种标准方程中，总是 $a > b > 0$.

(2) 椭圆的焦点总是在长轴上.

(3) a、b、c 有关系式 $c^2 = a^2 - b^2$（不要与 $a^2 + b^2 = c^2$ 混淆）如果焦点在 x 轴上，则焦点坐标为 $(c, 0)$，$(-c, 0)$；如果焦点在 y 轴上，则焦点坐标为 $(0, c)$，$(0, -c)$.

(4) 对于方程 $Ax^2 + By^2 = C$，只要 A、B、C 同号，就是表示一个椭圆，方程化为 $\frac{x^2}{\frac{C}{A}} + \frac{y^2}{\frac{C}{B}} = 1$ 比如把方程 $3x^2 +$

$4y^2=5$ 化为标准形式就是 $\frac{x^2}{\frac{5}{3}}+\frac{y^2}{\frac{5}{4}}=1$.

根据曲线的方程，研究曲线的几何性质，并正确画出它的图形，是解析几何的基本问题之一. 学习解析几何中，根据曲线的条件列出方程后，就要根据曲线的方程研究它的性质、画图.

我们要通过对椭圆标准方程的讨论，掌握椭圆的基本性质，掌握标准方程中的 a、b、c 以及 e 的几何意义及其它们之间的相互关系；同时，要通过对椭圆的标准方程的研究，逐步学习在解析几何中用代数方程来研究曲线的性质，我们要在学习椭圆的性质时细心体会.

(1) 在解析几何中讨论曲线的范围，就是确定方程中两个变量的取值范围，课本中是通过解不等式的方法来讨论椭圆的范围的，这里，我们不要忽视了不等式 $\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1$、$\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 的得到，除了根据椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 外，还应用于完全平方数是非负数的重要性质，即 $\frac{y^2}{b^2}\geqslant 0$、$\frac{x^2}{a^2}\geqslant 0$.

还可以采用讨论函数的定义域和值域的办法来研究两个变量的取值范围，只要将椭圆的标准方程变形为 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 后，进行分析研究，即可得到同样的结论.

确定了曲线的范围，就可在此范围内描点画图.