目 录

1987年全国硕士研究生入学统一考试数学试题答案

（试卷Ⅰ）

一、填空题

(1)**答** 应填 $x-y+z=0$.

解 所求平面法向量可取为

$$n=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

由题可知所求平面过原点，则所求平面方程为

$$-1\cdot(x-0)+1\cdot(y-0)-1\cdot(z-0)=0,$$

即

$$x-y+z=0.$$

(2)**答** 应填$-\frac{1}{\ln 2}$.

解法1 $y'=2^x+x2^x\ln 2=2^x(1+x\ln 2)$. 令 $y'=0$,得 $x=-\frac{1}{\ln 2}$,且当 $x<-\frac{1}{\ln 2}$时,$y'<0$;当 $x>-\frac{1}{\ln 2}$时,$y'>0$,则在 $x=-\frac{1}{\ln 2}$取极小值.

解法2 $y'=2^x+x2^x\ln 2=2^x(1+x\ln 2)$. 令 $y'=0$,得 $x=-\frac{1}{\ln 2}$. 由原题可知极小值是存在的，则只能在 $x=-\frac{1}{\ln 2}$取得.

(3)**答** 应填$\frac{3}{2}$.

解法1 如图1,令 $\ln x=0$,得 $x=1$;令 $e+1-x=0$,得 $x=e+1$;令 $\ln x=e+1-x$,得 $x=e$. 则所求面积为

$$S=\int_1^e \ln x\mathrm{d}x+\int_e^{e+1}(e+1-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}.$$

解法2 对 y 积分，则所求面积为

$$S=\int_0^1(e+1-y-e^y)\mathrm{d}y=\frac{3}{2}.$$

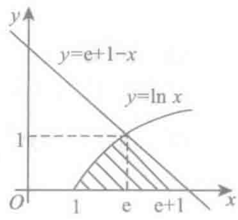

图1

(4)**答** 应填-18π.

解 由格林公式可知

$$\text{原式}=\iint_D[2x-4-(2x-2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\times 9\pi=-18\pi,$$

其中,$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 9\}$.

(5)**答** 应填$(1,1,-1)$.

解 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为(x_1,x_2,x_3),则 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}$,即

$$\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1+x_3=0, \\ x_2+x_3=2. \end{cases}$$

解此方程组得唯一解：$x_1=1,x_2=1,x_3=-1$.

二、解

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\frac{x^2}{b-\cos x}=1,$$

故必有$\lim\limits_{x\to 0}(b-\cos x)=0$,得 $b=1$.

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\frac{x^2}{1-\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a}},$$

从而$\frac{2}{\sqrt{a}}=1$,得 $a=4$.

三、(1)解

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2',\quad \frac{\partial v}{\partial x}=(1+y)g',$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=(1+y)g'\cdot(f_1'+yf_2').$$

(2)**解**　因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$,故 $\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$,即$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$,且$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|\neq 0$,故

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}.$$

四、解　特征方程

$$r^3+6r^2+(9+a^2)r=0$$

的三个根为 $r_1=0,r_{2,3}=-3\pm a\mathrm{i}$. 对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1+\mathrm{e}^{-3x}(C_2\cos ax+C_3\sin ax),$$

其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

设原方程的特解 $y^*=Ax$,代入原方程,得

$$A=\frac{1}{9+a^2}.$$

因此,原方程通解为

$$y=Y+y^*=C_1+\mathrm{e}^{-3x}(C_2\cos ax+C_3\sin ax)+\frac{x}{9+a^2}.$$

五、选择题

(1)**答**　应选(C).

解　由于$(-1)^n\frac{k+n}{n^2}=\frac{(-1)^nk}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}$,又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nk}{n^2}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$都收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$收敛. 而

$$\left|(-1)^n\frac{k+n}{n^2}\right|=\frac{k+n}{n^2}=\frac{k}{n^2}+\frac{1}{n},$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k}{n^2}$收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{k+n}{n^2}$发散. 故原级数条件收敛.

(2)**答**　应选(D).

解　$I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x\xlongequal{tx=u}\int_0^s f(u)\mathrm{d}u$,

由此可见,I 的值只与 s 有关,所以应选(D).

(3)**答**　应选(B).

