高等专科学校教材

高等数学

侯风波 主编

机械工业出版社

高等专科学校教材

高 等 数 学

主　编　侯风波
副主编　刘式杰　孟庆才
参　编　张学奇　刘锡平　王　俊
主　审　叶其孝　刘保相

机械工业出版社

本书是参照国家教委高等工业专科学校《高等数学教学基本要求》及1995年国家教委高等工业专科学校数学课程指导委员会有关会议精神编写的。

本书包含一元微积分、多元微积分、向量代数与空间解析几何、级数、常微分方程、数值计算初步及数学软件包。每章后面均配有适量的习题。书后附有习题答案。

本书注重贯彻“掌握概念、强化应用”的教学原则。本书具有两个显著特点：一是结合数学建模培养学生运用数学解决实际问题的能力；二是结合数学软件包及数值计算培养学生用计算机求解数学模型的能力。

本书可作为高等专科学校及成人专科教育的数学教材，也可作为广大工程技术人员的数学知识更新教材。

高 等 数 学
主 编 侯风波
*
责任编辑：王世刚 何祚芝 王霄飞 版式设计：霍永明
封面设计：郭景云 责任校对：陈立耘 责任印制：路 琳
*
机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
邮政编码：100037
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
机械工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 · 新华书店经售
*
开本 $850\times1168^{1}/_{32}$ · 印张16.5 · 字数 437 千字
1997年5月第1版第1次印刷
印数 0 001—5 000 · 定价：17.00元
*
ISBN 7-111-05339-7/O·132(课)

ISBN 7-111-05339-7
9 787111 053392 >

前　言

本书是参照国家教委高等工业专科学校《高等数学教学基本要求》及1995年国家教委高等工业专科学校数学课指导委员会有关会议精神编写的。

本书内容包含一元微积分、多元微积分、向量代数与空间解析几何、级数、常微分方程、数值计算初步及数学软件包(Mathematica)。各章后面均配有适量的习题。书后附有习题解答。

全书注重贯彻“掌握概念、强化应用”的教学原则。本书具有两个显著特点：一是结合数学建模培养学生运用数学解决实际问题的能力；二是结合数学软件包及数值计算培养学生用计算机求解数学模型的能力。

本书可作为高等专科学校及成人专科教育的数学教材，也可作为广大工程技术人员的数学参考书。

本书结合专科特点，对高等数学课程内容与课程体系进行了优化，主要体现在：①极限概念采用描述性定义；②微分中值定理采用几何说明法，并按先柯西中值定理后拉格朗日中值定理的次序结合应用讲解；③加强了向量及其应用，适当增加了向量微积分的内容；④空间曲面及其方程作为多元函数的几何意义出现，其内容取舍以满足多元函数微积分学的需要为度；⑤适度淡化了数项级数及其敛散性，强化了幂级数及其应用；⑥将分散于微积分学各部分的数值计算问题集中在一起，并适当扩充后，用数值分析的观点结合计算机处理；⑦引入了用计算机做数学的系统——数学软件包；⑧引入了数学建模的有关知识，增加了数学建模的例题。

上述内容已在承德石油高等专科学校国家教委教改试点专业(内燃机专业、机制专业、计算机专业)通过自编教材进行了教改

试验，并收到了令人满意的效果。特别是，数学软件包的引入与使用极大地调动了学生学习数学的积极性，提高了学生解决实际问题的能力。本书是在教改试验的基础上进一步完善的。

本书的参考学时为110～130学时。

本书由侯风波任主编，刘式杰、孟庆才任副主编。其中第一、五、十章由孟庆才编写，第二、九章由张学奇编写，第三、七、十二章及附录D由侯风波编写，第四、六章由刘式杰编写，第八章及附录A、B、C由刘锡平编写，第十一、十三章由王俊编写本书插图由王冰绘制。本书由叶其孝和刘保相主审。

参加本书审稿的还有国家教委高等专科学校数学课委会吴诗咏教授、王建武、王秋庭、杜中复副教授，在此一并表示感谢。

特别感谢承德石油高等专科学校教务处的有关同志，他们对本书的出版给予了大力支持与帮助。

限于编者水平，书中纰漏在所难免，敬祈同行专家斧正。

编者

1996年5月

目　录

第一章　函数、极限与连续

在自然界和工程技术中出现的各种量，都处在不停的变化之中，并且它们之间又有联系，变量和函数就是描述这种量的数量变化与相互联系的。它是高等数学第一个重要的基本概念。高等数学以微积分为主体，研究对象是函数，研究手段是取极限，连续性则是用极限方法研究的函数第一种最普遍的性态。本章内容是今后进一步学习的基础。

第一节　函　　数

函数概念中学已经学过很多，由于这部分内容的重要性，在此再做一些必要的复习。

一、函数的定义

设有两个变量 x 和 y, D 是一个给定的数集，若对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定规则 f 有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数。记成 $y=f(x)$, D 称为函数的定义域。

