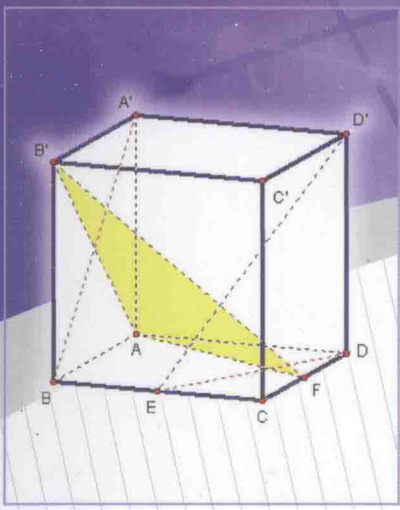
高等教育“十二五”规划教材
高职高专公共课教材系列



应用微积分（下册）

王威杰　主编

科学出版社

高等教育"十二五"规划教材

高职高专公共课教材系列

应用微积分

（下册）

王威杰　主编

齐淑燕　副主编

戴　缘　宫　昊　参编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

《应用微积分》面向接受高等教育的成人和大中专学生。内容主要为一元函数微积分，考虑到不同读者应用微积分的需要，选编了向量代数、空间解析几何、无穷级数和常微分方程的初步知识。

本书结构严谨、逻辑清晰；约简理论推导、强调方法阐述、注重几何直观；力求通俗易懂、宜于自学；其中适度嵌入了与微积分相关的数学实验，意在提高读者应用微积分解决实际问题的能力。

本书可作为高等工科院校继续教育或大专教育的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应用微积分·下册/王威杰主编. —北京：科学出版社，2014
(高等教育“十二五”规划教材·高职高专公共课教材系列)
ISBN 978-7-03-041328-4

Ⅰ.①应…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①微积分-高等职业教育-教材
Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第145933号

责任编辑：沈力匀/责任校对：王万红
责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2014年7月第一版　开本：787×1092　1/16
2014年7月第一次印刷　印张：9 3/4
字数：240 000

定价：22.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉）
销售部电话 010-62134988　编辑部电话 010-62135235（VP04）

前　　言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学，是一切科学的基础，并在各个领域里有着广泛的应用，因此认识数学、学习数学、应用数学是21世纪对所有人才的要求．本书是根据原国家教委颁发的《高等学校数学课程教学基本要求》和科技人才对数学素养的要求，本着面向21世纪深化课程体系和教学内容改革的精神编写的．本书的突出特点是：

1．体系结构严谨，教学内容优化

在本书的编写过程中，注重各分支的有机结合，重视相关内容的内在联系与合理融合，同时对教学内容进行适当的引申．例如将不定积分和定积分合为一元函数积分学，把相通的方法类比地给出，符合学习的优化规律，同时加强了相关内容和方法的联系，条理清晰，避免重复．

2．重视基础，突出方法，着力数学素质的培养

本书对所需知识的基础叙述详尽，以层次的方法由浅入深．在全书中突出思想、方法的必要性和灵活性，从实践出发培养学生的数学思维方法和应用素质．

3．内容必需而够用，注重教学适用

随着高等教育改革的发展，对学生知识面的拓展要求增高，相应地不得不压缩授课课时．为适应这种要求，本书以必需为底、够用为限，尽可能使得结构严谨、论证简明、叙述清晰、例题典型、内容丰富，注重教学适用性．

4．可作为中、高职衔接教材

为推动中等和高等职业教育协调发展，系统培养适应经济社会发展需要的技能型特别是高端技能型人才，本书特别根据汽车、机电类中高职衔接学生的特点，设计了相关教学与实训内容，可作为学生教材与学习参考．

此外，结合教学内容，介绍了 Mathematica 软件的使用方法，使学生初步了解利用计算机软件解决数学中计算问题的方法、手段，培养用软件解决管理、工程中计算问题的意识．带 * 号为选修内容．

本书由王威杰担任主编，齐淑燕担任副主编，具体编写分工如下：

王威杰编写第 3 章、第 4 章、第 7 章、第 9 章、附录；齐淑燕编写第 5 章、第 6 章；戴缘编写第 8 章、第 10 章；宫昊编写第 1、2 章；全书由王威杰统稿．

