“十二五”普通高等教育规划教材

数值计算方法复习与实验指导

（第2版）

令锋 傅守忠 陈树敏 曲良辉 编

Review and Experiment Guidance of Numerical Computation Methods

国防工业出版社
National Defense Industry Press

"十二五"普通高等教育规划教材

数值计算方法复习与实验指导

（第2版）

令锋　傅守忠　陈树敏　曲良辉　编

国防工業出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是国防工业出版社出版的教材《数值计算方法(第2版)》的配套用书，内容分为数值计算方法概论、非线性方程的数值解法、线性方程组的直接法、线性方程组的迭代法、插值法与最小二乘拟合法、数值积分与数值微分、常微分方程的数值解法、矩阵特征值与特征向量的计算等8章．每章由内容提要、例题分析、习题选解、综合练习和实验指导5个部分组成，在附录中给出了综合练习题目的解答，并给出了5套模拟试卷及参考答案．

本书可作为普通本科院校理工科专业学生学习数值分析或计算方法课程的参考教材，也可供从事科学与工程计算的科技人员学习，对备考研究生的读者也颇有参考价值．

图书在版编目(CIP)数据

数值计算方法复习与实验指导/令锋等编.—2版.—北京：国防工业出版社，2015.3
"十二五"普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-118-09935-5

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①令…　Ⅲ.①数值计算－计算方法－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.①O241

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第047234号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100048)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　**印张** 12¾　**字数** 315千字
2015年3月第2版第1次印刷　**印数** 1—3000册　**定价** 28.00元

国防书店：(010)88540777　　发行邮购：(010)88540776
发行传真：(010)88540755　　发行业务：(010)88540717

第2版前言

本书是国防工业出版社出版的《数值计算方法(第2版)》的配套用书.此次修订保持了原来的结构和基本内容,主要修订部分如下:

(1) 纠正了发现的编写错漏、印刷错误和表述不够严谨之处.

(2) 对各章的例题、习题、综合练习题和部分实验题目作了适当删改,力求与教材内容完全对应.

(3) 鉴于文件操作方法在编写实用程序中的重要作用,在给出的一些实验题目的源程序中强调了文件操作方法的使用.

在本书出版的3年时间里,编者陆续收到了来自不同高校的一些读者提出的宝贵意见和建议,值此修订再版之际,我们谨向帮助和支持我们提高此配套教材质量的师生表示深深的谢意.

尽管在修订中作了很大努力,但限于编者的水平,书中可能仍有谬误之处,敬请使用本书的师生和广大读者朋友批评指正.

编 者

2014年12月

第 1 版前言

数值计算方法是一门与计算机使用密切结合的课程，它既有纯数学的高度抽象性与严密科学性的特点，又有实际实验的高度技术性和应用广泛性的特点，内容丰富，理论完整，实用性强．该课程处理问题的方法有别于其它数学课程，学生不易从连续型数学框架步入数值方法．为了帮助读者复习数值分析或计算方法课程的内容，加深对基本理论和基本思想的理解，更好地掌握数值算法的编程实现技能，提高分析问题和解决问题的能力，我们结合多年的教学实践编写了这本与国防工业出版社已出版的《数值计算方法》教材配套的复习参考书．

本书每章由五个部分组成：第一部分为内容提要，归纳总结相应章节的基本内容；第二部分为例题分析，对一些具有示范性的典型例题做了详细的解答，力图帮助读者掌握解题的技巧，触类旁通，提高分析问题和解决问题的能力．同时，选解了部分具有一定难度的题目，为备考研究生的读者提供帮助；第三部分为习题选解，给出了书中全部习题的答案，对部分能引导学生举一反三的习题给出了详细解答；第四部分为综合练习，配备了一定数量的练习题，帮助读者正确理解各种基本概念，并在书末附录中给出了综合练习题目的解答；第五部分为实验指导，给出了书中阐述的典型算法的 C 语言程序和 Matlab 程序，帮助读者进一步理解算法的思想，提高编程实现算法的技能．为帮助读者系统复习和掌握数值计算方法的基本内容，本书附录中给出了五套模拟试卷及参考解答，便于读者自测．