函数概念中包含两个要素，一是定义域 D，一是对应规律，用"f"，"φ"，"F"等符号表示。所以仅当两个函数定义域和对应规律都一致时，才能说这两个函数是相同的。例如 $\ln x^2$ 与 $2\ln x$ 就不是相同的函数，而 $W=\sqrt{u}$ 和 $y=\sqrt{x}$ 却是相同的函数。

熟练掌握函数符号，是非常重要的。若一般给出函数 $y=f(x)$, 这里仅表示 x 与 y 存在一个函数关系，此外并无更多含义。若具体写出 $f(x)$, 譬如 $f(x)=2x^2-3x+1$, 这时 $f(x)$ 就代表一个特定函数，f 表示确定的对应规律，即

$$f(\ )=2(\ )^2-3(\ )+1$$

$f(x_0)$ 是函数值记号，它表示

$$f(x_0)=f(x)|_{x=x_0}$$

我们已经知道，函数表示法有三种，即：列表法、图象法和解析法。本课程以解析法为主（便于理论讨论），辅以图象法（直观、形象）。

例 1 写出如图 1-1 所示电压 $u(t)$ 与时间 t 的函数关系。

解

$$u(t)=\begin{cases}\dfrac{2E}{\tau}t & t\in\left[0,\dfrac{\tau}{2}\right]\\ -\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau) & t\in\left[\dfrac{\tau}{2},\tau\right]\\ 0 & t\in[\tau,T]\end{cases}$$

该函数 $u(t)$ 定义域为 $D=[0,T]$，但它在定义域内不同区间上是用不同解析式来表示的，这样的函数称为**分段函数**。

分段函数需分段求值，分段作图。

需要强调的是：这是定义在 $[0,T]$ 上的一个函数，而不是几个函数。

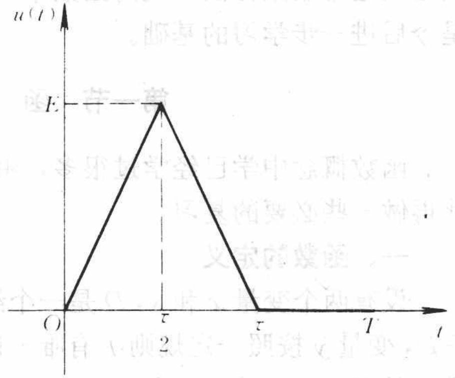


图 1-1

二、函数的几种特性

下面是表现函数一般特性的几个方面。

设函数 $f(x)$ 在区间 l 内有定义

(1) 有界性：若存在正数 M 使得 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 l 上有界。

如：$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，而 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界。

(2) 单调性：对于 l 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 l 上单调增加；若 $f(x_1)>f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在 l 上单调减小。

对于给定函数 $f(x)$，重要的是求出其单调区间。

(3) 奇偶性：对于任意 $x\in l$（l 为关于原点对称的区间），都有

$$f(-x)=f(x),\text{则称 } f(x) \text{ 为偶函数}$$
$$f(-x)=-f(x),\text{则称 } f(x) \text{ 为奇函数}$$

(4) 周期性：若 $f(x\pm T)=f(x)$则称 $f(x)$为周期函数，周期函数的周期通常指它的最小正周期。

[**练习**]　上述特性，表现在 $f(x)$ 图象上有什么特点？

三、初等函数

(1) 基本初等函数　下述六类函数称为基本初等函数：

常数函数　　$y=c$

幂函数　　$y=x^{\alpha}$（α 为实数）

指数函数　　$y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq 1$）

对数函数　　$y=\log_{a}x$（$a>0$，$a\neq 1$）

三角函数　　$y=\sin x, y=\cos x, y=\operatorname{tg}x, y=\operatorname{ctg}x,$

$y=\sec x, y=\csc x$

反三角函数　　$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\operatorname{arctg}x,$

$y=\operatorname{arcctg}x$

这些函数的性质与图形在中学都已学过，今后会经常用到它们。

(2) 复合函数　将基本初等函数进行四则运算可以得出新的函数。除此之外，我们还可以将基本初等函数进行“复合”，而构造成新的函数，例如：$y=\sin x^2$ 就是由 $y=\sin u$ 与 $u=x^2$ 复合而成的。

一般说来，设 $y=f(u)$，其中 $u=\varphi(x)$，且$\varphi(x)$的值全部或部分落在 $f(u)$ 的定义域内则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数，而称 u 为中间变量。

由上述定义知，复合函数 $f[\varphi(x)]$的定义域或者与$\varphi(x)$ 定义域相同，或者只是它的一部分。

例 2　函数 $y=\sqrt{3-x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=3-x^2$ 复合而成