在本书的编写过程中，参考了国内外部分优秀教材和文献，在此对原作者表示衷心的感谢．限于作者水平有限，虽然多易其稿并通过讲义广泛试用，但书中疏漏和不当之处在所难免，敬请专家、学者和广大使用者提出宝贵意见．

目　　录

第 7 章　空间解析几何与向量代数

17 世纪前半叶产生了一门全新的几何学——解析几何. 法国数学家笛卡儿(Descartes Rene，1596～1650)是解析几何的主要创立者. 解析几何把"数"和"形"统一起来，从而实现了既可以用代数的方法解决几何问题，也可以用几何的方法解决代数问题. 因此，解析几何的产生在数学史上具有划时代的意义.

空间解析几何的任务是用代数的方法研究空间图形的性质. 本章将引进向量概念和向量的代数运算，以向量为工具研究平面和空间直线，然后介绍常用的空间曲面.

7.1　空间直角坐标系

平面解析几何是通过坐标使平面上的点与一对有序数组一一对应，它使平面上的曲线与含有两个未知数的代数方程之间建立了联系，借助于代数方法确定平面上点的位置研究几何图形、解决几何问题. 类似地，我们把平面解析几何的思想推广，通过建立三维空间的直角坐标系，沟通空间图形和数之间的联系，这就是我们将要研究的空间解析几何.

7.1.1　空间点的直角坐标

定义 7.1　在空间选某定点 O，以 O 为原点作三条相互垂直且具有相同长度单位的数轴，分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴(亦称为横轴、纵轴和竖轴)，它们的相互位置遵循右手法则(即用右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正方向以逆时针方向转 $\frac{\pi}{2}$ 时，正好是 y 轴的正方向，那么大拇指就指向 z 轴的正方向，见图 7.1)，这样确定的坐标系称为**空间直角坐标系**，记作 $Oxyz$，点 O 称为坐标原点，一般将 x 轴、y 轴放置在水平面上，z 轴垂直于水平面，如图 7.2 所示.

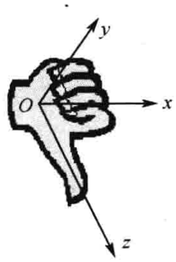


图 7.1

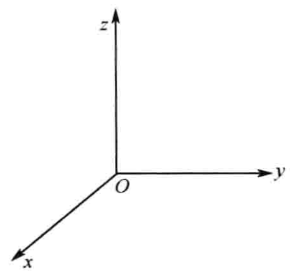


图 7.2

三条坐标轴中每两轴所确定的平面称为坐标平面，简称**坐标面**. 具体讲，x 轴与 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 面，类似地，有 yOz 面、zOx 面. 这些坐标面把空间分成八个

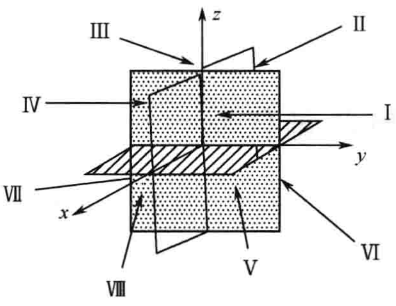


图 7.3

部分，每一部分称为一个**卦限**，从而把空间分成 8 个卦限，由 x 轴、y 轴和 z 轴的正方向所确定的卦限叫第一卦限，其他在 xOy 面上方，按逆时针顺序依次为第二、三、四卦限，记为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限，分别在它们下面的卦限记为Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限，如图 7.3 所示.

设 M 为空间的任意一点，过点 M 分别作垂直于三条坐标轴的平面，与三条坐标轴分别交于 P、Q、R 三点，如图 7.4 所示. 设 x、y、z 分别是它们在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标. 这样，空间内任一点 M 就确定了唯一的一组有序数组 (x, y, z)，称为点 M 的坐标，记为 $M(x, y, z)$，数 x，y，z 分别称为**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**.