解法 1　由于$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1<0$. 由极限的保号性可知,存在 a 点的某去心邻域,在此去心邻域内$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$,又$(x-a)^2>0$,则 $f(x)-f(a)<0$,即 $f(x)<f(a)$,由极值定义可知 $f(x)$在 $x=a$ 取极

大值.

解法 2 排除法. 取 $f(x)=-(x-a)^2$. 此 $f(x)$ 显然满足原题条件,且 $f'(a)=0$,则(A)和(D)不能选,又 $f(x)=-(x-a)^2$ 显然在 $x=a$ 取极大值,则(C)不能选,故应选(B).

(4)**答** 应选(C).

解 由 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 两端取行列式,得 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$,因 $|\boldsymbol{A}|=a\neq0$,得 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}=a^{n-1}$.

六、解 记 $u_n=\dfrac{1}{n2^n}x^{n-1}$,有

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\frac{n2^n}{x^{n-1}}\right|=\frac{|x|}{2}.$$

令 $\dfrac{|x|}{2}<1$,知原级数在开区间 $(-2,2)$ 内每一点都收敛.

又当 $x=-2$ 时,原级数 $=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}(-2)^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$,故由莱布尼茨判别法知其收敛;

而当 $x=2$ 时,原级数 $=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}2^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,显然发散,故幂级数的收敛域为 $[-2,2)$.

当 $x\neq0$ 时,记 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{1}{x}S_1(x)$,其中 $S_1(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

由于 $S_1'(x)=\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2-x}$,于是

$$S_1(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{2-t}+S_1(0)=\ln\left(\frac{2}{2-x}\right).$$

当 $x=0$ 时,$S(0)=\dfrac{1}{2}$.

因此幂级数的和函数为 $S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{2}{2-x}, & x\in[-2,2),\text{且 }x\neq0.\\ \dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

七、解 取圆片 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+z^2\leqslant2,\\ y=3,\end{cases}$ 其法线方向与 y 轴正向相同,如图 2.

设 Σ 和 Σ_1 所围成区域为 Ω,由高斯公式,得

$$\begin{aligned}I&=\iiint_{\Omega}(8y+1-4y-4y)\mathrm{d}v-\iint_{\Sigma_1}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\\&\quad 2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v-\iint_{\Sigma_1}2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&=\pi\int_1^3(y-1)\mathrm{d}y+16\iint_{x^2+z^2\leqslant2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{2}y^2-y\right)\Big|_1^3+32\pi\\&=2\pi+32\pi=34\pi.\end{aligned}$$

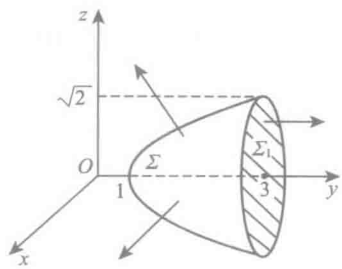

图 2

八、证 令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,由于 $0<f(x)<1$,所以 $F(0)=f(0)-0>0$,$F(1)=f(1)-1<0$,故由零点定理知,在 $(0,1)$ 内至少存在一点 x,使

$$F(x)=f(x)-x=0,\text{即 }f(x)=x.$$

再设有两个 $x_1,x_2\in(0,1)$,$x_1\neq x_2$,使

$$f(x_1)=x_1,f(x_2)=x_2,$$

则由拉格朗日中值定理知,至少存在一点 $x\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$,使

$$f'(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1}=1,$$

从而与题设 $f'(x)\neq1$ 矛盾.

综上，在(0,1)内有且仅有一点 x，使 $f(x)=x$.

九、解 对方程组的增广矩阵作初等行变换，得

$$B=(A\mid b)=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-3r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\0&-1&-2&a-3&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{array}\right).\qquad(*)$$

讨论：① 当 $a\neq1$ 时，$r(A)=r(B)=4$（未知量的个数），故有唯一解；

② 当 $a=1$ 时，由 $(*)$ 有

$$B\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&b+1\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

(i) 当 $b\neq-1$ 时，$r(A)=2\neq r(B)=3$，无解；

(ii) 当 $b=-1$ 时，$r(A)=r(B)=2<4$（未知量个数），故有无穷多解，易求得原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\x_2+2x_3+2x_4=1.\end{cases}$$

解得通解为
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

十、填空题

(1)**答** 应填 $1-(1-p)^n$；$(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$.