的。它的定义域为 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$。

例 3 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 是不能复合成一个函数的。因为对于 $u=2+x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 内的任何 x 值所对应的 u 都大于或等于2，都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义。

将一个复合函数熟练地分解为简单函数（基本初等函数或它们的四则运算）对以后学习非常重要，分解的方法是将复合函数由外到里"层层剥皮"，如下例所示。

例 4 分析下列复合函数的结构

(1) $y=\sin^2(\omega x+\varphi)$，(2) $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}}$

解 (1)$y=u^2;u=\sin v;v=\omega x+\varphi$

(2)$y=e^u;u=\operatorname{arctg}v;v=\sqrt{t};t=x^2+1$

(3)初等函数　由基本初等函数经过有限次四则运算及复合步骤所构成并能用一个解析式表示的函数称为初等函数。

今后我们讨论的函数，绝大多数都是初等函数。

第二节　数学模型方法简述

函数关系可以说是一种变量相依关系的数学模型。数学模型方法是处理数学科学理论问题的一种经典方法，也是处理各类实际问题的一般方法。掌握数学模型方法是非常必要的。在此，对数学模型方法作一简述。

数学模型方法(Mathematical Modeling)，简称MM 方法。它是针对所考察的问题构造出相应的数学模型，通过对数学模型的研究，使问题得以解决的一种数学方法。

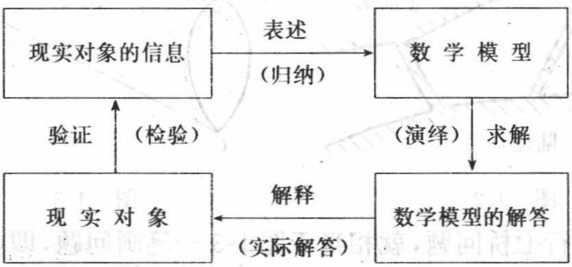
一、数学模型的含义

数学模型是指对于现实世界的某一特定对象，为了一个特定的目的，根据特有的内在规律，做出必要的简化和假设，运用适当的数学工具，采用形式化语言，概括或近似地表述出来的一种数学结构。它或者能解释特定对象的现实性态，或者能预测对象的未来状态，或者能提供处理对象的最优决策或控制。数学模型

既源于现实又高于现实，不是实际的原型，而是一种模拟，在数值上可以作为公式应用，可以推广到与原物相近的一类问题，可以作为某事物的数学语言，可译成算法语言，编写程序进入计算机。

二、数学模型的建立过程

建立一个实际问题的数学模型，需要一定的洞察力和想象力，筛选、扬弃次要因素，突出主要因素，作出适当的抽象和简化，全过程一般分为表述、求解、解释、验证几个阶段，并且通过这些阶段完成从现实对象到数学模型，再从数学模型到现实对象的循环。可用流程图表示如下。



表述 是指根据建立数学模型的目的和掌握的信息，将实际问题翻译成数学问题，用数学语言确切地表述出来。

这个过程是关键的一个过程，需要对实际问题进行分析，甚至要做调查研究，查找资料，对问题进行简化、假设、数学抽象，运用有关的数学概念、数学符号和数学表达式去表现客观对象及其关系。如果现有的数学工具不够用时，可根据实际情况，大胆创造新的数学概念和方法去表现模型。

求解 是指选择适当的方法，求得数学模型的解答。

解释 是指数学解答翻译回现实对象，给实际问题的解答。

验证 是指检验解答的正确性。

例如 哥尼斯堡有一条普雷格尔河，这条河有两个支流，在

城中心汇合成大河，河中间有一小岛，河上有七座桥，如图 1-2 所示。18 世纪哥尼斯堡居民，很多人总想一次不重复地走过这七座桥，再回到出发点。可是试来试去总是办不到，于是有人写信给当时著名的数学家欧拉，欧拉于 1736 年，建立了一个数学模型解决了这个问题。他把 A、B、C、D 这四块陆地抽象为数学中的点，把七座桥抽象为七条线，如图 1-3 所示。