本书编写过程中参阅了国内外的相关教材和资料，在此谨向作者致以诚挚的感谢．本书的出版得到了肇庆学院优秀课程教学团队建设基金资助，编者在此表示衷心感谢．

限于编者的学识水平，书中难免有疏漏与欠妥之处，恳请使用本书的师生和其他读者批评指正．

编 者

2012 年 2 月

目 录

第 1 章　数值计算方法概论

1.1　内 容 提 要

1. 数值计算方法

数值计算方法是研究使用计算机求解各种数学问题的方法、理论及其软件实现的一个数学分支.其基本内容是构造求解科学与工程领域的各种数学问题的数值算法,研究算法的数学机理,对求得或将要求得的解的精度进行分析和估计,通过编程和上机实现算法求得结果,分析数值结果的误差,并与相应的理论结果和可能的实验数据对比验证.

2. 误差

数值计算通常是近似计算,实际结果与理论结果之间存在误差. 误差按照来源可分为模型误差、观测误差、截断误差和舍入误差.

1）截断误差与舍入误差

数学模型的精确解与数值方法的近似解之间的差异称为**截断误差**,由于截断误差是方法固有的,所以也称为**方法误差**.

由于计算机的字长有限,原始数据以及计算过程中的数据在计算机上都只能按照一定的舍入规则保留有限位,由此产生的误差称为**舍入误差**.

数值计算方法中总是假定数学模型是准确的,因而不考虑模型误差和观测误差,主要研究截断误差和舍入误差对计算结果的影响.

2）绝对误差与绝对误差限

定义 1－1　设 x 为准确值,x^* 为 x 的一个近似值,称

$$E_a(x) = x^* - x$$

为近似值 x^* 的**绝对误差**,简称为误差.

若存在一个正数 ε_a,使得

$$|E_a(x)| = |x^* - x| \leqslant \varepsilon_a$$

则称正数 ε_a 为近似值 x^* 的**绝对误差限.**

3）相对误差与相对误差限

定义 1－2　设 x 为准确值,x^* 为 x 的一个近似值,称

$$E_r(x) = \frac{E_a(x)}{x} = \frac{x^* - x}{x} \qquad (x \neq 0)$$

为近似值 x^* 的**相对误差**,相对误差也常表示为

$$E_r(x) \approx \frac{E_a(x)}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$$

若存在正数 ε_r,使得

$$|E_r(x)| = \left|\frac{E_a(x)}{x}\right| \approx \left|\frac{x^* - x}{x^*}\right| \leqslant \varepsilon_r$$

成立,则称正数 ε_r 为近似值 x^* 的**相对误差限.**

3. 有效数字

定义 1 -3 设 x 为准确值,x^* 为 x 的一个近似值,如果 x^* 的误差的绝对值不超过它的某一数位的半个单位,并且从 x^* 左起第一个非零数字到该数位共有 n 位,则称这 n 个数字为 **x^* 的有效数字**,也称用 x^* 近似 x 时具有 n 位**有效数字**.

有效数字还有另一种定义方法:

定义 1 -4 设准确值 x 的一个近似值 x^* 可以写为

$$x^* = \pm 0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^m$$

其中 m 为整数;$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 0 ~ 9 中的某一数字,且 $a_1 \neq 0$. 如果 x^* 的绝对误差满足

$$|x^* - x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-k} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

则称近似值 x^* 有 k 位**有效数字**,分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_k$.

4. 算法的数值稳定性

定义 1 -5 由基本运算和运算顺序的规则所构成的完整的解题步骤称为**算法.**

定义 1 -6 如果一个算法在执行过程中舍入误差在一定条件下能够得到有效控制,即初始误差和计算过程中的舍入误差不影响产生可靠的结果,则称这个算法是**数值稳定的**;否则,若出现与数值稳定相反的情况,就称此算法是**数值不稳定的**.