解 由伯努利概型的概率计算公式，A 至少发生一次的概率为

$$1-P\{A\text{ 发生 }0\text{ 次}\}=1-C_n^0p^0(1-p)^{n-0}=1-(1-p)^n.$$

而 $P\{A$ 至多发生 1 次$\}=P\{A$ 发生 0 次$\}+P\{A$ 恰发生 1 次$\}$

$$=C_n^0p^0(1-p)^{n-0}+C_n^1p^1(1-p)^{n-1}$$
$$=(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}.$$

(2)**答** 应填 $\frac{53}{120}$；$\frac{20}{53}$.

解 记
$$A_i=\{\text{取的是第 }i\text{ 个箱子}\},i=1,2,3.$$
$$B=\{\text{从箱子中取出的是白球}\},$$

则
$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3},$$
$$P(B|A_1)=\frac{1}{5},$$
$$P(B|A_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$
$$P(B|A_3)=\frac{5}{8}.$$

①由全概率公式：

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{53}{120};$$

②$P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{53}{120}}=\dfrac{20}{53}.$

(3)**答** 应填 $1;\frac{1}{2}$.

解 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\times\frac{1}{2}}}$, $x\in\mathbf{R}$,可见 $X\sim N\left(1,\frac{1}{2}\right)$. 故 $EX=1,DX=\frac{1}{2}$.

十一、解 由于 X 与 Y 相互独立,所以(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\leqslant x\leqslant 1, y>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

因此,Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{2X+Y<z\}=\iint\limits_{2x+y<z}f_X(x)\cdot f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\begin{cases}0, & \frac{z}{2}\leqslant 0,\\ \int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\mathrm{d}y, & 0<\frac{z}{2}\leqslant 1,\\ \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\mathrm{d}y, & \frac{z}{2}>1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}(z+e^{-z}-1), & 0<z\leqslant 2,\\ 1-\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z>2.\end{cases}$$

所以,Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0<z\leqslant 2,\\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z>2.\end{cases}$$

(试卷Ⅱ)

一、【同试卷Ⅰ 第一题】

二、(1)**解** 因 $|x|e^{-|x|}$ 为偶函数,$xe^{-|x|}$ 为奇函数,则

$$原式=2\int_0^2 xe^{-x}\mathrm{d}x=(-2xe^{-x}-2e^{-x})\Big|_0^2=2-\frac{6}{e^2}.$$

(2)【同试卷Ⅰ 第二题】

三、解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+f'_x=f'_u\cdot e^y+f'_x$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(f''_{uu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f''_{uy}\right)e^y+f'_u\cdot e^y+f''_{xu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f''_{xy}$$
$$=f''_{uu}\cdot xe^{2y}+f''_{uy}e^y+f'_u\cdot e^y+f''_{xu}xe^y+f''_{xy}.$$

四、【同试卷Ⅰ　第四题】

五、【同试卷Ⅰ　第五题】

六、【同试卷Ⅰ　第六题】

七、【同试卷Ⅰ　第七题】

八、【同试卷Ⅰ　第八题】

九、【同试卷Ⅰ　第九题】

十、证　由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_2$，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2.$$

(反证)如果 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则应存在数 λ，使 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)$. 综上，有

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2=\lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2),$$

即

$$(\lambda_1-\lambda)\boldsymbol{x}_1+(\lambda_2-\lambda)\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}. \tag{$*$}$$

由于 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 线性无关，在($*$)中应有 $\lambda_1-\lambda=\lambda_2-\lambda=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2$，矛盾. 故 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题答案

（试卷 Ⅰ）

一、(1)解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}{\dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n|x-3|}{3(n+1)}=\frac{1}{3}|x-3|,$$

故当$\frac{1}{3}|x-3|<1$，即 $0<x<6$ 时幂级数收敛.

当 $x=0$ 时，原级数为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，是收敛的.

当 $x=6$ 时，原级数为调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，是发散的.

所以，所求收敛域为$[0,6)$.

(2)解 由 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 得 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$. 所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leqslant 0$.