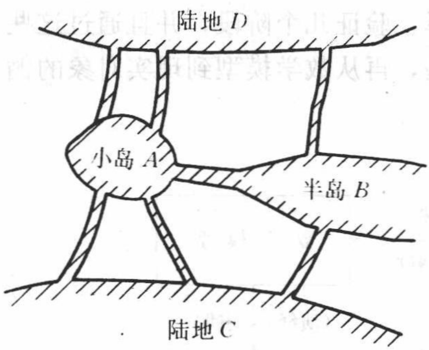


图 1-2

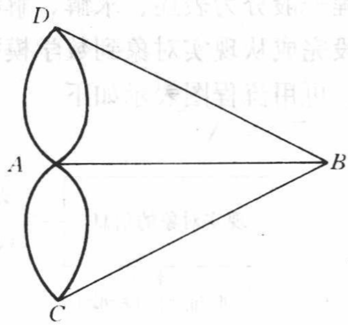


图 1-3

人们步行七桥问题，就相当于图 1-3 一笔画问题，即能否将图 1-3 所示的图形不重复地一笔画出来，这样抽象并不改变问题的实质。

哥尼斯堡七桥问题是一个具体的实际问题属于数学模型的现实原型。经过理想化抽象所得到的如图 1-3 所示的一笔画问题便是七桥问题的数学模型。在一笔画的模型里，只保留了桥与地点的连接方式，而其它一切属性则全部扬弃了。所以从总体上来说，数学模型只是近似地表现了现实原型中的某些属性，而就所要解决的实际问题而言，它是更深刻、更正确、更全面地反映了现实，也正由此，对一笔画问题经过一定的分析和逻辑推理，得到该问题无解的结论之后，才可以返回到七桥问题，得出七桥问题的解答，不重复走过七座桥回到出发点是不可能的。

数学模型，从广义上讲，一切数学概念、数学理论体系、各种数学公式、各种方程式、各种函数关系，以及由公式系列构成

的算法系统等等都可以叫做**数学模型**。从狭义上讲，只有那些反映特定问题或特定的具体事物系统的数学关系结构，才叫做**数学模型**。在现代应用数学中，数学模型都作狭义解释，而建立数学模型的目的，主要是为了解决具体的实际问题。

三、函数模型的建立

欣赏数学模型，建立数学模型，进而借鉴数学模型，对提高解决实际问题的能力，以及提高素养都是十分重要的。建立函数模型的步骤可分为：

（1）分析问题中哪些是变量，哪些是常量，分别用字母表示；

（2）根据所给条件，运用数学或物理知识，确定等量关系；

（3）具体写出解析式 $y=f(x)$，并指明定义域。

例 5 重力为 P 的物体置于地平面上，设有一与水平方向成 α 角的拉力 F，使物体由静止开始移动，求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之间的函数模型（图 1-4）。

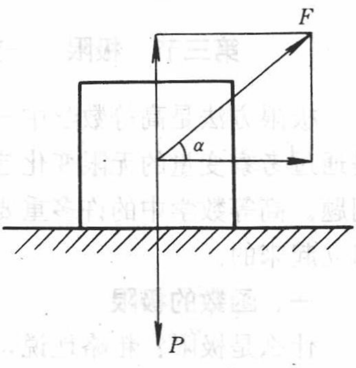


图 1-4

解 由物理知，当水平拉力与摩擦力平衡时，物体开始移动，而摩擦力是与正压力 $P-F\sin\alpha$ 成正比的（设摩擦系数为 μ）故有：

$$F\cos\alpha=\mu(P-F\sin\alpha)$$

即 $$F=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha} \qquad (0°<\alpha<90°)$$

建立函数模型是一个比较灵活的问题，无定法可循，只有多做些练习才能逐步掌握。

例 6 在金融业业务中有一种利息叫做单利。设 p 是本金，r 是计息期的利率，c 是计息期满应付的利息，n 是计息期数，I 是 n 个计息期（即借期或存期）应付的单利，A 是本利和。求本利和

A 与计息期数 n 的函数模型。

解 计息期的利率 $=\dfrac{\text{计息期满的利息}}{\text{本金}}$，即 $r=\dfrac{c}{p}$，由此得

$$c = pr$$

单利与计息数成正比，即 n 个计息期应付的单利 I 为

$$I = cn$$

因为 $\qquad c=pr$

所以 $\qquad I=prn$

本利和为 $\qquad A=p+I$

即 $\qquad A=p+prn$

可得本利和与计息期数的函数关系，即单利模型 $A = p(1 + rn)$。

第三节 极限——变量无限变化的数学模型

极限方法是高等数学中一种基本分析方法。所谓极限方法，就是通过考察变量的无限变化趋向，来解决初等数学所不能解决的问题。高等数学中的许多重要概念和运算都是以极限方法为基石建立起来的。

一、函数的极限

什么是极限？粗略地说，极限就是一个数，是在某个变化过程中，函数能无限接近的一个数。例如

当 x 无限增大时（$x\to\infty$），函数 $\dfrac{x}{1+x}$ 无限接近于 1，常数 1 就是 $\dfrac{x}{1+x}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限。同样，当 $x\to\dfrac{1}{2}$ 时（这里不要求 $x=\dfrac{1}{2}$），函数 $\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 无限接近于 2，所以 2 就是函数 $\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 当 $x\to\dfrac{1}{2}$ 时的极限。

函数 $f(x)$ 的变化，总是发生在自变量 x 的某个特定变化过程中。一般说 x 变化过程有两种状态：一种是 x 趋近于定值 x_0，记为 $x\to x_0$；另一种是 x 绝对值无限增大，记为 $x\to\infty$。