反之，任给出一组有序数组 (x, y, z)，它们分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上对应的点为 P、Q、R，过这三点分别作垂直 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，这三个平面交于 M 点，这样一组有序数组就确定了空间内唯一的一个点 M，而点 M 的坐标为 (x, y, z). 因此，我们就建立了空间一点与一组有序数 (x, y, z) 之间的一一对应关系. 空间一些特殊点的坐标及 8 个卦限内点的坐标符号见表 7.1 和表 7.2.

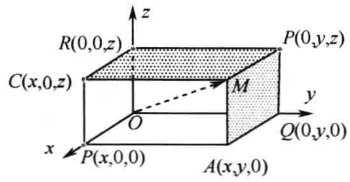


图 7.4

表 7.1

项目	坐标面的点			坐标轴上的点			原点
位置	xOy 面上	yOz 面上	zOx 面上	x 轴上	y 轴上	z 轴上	—
坐标	$A(x, y, 0)$	$B(0, y, z)$	$C(x, 0, z)$	$P(x, 0, 0)$	$Q(0, y, 0)$	$R(0, 0, z)$	$O(0, 0, 0)$
特征	竖标为 0	横标为 0	纵标为 0	仅横标非 0	仅纵标非 0	仅竖标非 0	坐标均为 0

表 7.2

卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
坐标符号	(+,+,+)	(−,+,+)	(−,−,+)	(+,−,+)	(+,+,−)	(−,+,−)	(−,−,−)	(+,−,−)
共性	竖标为正				竖标为负			

7.1.2 两点间的距离公式

设点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间中任意两点，求它们之间的距离 d. 过 P_1 和 P_2 分别作三个垂直于坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体，如图 7.5 所示.

易知

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{|P_1N|^2 + |P_2N|^2} \quad (\triangle P_1NP_2 \text{ 为直角三角形})$$

$$= \sqrt{|P_1M|^2 + |MN|^2 + |P_2N|^2} \quad (\triangle P_1MN \text{ 为直角三角形})$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{7.1}$$

这就是空间两点间的距离公式，如图 7.5 所示.

特别地：点 $M(x, y, z)$ 到原点 $O(0, 0, 0)$ 间的距离为

$$d_0=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

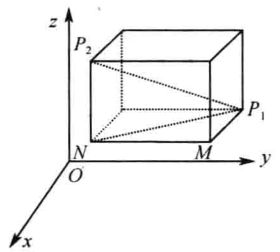


图 7.5

【例 7.1】 求点 $P_1(1, -2, 0)$ 与点 $P_2(4, 2, 1)$ 之间的距离.

【解】

$$\begin{aligned}|P_1P_2|&=\sqrt{(4-1)^2+[2-(-2)]^2+(1-0)^2}\\&=\sqrt{9+16+1}=\sqrt{26}.\end{aligned}$$

【例 7.2】 设点 P 在 x 轴上，它到点 $P_1(0, \sqrt{2}, 3)$ 的距离为到点 $P_2(0, 1, -1)$ 的距离的 2 倍，求点 P 的坐标.

【解】 因为 P 在 x 轴上，设 P 点坐标为 $(x, 0, 0)$，

$$|PP_1|=\sqrt{x^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11};$$

$$|PP_2|=\sqrt{x^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2+2}.$$

因为

$$|PP_1|=2|PP_2|,$$

所以

$$\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2},$$

解方程得 $x=\pm 1$，所求点 P 的坐标为 $(1, 0, 0)$ 或 $(-1, 0, 0)$.

习题 7.1

1. 指出下列各点在坐标系中有何特点？
   $A(3, 0, 0)$；　$B(0, 4, 0)$；　$C(0, -7, 3)$；　$D(3, 0, 2)$.
2. 自点 $P(a, b, c)$ 分别作各坐标面的垂线，写出坐标面上各垂足的坐标.
3. 设点 P 在第一卦限，$\overrightarrow{OP}$ 与三个坐标轴的正方向成等角 α，且 $\overrightarrow{OP}$ 的模为 m，试写出 P 点的坐标.
4. 求点 $P(4, -3, 2)$ 到坐标原点和到各坐标轴的距离.
5. 求下列各对点之间的距离.
   (1) $(2, 3, 1)$，$(5, 3, 5)$；　(2) $(4, 3, 1)$，$(7, 1, 2)$.
6. 指出下列各点在哪一卦限？
   $A(2, -1, 1)$；　$B(-1, 2, 5)$；　$C(3, 1, -4)$.