(3)解 由高斯公式，并利用球面坐标计算三重积分，得

$$\begin{aligned}I&=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v\quad(\Omega\text{ 是由 }\Sigma\text{ 所围成的区域})\\&=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\mathrm{d}r=\frac{12}{5}\pi.\end{aligned}$$

二、填空题

(1)答 应填$(1+2t)e^{2t}$.

解 由于 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{2t}=te^{2t}$，则 $f'(t)=e^{2t}(1+2t)$.

(2)答 应填$\frac{3}{2}$.

解 由傅里叶级数的收敛定理知，在 $x=1$ 处收敛于

$$\frac{f(-1^+)+f(1^-)}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}.$$

(3)答 应填$\frac{1}{12}$.

解 等式 $\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t=x$ 两边对 x 求导，得 $3x^2f(x^3-1)=1$.

令 $x=2$，得 $12f(7)=1$，即 $f(7)=\frac{1}{12}$.

(4)答 应填 40.

解 因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4)$，由行列式的性质即得

$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4|=8|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|=8(|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|)=8(4+1)=40.$

三、选择题

(1)答 应选(B).

解　由于 $f(x)$ 在 x_0 点的微分 $dy=f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{dy}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，dy 与 Δx 为同阶无穷小．

(2)**答**　应选(A)．

解　由原题可知 $f''(x)-2f'(x)+4f(x)\equiv 0$，令 $x=x_0$，则 $f''(x_0)-2f'(x_0)+4f(x_0)=0$，又 $f'(x_0)=0$，$f(x_0)>0$，则 $f''(x_0)=-4f(x_0)<0$，由此可知 $f(x)$ 在点 x_0 处取极大值．

(3)**答**　应选(C)．

解法1　由于(C)选项中的被积函数 $f(x,y,z)=z$ 既是 x 的偶函数，也是 y 的偶函数，而积分域 Ω_1 既关于 yOz 坐标面前后对称，又关于 xOz 坐标面左右对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v.$$

解法2　用排除法．由于 $f(x,y,z)=x$ 是 x 的奇函数，Ω_1 关于 yOz 坐标面对称，则 $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v=0$．而在 Ω_2 内 $x>0$，有 $4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v>0$，则(A)不正确；同理(B)和(D)均不正确，所以应选(C)．

(4)**答**　应选(B)．

解　由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则当 $|x-1|<|-1-1|=2$ 时，原幂级数绝对收敛，而 $|2-1|=1<2$，则原幂级数在 $x=2$ 处绝对收敛．

(5)**答**　应选(D)．

解　由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充分必要条件是该组中至少存在一个向量，它可以用该组中其余 $s-1$ 个向量线性表出，而线性无关是线性相关的反面，由此立即知(D)正确．

四、解　$\frac{\partial u}{\partial x}=f'\left(\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right),$$

所以 $x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$．

五、解　对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$．

设原方程的特解为 $y^*=Axe^x$，代入原方程得 $A=-2$．故原方程通解是 $y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$．又已知该函数图形与曲线 $y=x^2-x+1$ 在点 $(0,1)$ 处有公共切线，得

$$y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=-1,$$

即 $C_1+C_2=1$，$C_1+2C_2=1$．解得 $C_1=1$，$C_2=0$．所以 $y=(1-2x)e^x$．

六、解　由图3知，

$\overrightarrow{MA}=(-x,1-y)$，$r=|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{x^2+(1-y)^2}$．

引力 $\boldsymbol{f}$ 的方向与 $\overrightarrow{MA}$ 一致，故

$$\boldsymbol{f}=\frac{k}{r^3}(-x,1-y).$$

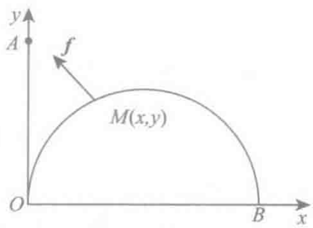

图3

从而，引力所作的功

$$W=\int_{\overset{\frown}{BO}}\frac{k}{r^3}[-x\mathrm{d}x+(1-y)\mathrm{d}y]=k\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

【注】因曲线积分与路径无关，故取沿直线段 BO 积分得出结果．

七、解　$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$. 由 $AP=PB$,得

$$A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}.$$

$$A^5=\underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})}_{5个}$$

$$=PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)BP^{-1}=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=A.$$

【注】由于 B 为对角阵,故

$$B^5=\begin{pmatrix}1^5&0&0\\0&0^5&0\\0&0&(-1)^5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=B.$$

八、解　(1) 因 A 与 B 相似,故 $\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B$, $|A|=|B|$,即

$$2+x=y+1,-2=-2y,$$

得 $x=0,y=1$. 此时

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

(2) 由于 B 为对角阵,其特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$,它们也就是 A 的特征值. 依次求出它们对应的特征向量

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

且其线性无关. 令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$,则 P 可逆,且有 $P^{-1}AP=B$.

九、证　存在性:在$[a,b]$上任取一点 t,令

$$F(t)=\int_a^t[f(t)-f(x)]\mathrm{d}x-3\int_t^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}x$$

$$=\left[f(t)(t-a)-\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\right]-3\left[\int_t^b f(x)\mathrm{d}x-f(t)(b-t)\right],$$

则 $F(t)$ 在$[a,b]$上连续. 由于 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上单调增加. 在(a,b)内取定点 c,则有

$$F(a)=-3\int_a^b[f(x)-f(a)]\mathrm{d}x$$

$$=-3\int_a^c[f(x)-f(a)]\mathrm{d}x-3\int_c^b[f(x)-f(a)]\mathrm{d}x$$

$$\leqslant-3\int_c^b[f(x)-f(a)]\mathrm{d}x$$

$$=-3[f(\xi_1)-f(a)](b-c)<0,c\leqslant\xi_1\leqslant b.$$

$$F(b)=\int_a^c[f(b)-f(x)]\mathrm{d}x+\int_c^b[f(b)-f(x)]\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_a^c [f(b)-f(x)]\mathrm{d}x = [f(b)-f(\xi_2)](c-a) > 0, a \leqslant \xi_2 \leqslant c.$$

由介值定理知，在(a,b)内存在ξ，使$F(\xi)=0$，即

$$S_1 = 3S_2.$$

唯一性：因$f'(x)>0$，故$F'(t)=f'(t)[(t-a)+3(b-t)]>0$，故$F(t)$在$(a,b)$内单调增加．因此$(a,b)$内只有一个$\xi$，使$S_1=3S_2$.

十、填空题

(1)**答** 应填$\frac{1}{3}$.

解 设在每次试验中A出现的概率为p，则

$$\frac{19}{27}=P\{A\text{至少出现 1 次}\}=1-P\{A\text{出现 0 次}\}=1-C_3^0p^0(1-p)^{3-0}=1-(1-p)^3,$$

解得$p=\frac{1}{3}$.

(2)**答** 应填$\frac{17}{25}$(或 0.68).

解 设这两个数为x和y，则(x,y)的取值范围为图 4 中正方形G，那么“两数之和$<\frac{5}{6}$”即“$x+y<\frac{6}{5}$”使(x,y)的取值范围为图 4 中阴影部分D. 本题为等概型几何概率题，所求概率为$p=\frac{D\text{的面积}}{G\text{的面积}}$. 而$G$的面积为 1，$D$的面积为$1-\frac{1}{2}\times 0.8^2=0.68$. 故$p=0.68\left(\text{或}\frac{17}{25}\right)$.

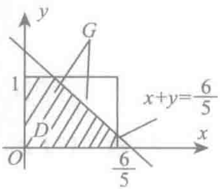

图 4

(3)**答** 应填 0.987 6.

解 由题意，$X\sim N(10,0.02^2)$，所以$\frac{X-10}{0.02}\sim N(0,1)$.

$$\begin{aligned}P\{9.95<X<10.05\}&=P\left\{\frac{9.95-10}{0.02}<\frac{X-10}{0.02}<\frac{10.05-10}{0.02}\right\}\\&=\Phi(2.5)-\Phi(-2.5)=2\Phi(2.5)-1\\&=2\times 0.993\,8-1=0.987\,6.\end{aligned}$$

十一、解 因Y的分布函数

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y<y\}\\&=P\{1-\sqrt[3]{X}<y\}=P\{\sqrt[3]{X}>1-y\}=P\{X>(1-y)^3\}\\&=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\pi(1+x^2)}=\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{(1-y)^3}^{+\infty}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(1-y)^3\right],\end{aligned}$$

故Y的概率密度函数为$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)=\frac{3}{\pi}\frac{(1-y)^2}{1+(1-y)^6}$.