7.2　向量及其加减法　数与向量的乘积

7.2.1　向量的概念

定义 7.2　既有大小又有方向的量叫做**向量**(或**矢量**). 例如位移、速度、力等.

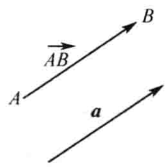


图 7.6

我们常用有向线段来表示向量，以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$，也可以用一个黑体字母或用一个字母上面加一个箭头来表示向量，如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 或 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 等. 如图 7.6 所示.

向量的大小称为向量的**长度**或**模**，用 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\vec{a}|$ 表示.

定义 7.3(几个特殊向量)

零向量　长度为零的向量称为**零向量**，用 $\vec{0}$ 或 $\mathbf{0}$ 表示，零向量的始点与终点重合，因此，零向量的方向为任意.

自由向量　我们只研究与起点无关的向量，即向量仅与模、方向有关，而与起点的位置无关，称这种向量为**自由向量**. 就是说，起点不同而大小、指向均相同的有向线段都表示同一个向量，所以，向量具有平移不变性.

单位向量　长度是 1 的向量称为**单位向量**.

与非零向量同方向的单位向量　与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量记作 $\vec{a}^0$.

基本单位向量　以原点为起点，分别与 x 轴、y 轴、z 轴正向一致的单位向量称为**基本单位向量**，记作 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$，如图 7.7所示.

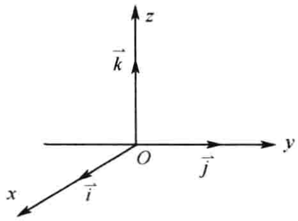


图 7.7

向径　在直角坐标系中，以原点 O 为起点，点 M 为终点的向量称为点 M 的**向径**(或**矢径**)，记作 $\vec{r}$ 或 $\overrightarrow{OM}$，显然，空间的点与它的矢径一一对应.

定义 7.4(两个向量的关系)

相等　方向相同，模相等的两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 称为**相等**，记作 $\vec{a}=\vec{b}$.

相反　方向相反，模相等的两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 称为互为**相反的向量**(或互为负向量)，记作 $\vec{b}=-\vec{a}$.

平行　两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，如果它们的方向相同或相反，就称这两个向量**平行**，记作 $\vec{a}/\!/\vec{b}$.

注：(1) 当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共的起点在一条直线上，因此，两向量平行又称两向量共线.

(2) 规定零向量与任何向量都平行.

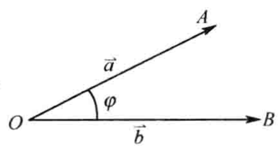


图 7.8

两个向量的夹角　设有两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，规定 $\angle AOB=\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，称 φ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**夹角**，如图 7.8 所示，记为

$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \quad 或 \quad (\widehat{\vec{b}, \vec{a}}).$$

如果向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值.

垂直　若非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角 $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\frac{\pi}{2}$，则称向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，记作 $\vec{a}\perp\vec{b}$，规定零向量与任何向量都垂直.

7.2.2 向量及其加减法

1. 向量的加法

定义 7.5 设有两向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，将$\vec{b}$平行移动使其起点与$\vec{a}$的终点重合，则由$\vec{a}$的起点到$\vec{b}$的终点的向量叫做$\vec{a}$和$\vec{b}$之和，记为$\vec{a}+\vec{b}$，这种方法称为**三角形法则**，如图 7.9 所示. 也可以用另一法则来定义，将$\vec{b}$平行移动使它们的起点重合，作以$\vec{a}$、$\vec{b}$为邻边的平行四边形，则由始点到对顶点的向量称为$\vec{a}$与$\vec{b}$之和，这种方法称为**平行四边形法则**，如图 7.10 所示.

注：(1)向量加法的三角形法则和平行四边形法则本质上是相同的.

(2)三角形法则可以推广到 n 个向量$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$ 求和，法则是：使前一向量的终点作为次一向量的起点，相继做向量$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点做一向量$\vec{a}$，这个向量即为所求的和

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n=\vec{a}.$$

如图 7.11 所示.

向量的加法满足下列运算规律：

(1) 交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

(2) 结合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

交换律可从平行四边形法则得到，结合律可从三角形法则得到，如图 7.12 所示.

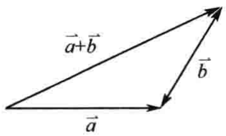


图 7.9

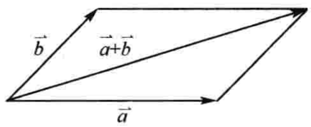


图 7.10

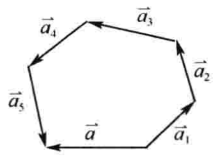


图 7.11

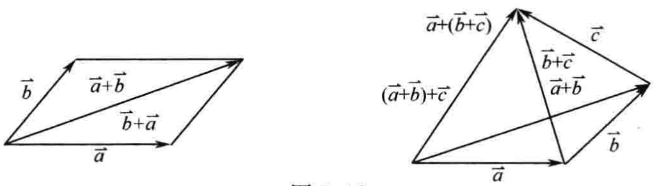


图 7.12

2. 向量的减法

定义 7.6 设有向量$\vec{a}$、$\vec{b}$和 $\vec{c}$，若有$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$，则定义 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$为$\vec{a}$与$\vec{b}$**之差**，记作$\vec{a}-\vec{b}$. 如图 7.13 所示.

利用向量加法的三角形法则，$\vec{a}-\vec{b}$就是把$\vec{b}$的负向量加到向量$\vec{a}$上去.

特别地，有$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$和$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

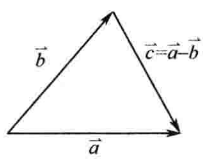


图 7.13

7.2.3 数与向量的乘积

定义 7.7 向量$\vec{a}$与实数 λ 的乘积仍是一个向量，记作 $\lambda\vec{a}$，且有

$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$，它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\vec{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\vec{a}$ 相反，当 $\lambda=0$ 或 $\vec{a}=0$ 时，则有 $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

数与向量乘积满足下列运算规律：

(1)结合律　$\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$；

(2)分配律　$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；

$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

其中 λ，μ 均为实数.

两个向量平行的充要条件是存在一个实数 λ 使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$，这个结论易从数与向量乘积的定义中得到证明.

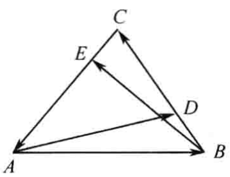


图 7.14

【例 7.3】 $\triangle ABC$ 中(图 7.14)，点 D、E 分别为边 BC、AC 的三等分点，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{c}$，试用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$.

【解】 由向量三角形法则，知

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD},$$

所以

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b};$$

同理，

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}.$$

【例 7.4】 指出下式的几何意义是什么?

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

【解】 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ 表示把 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 三个向量首尾相连时，第一个向量的起点与第三个向量的终点重合，于是，或者 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共线，或者 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 为边构成一个三角形.

习题 7.2

1. 设 M、N、P 分别是 $\triangle ABC$ 的三个边 AB、BC、CA 的中点，已知 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{c}$，求 $\overrightarrow{AN}$、$\overrightarrow{BP}$、$\overrightarrow{CM}$.

2. 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点.

3. 设 $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$，$\vec{n}=\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$，试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 表示 $3\vec{m}-2\vec{n}$.

4. 用向量方法证明：三角形的中位线平行于底边，且它的长度等于底边长度的一半.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上一点，若 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，证明 D 是 BC 的中点.

7.3　向量的坐标

7.3.1　向量的坐标

我们知道，空间的向径和空间的点一一对应，也就是说，任取空间一个向径$\overrightarrow{OM}$，存在唯一的数组$M(x, y, z)$与向径$\overrightarrow{OM}$的终点相对应；反之，任取点$M(x, y, z)$，必有唯一的向径$\overrightarrow{OM}$与之对应，记$\vec{a}=\overrightarrow{OM}$，我们称$\{x, y, z\}$为向量$\vec{a}$的坐标，记作$\vec{a}=\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}$，如图 7.15 所示.