（试卷Ⅱ）

一、【同试卷Ⅰ 第一题】

二、【同试卷Ⅰ 第二题】

三、【同试卷Ⅰ 第三题】

四、(1)【同试卷Ⅰ 第四题】

(2)**解** 由所给二次积分作出区域D的图形(如图 5)，再由D换成先对y后对x的二次积分.

$$\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx$$
$$=\int_1^2\frac{2y}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}y\right)dy$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi}{2}ydy=\frac{4}{\pi^3}(2+\pi).$$

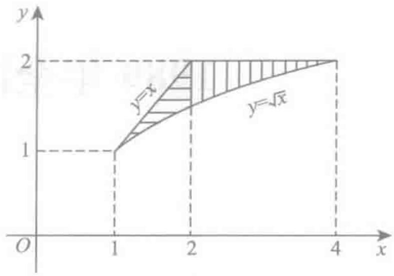

图 5

(3)**解** 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，则
$$F'_x=2x,F'_y=4y,F'_z=6z.$$
椭球面在点 $M(x_0,y_0,z_0)$处的切平面 π 的方程为
$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0,$$
即
$$x_0x+2y_0y+3z_0z=21.$$
因为平面 π 过直线 L，故 L 上任意两点，比如点 $A\left(6,3,\frac{1}{2}\right)$，$B\left(0,0,\frac{7}{2}\right)$应满足平面 π 的方程，代入有
$$6x_0+6y_0+\frac{3}{2}z_0=21, \qquad ①$$
$$z_0=2. \qquad ②$$
又因为
$$x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21, \qquad ③$$
解①，②，③有
$$x_0=3,y_0=0,z_0=2,$$
及
$$x_0=1,y_0=2,z_0=2.$$
故所求切平面方程为
$$x+2z=7 \text{ 和 } x+4y+6z=21.$$

五、【同试卷Ⅰ　第五题】
六、【同试卷Ⅰ　第六题】
七、【同试卷Ⅰ　第七题】
八、【同试卷Ⅰ　第八题】
九、【同试卷Ⅰ　第九题】

1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题答案

（试卷Ⅰ）

一、填空题

(1)**答** 应填-1.

解 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 2=-1.$

(2)**答** 应填 $x-1$.

解法 1 令$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=a$，则 $f(x)=x+2a$. 将 $f(x)=x+2a$ 代入$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=a$，得$\int_0^1 (t+2a)\mathrm{d}t=a$，即$\dfrac{1}{2}+2a=a$，由此可得 $a=-\dfrac{1}{2}$，则 $f(x)=x-1$.

解法 2 等式 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ 两端从 0 到 1 对 x 积分得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t,$$

即$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，由此可知

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}.$$

从而可知 $f(x)=x-1$.

(3)**答** 应填 π.

解法 1 下半圆 $y=-\sqrt{1-x^2}$的参数方程为$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}$ $\pi\leqslant t\leqslant 2\pi$. 则

$$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_\pi^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\mathrm{d}t=\pi.$$

解法 2 由于下半圆上的点(x,y)满足 $x^2+y^2=1$，则

$$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_L 1\mathrm{d}s=\pi.$$

(4)**答** 应填 2.

解 由散度计算公式

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},\quad \text{其中 } \boldsymbol{u}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}.$$

得

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\big|_P=\left(y^2+\mathrm{e}^z+\frac{2xz}{1+z^2}\right)\Bigg|_{(1,1,0)}=1+1=2.$$

(5)**答** 应填$\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

解

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 的逆矩阵可有几种方法．用初等行变换法：

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&0&-1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right),$$

即得

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

亦可以用分块求逆法：

因为

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},1^{-1}=1.$$

由对分块矩阵求逆阵的方法即得

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\1&2&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

二、选择题

(1)**答**　应选(A).