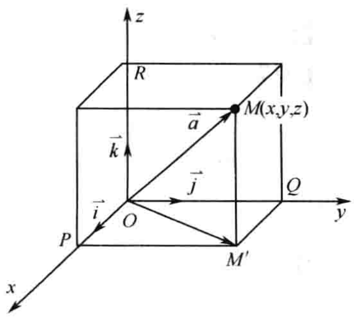


图 7.15

过 M 点作三个平面分别与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴垂直，设垂足(与坐标轴的交点)分别为 P、Q、R，则 P 在 Ox 轴上的坐标为 x，Q 在 Oy 轴上的坐标为 y，R 在 Oz 轴上的坐标为 z. 于是由图 7.15 可见

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}；\quad \overrightarrow{OQ}=y\vec{j}；\quad \overrightarrow{OR}=z\vec{k}$$

利用向量加法法则，

$$\vec{a}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}+\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \tag{7.2}$$

我们称 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$为向量$\vec{a}$的**坐标表示式**(亦称**基本分解式**)，并简记为

$$\vec{a}=\{x, y, z\}. \tag{7.3}$$

注：(1) (x, y, z)表示点，$\{x, y, z\}$表示向量，请注意区别.

(2) $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$中，$x\vec{i}$，$y\vec{j}$，$z\vec{k}$分别称为向量$\vec{a}$在 x 轴、y 轴和 z 轴的**分向量**.

(3) 如果向量的起点不在坐标原点 O，设向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的起点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，终点 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，向径$\overrightarrow{OM_1}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$，$\overrightarrow{OM_2}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$，那么由向量的减法

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}\\&=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}\end{aligned} \tag{7.4}$$

即向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标等于终点 M_2 的坐标与起点 M_1 的坐标之差.

7.3.2　向量的坐标运算

有了向量的坐标表示式，向量的加法、减法和数与向量的乘法运算等都可以化为数的运算.

设

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}，\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\pm(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$
$$=(a_x\pm b_x)\vec{i}+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k}$$
$$=\{a_x\pm b_x,\ a_y\pm b_y,\ a_z\pm b_z\} \tag{7.5}$$

$$\lambda\vec{a}=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k}$$
$$=\{\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z\}. \tag{7.6}$$

由此可见，对向量进行线性运算，只需对向量的坐标分别进行相应的运算即可.

【例 7.5】 已知向量$\vec{a}=\{2,1,4\}$，$\vec{b}=\{-1,3,4\}$，求 $2\vec{a}+\vec{b}$和 $3\vec{a}-\vec{b}$.

【解】 $2\vec{a}+\vec{b}=2\{2,1,4\}+\{-1,3,4\}=\{3,5,12\}$

$3\vec{a}-\vec{b}=3\{2,1,4\}-\{-1,3,4\}=\{7,0,8\}$.

向量由模和方向确定，若已知向量的坐标表示式，如何用坐标表示它的模和方向呢？

作$\overrightarrow{OM}=\vec{a}$，如图 7.15 所示，点 M 的坐标为(x,y,z)，则有

$$\vec{a}=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

于是向量$\vec{a}$的模坐标表示式为

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{7.7}$$

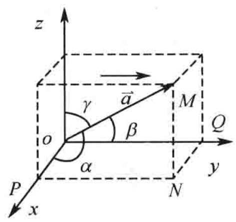


图 7.16

定义 7.8 非零向量 $\vec{a}$ 与三个坐标轴正方向之间的夹角 α,β,γ,称为向量 $\vec{a}$ 的**方向角**,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量的**方向余弦**.

显然,非零向量 $\vec{a}$ 的方向可由该向量的方向角或方向余弦来表示,如何求其方向余弦呢？由图 7.16 可得($\triangle OMP$ 为直角三角形)

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{|\vec{a}|};$$

同理可得

$$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{|\vec{a}|}.$$

显然

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{7.8}$$

即任一非零向量的三个方向余弦的平方和等于 1.