解　由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$，而 $\lim\limits_{x\to0^+}x\sin\dfrac{1}{x}=0\neq\infty$，则曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 有且仅有水平渐近线．

(2)**答**　应选(C).

解　设 P 点的坐标为 (x_0,y_0,z_0)，则曲面在 P 点的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(-2x_0,-2y_0,-1),$$

又因为切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则

$$\frac{-2x_0}{2}=\frac{-2y_0}{2}=\frac{-1}{1}.$$

从而可得 $x_0=1,y_0=1$. 代入曲面方程解得 $z_0=2$.

(3)**答**　应选(D).

解　由于(D)中的 $y=C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3=C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3$，其中 y_1-y_3 和 y_2-y_3 是对应的齐次方程的两个解，且 y_1-y_3 与 y_2-y_3 线性无关．事实上，若令

$$A(y_1-y_3)+B(y_2-y_3)=0,$$

即

$$Ay_1+By_2-(A+B)y_3=0.$$

由于 y_1,y_2,y_3 线性无关，则 $A=0,B=0,-(A+B)=0$.

因此 y_1-y_3 与 y_2-y_3 线性无关．又 y_3 是原方程的一个特解，故

$$y=C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$$

是原方程通解．

(4)**答**　应选(B).

解　由 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 和 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$ 可知，$S(x)$ 是由 $f(x)$ 作奇延拓后展开的，则

$$S\left(-\frac{1}{2}\right)=-S\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}.$$

所以应选(B).

(5)**答** 应选(C).

解 对于方阵 $\boldsymbol{A}$,由于 $|\boldsymbol{A}|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量组线性相关,由向量组线性相关的充要条件即知(C)正确.

三、(1)解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2f'+g'_u+yg'_v,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''+xg''_{uw}+xyg''_{vw}+g'_v.$$

(2)**解** 由 $P(x,y)=xy^2,Q(x,y)=y\varphi(x),\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,得

$$2xy=y\varphi'(x),\quad \varphi(x)=x^2+C.$$

再由 $\varphi(0)=0$,得 $C=0$,故 $\varphi(x)=x^2$.所以

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y.$$

沿直线 $y=x$ 从点(0,0)到点(1,1)积分,得

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

(3)**解** 由 Ω 关于 yOz 坐标面对称,直接可知 $\displaystyle\iiint_\Omega x\mathrm{d}v=0$.

利用球面坐标,

$$\iiint_\Omega z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}.$$

所以

$$\iiint_\Omega(x+z)\mathrm{d}v=\frac{\pi}{8}.$$

四、解 由 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(-1<x<1)$,得

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

而 $f(0)=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$,所以

$$\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}(-1\leqslant x<1).$$

五、解

$$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,$$

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$$f''(x)=-\sin x-f(x),$$

即

$$f''(x)+f(x)=-\sin x.$$

这是二阶常系数非齐次线性微分方程,初值条件

$$f(0)=0,\ f'(0)=1.$$

对应齐次方程的通解为

$$Y=C_1\sin x+C_2\cos x.$$

非齐次方程的特解可设为

$$y^*=x(a\sin x+b\cos x).$$

用待定系数法求得 $a=0,b=\frac{1}{2}$. 于是

$$y^*=\frac{x}{2}\cos x.$$

非齐次方程的通解为

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{x}{2}\cos x.$$

由初值条件定出 $C_1=\frac{1}{2}$, $C_2=0$, 从而

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x.$$

六、证 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=2\sqrt{2}$.

记 $F(x)=\frac{x}{e}-\ln x-2\sqrt{2}$, 则 $F(e)=-2\sqrt{2}<0$,

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty.$$

故由零点定理知, $F(x)$在$(0,e)$, $(e,+\infty)$内分别至少有一零点.

又当 $0<x<e$ 时, $F'(x)<0$, $F(x)$单调减少, 当 $e<x<+\infty$时, $F'(x)>0$, $F(x)$单调增加. 所以 $F(x)$在$(0,e)$, $(e,+\infty)$内分别只有一个零点, 所以原方程在$(0,+\infty)$内有且仅有两个实根.