由方向余弦的表达式，我们还可以得出

$$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{|\vec{a}|}\{x,y,z\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}. \tag{7.9}$$

这就是说$\vec{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$恰表示$\vec{a}$的方向. 于是我们常把$\vec{a}$分解为 $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0$. 其中$|\vec{a}|$表示$\vec{a}$的大小，$\vec{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$表示$\vec{a}$的方向.

【例 7.6】 设已知两点 $A(2, 2, \sqrt{2})$ 和 $B(1, 3, 0)$，计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦及与 $\overrightarrow{AB}$ 方向一致的单位向量.

【解】 $\overrightarrow{AB}=\{1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}\}=\{-1, 1, -\sqrt{2}\}$，

模

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2} = 2;$$

方向余弦

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{1}{2}, \quad \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

与 $\overrightarrow{AB}$ 方向一致的单位向量

$$\vec{a}^{\circ} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

【例 7.7】 设向量的方向余弦 $\cos\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\gamma=\frac{1}{2}$，且 $|\vec{a}|=3$，求向量 $\vec{a}$ 的坐标.

【解】 因方向余弦有如下关系

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

所以

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$x = |\vec{a}|\cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{2}};$$

$$y = |\vec{a}|\cos\beta = \frac{3}{2};$$

$$z = |\vec{a}|\cos\gamma = \frac{3}{2};$$

即

$$\vec{a} = \left\{\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\} \quad 或 \quad \vec{a} = \left\{-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}.$$

【例 7.8】 设向量 $\vec{a}$ 的三个方向角都相等,求其方向余弦.

【解】 设向量 $\vec{a}$ 的方向角为 α、β、γ，则有

$$\alpha=\beta=\gamma,$$

由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3\cos^2\alpha=1$,从而

$$\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

因此向量 $\vec{a}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad 或 \quad \cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

习题 7.3

1. 设 $A(1,-1,2)$，$B(1,1,0)$，$C(-1,4,2)$，求 $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{CA}$.

2. 已知向量 $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$，始点为 $(-1,-2,3)$，求向量 $\vec{a}$ 的终点坐标.

3. 设 $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$，$\vec{c}=-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$，求 $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$ 在 x、y、z 轴上的分向量.

4. 设 $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$，求 $|\vec{a}|$ 及 $\vec{a}$ 的方向余弦.

5. 已知点 $A(3,3,2)$ 和 $B(4,5,0)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向一致的单位向量.

6. 设向量 $\vec{a}$ 的方向余弦 $\cos\beta=\dfrac{2}{3}$，$\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$，$|\vec{a}|=3$，求向量 $\vec{a}$ 的坐标.

7.4　数量积与向量积

前面我们讨论了向量的加法运算和数乘运算，那么两个向量可以相乘吗？回答是肯定的，但有两种形式，即数量积和向量积，它们来源于两个不同的物理问题，是向量代数中最基本且应用广泛的两种运算.

7.4.1　数量积

在力学中我们有这样一个问题，就是当物体在常力 $\vec{F}$ 的作用下产生位移 $\vec{s}$ 时，求这个力所做的功. 如果物体移动的方向和力的方向一致，那么这力所做的功就等于力的大小与物体移动的距离的乘积；如果移动的方向和力的方向不一致，那么力所做的功为

$$W=|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\vec{F}$ 与 $\vec{s}$ 的夹角，如图 7.17 所示.

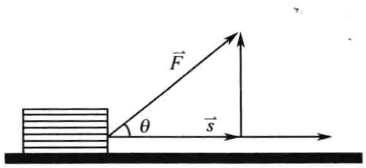


图 7.17

定义 7.9　向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的模与它们之间夹角 θ 的余弦的乘积，称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**内积**. 记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta. \tag{7.10}$$

注：(1) 向量的数量积也称为**点积**.

(2) 向量的数量积的结果是一个常数.

(3) 零向量与任何向量的数量积均为零.

根据定义 7.9，上述问题中力 $\vec{F}$ 所做的功是力 $\vec{F}$ 与位移 $\vec{s}$ 的数量积，即

$$W=\vec{F}\cdot\vec{s}.$$

数量积具有下述性质：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

(2) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

数量积具有下列运算规律：

(1) 交换律　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

(2) 分配律　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.