七、解 对方程组的增广矩阵作初等行变换得

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&\lambda\\4&1&2&\lambda+2\\6&1&4&2\lambda+3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&-3\lambda+2\\0&1&-2&-4\lambda+3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&-3\lambda+2\\0&0&0&-\lambda+1\end{array}\right),$$

当 $-\lambda+1=0$, 即 $\lambda=1$ 时, 方程组有解.

这时方程组为 $\begin{cases}x_1+x_3=1,\\4x_1+x_2+2x_3=3,\\6x_1+x_2+4x_3=5,\end{cases}$ 而 $\begin{cases}x_1+x_3=1,\\x_2-2x_3=-1\end{cases}$ 为其同解方程组.

解之得 $\begin{cases}x_1=1-C,\\x_2=-1+2C,\\x_3=C,\end{cases}$ 其中 C 为任意常数.

八、证 (1)由条件知有非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 满足 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$, 两端左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 得 $\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\xi}$.
因 $\boldsymbol{\xi}$ 为非零向量, 故 $\lambda\neq 0$, 于是有 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\xi}$, 所以$\frac{1}{\lambda}$为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

(2)由于 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$, 故前一式又可写为$\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\xi}$,

从而有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\xi}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{\xi}$, 所以$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$为 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

九、解 设球面 Σ 的方程为 $x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$. 两球面的交线在 xOy 面上的投影为

$$\begin{cases}x^2+y^2=\frac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2),\\z=0.\end{cases}$$

记投影曲线所围平面区域为 D_{xy}. 球面 Σ 在定球面内的部分的方程为

$$z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

这部分球面的面积

$$S(R)=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{2a}\sqrt{4a^2-R^2}}\frac{rR\mathrm{d}r}{\sqrt{R^2-r^2}}=2\pi R^2-\frac{\pi R^3}{a}.$$
$$S'(R)=4\pi R-\frac{3\pi R^2}{a},S''(R)=4\pi-\frac{6\pi R}{a}.$$

令 $S'(R)=0$，得驻点 $R_1=0$（舍去），$R_2=\frac{4}{3}a$. $S''\left(\frac{4}{3}a\right)=-4\pi<0$，故当 $R=\frac{4}{3}a$ 时，球面 Σ 在定球面的部分的面积最大.

十、填空题

(1)**答** 应填 0.7.

解 由 $0.8=P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，得 $P(AB)=0.8P(A)=0.8\times0.5=0.4$. 故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7$.

(2)**答** 应填 0.75.

解 记 $A=\{$甲命中目标$\}$，$B=\{$乙命中目标$\}$，$C=\{$目标被命中$\}$. 则由题意知：

$$P(A)=0.6,P(B)=0.5,A\text{ 与 }B\text{ 独立，且 }C=A\cup B,AC=A.$$

故
$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.6+0.5-0.6\times0.5=0.8,$$

所求概率为 $P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(C)}=\frac{0.6}{0.8}=0.75$.

(3)**答** 应填$\frac{4}{5}$.

解 ξ 的概率密度函数为：

$$f(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 1\leqslant\xi\leqslant6,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

而方程 $x^2+\xi x+1=0$ 的判别式 $\Delta=\xi^2-4$，
故该方程有实根的概率为

$$P\{\Delta\geqslant0\}=P\{\xi^2\geqslant4\}=P\{|\xi|\geqslant2\}=\int_{|\xi|\geqslant2}f(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_2^6\frac{1}{5}\mathrm{d}\xi=\frac{4}{5}.$$

十一、解 由于 Z 为独立正态随机变量 X 与 Y 的线性组合，Z 仍然服从正态分布，故只需确定 Z 的均值 EZ 和方差 DZ，

$$EZ=2EX-EY+3=5,$$
$$DZ=2^2DX+(-1)^2\cdot DY=4\cdot(\sqrt{2})^2+1=9.$$

所以 Z 服从正态分布 $N(5,9)$，从而得 Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{18}},-\infty<z<+\infty.$$

（试卷Ⅱ）

一、【同试卷Ⅰ 第一题】

二、【同试卷Ⅰ 第二题】

三、【同试卷Ⅰ 第三题】

四、(1)【同试卷Ⅰ 第四、(1)题】

(2)**解** 边界曲线如图 6 所示. 曲线在 xOy，yOz，zOx 坐标平面内弧段分别为 L_1，L_2，L_3，则曲线的质