5. 数值算法设计的基本原则

(1) 通过简化计算步骤减少运算次数.

(2) 避免两个相近的数相减.

(3) 避免除数绝对值远远小于被除数绝对值的除法.

(4) 防止大数“吃掉”小数.

(5) 尽量采用数值稳定性好的算法.

1.2 例题分析

例 1 -1 已知 e = 2.71828… ,$x^* = 0.027$ 为准确值 $x = \mathrm{e}/100$ 的近似值,问 x^* 有哪几位有效数字,绝对误差和相对误差各是多少?

解 按照四舍五入原则,x^* 有 2 位有效数字 2 和 7.

$$E_a(x) = x^* - x = 0.027 - \mathrm{e}/100 \approx -0.0001828$$

$$E_r(x) \approx \frac{E_a(x)}{x^*} = \frac{-0.0001828}{0.027} \approx -0.006770 = -0.677\%$$

例 1 -2 计算 $f(x) = \dfrac{1 + x - \mathrm{e}^x}{x^2}$ 当 $x = 0.001$ 时的值,使其具有 7 位有效数字.

解 对 $x > 0$,由 Taylor 展开式,得

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1+x-e^x}{x^2} \\
&= \frac{1}{x^2}\left[1+x-\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right)\right] \\
&= -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}x+\cdots+\frac{1}{n!}x^{n-2}+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n-1}\right) \qquad (\xi \in (0,x))
\end{aligned}
$$

记$\tilde{f}(x) = -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}x+\cdots+\frac{1}{n!}x^{n-2}\right)$为$f(x)$的近似值,则有

$$
|\tilde{f}(x) - f(x)| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n-1} \leqslant \frac{e^{x}}{(n+1)!}x^{n-1}
$$

根据题意,有

$$
\frac{e^{0.001}}{(n+1)!}0.001^{n-1} \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-7}
$$

解之得最小正整数 $n=3$. 所以,当 $x=0.001$ 时,$f(x)$具有 7 位有效数字的近似值为

$$
\tilde{f}(0.001) = -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times 0.001\right) \approx -0.5001667
$$

例 1-3 为减少运算次数,对 $y=5+\frac{3}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{5}{(x-1)^3}+\frac{6}{(x-1)^5}$应该怎样做恒等变形?

解 令 $u=\frac{1}{x-1}$,则可将 y 变形为

$$
y = (((6u^2-5)u+4)u+3)u+5
$$

例 1-4 设 $y_0=28$,按递推公式

$$
y_n = y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783} \qquad (n=1,2,\cdots)
$$

若取 $\sqrt{783}\approx 27.982$(5 位有效数字),问计算到 y_{100}将有多大误差?

解 $\begin{cases} y_n = y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783} & (n=1,2,\cdots) \\ y_0 = 28 \end{cases}$

设 y_n 的近似值为 $\tilde{y}_n(n=0,1,2,\cdots)$,则

$$
\begin{cases} \tilde{y}_n = \tilde{y}_{n-1} - \frac{1}{100}\times 27.982 & (n=1,2,\cdots) \\ \tilde{y}_0 = 28 \end{cases}
$$

于是

$$
\begin{cases} y_n - \tilde{y}_n = y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1} - \frac{1}{100}(\sqrt{783}-27.982) & (n=1,2,\cdots) \\ y_0 - \tilde{y}_0 = 0 \end{cases}
$$

由此递推公式,得

$$
y_n - \tilde{y}_n = -\frac{n}{100}(\sqrt{783}-27.982) \qquad (n=1,2,\cdots)
$$

所以

$$|y_{100}-\tilde{y}_{100}|=\left|\frac{100}{100}(\sqrt{783}-27.982)\right|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

例 1-5 在计算机上对 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 从左向右求和 S_n, $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. 当 n 很大时, S_n 将不随 n 的增大而增大, 试说明原因.

解 计算机中的数是用浮点数表示的, 做加减法时必须先对阶码, 而对阶码过程中可能会出现大数"吃掉"小数现象, 导致 n 很大时, S_n 不随 n 的增大而增大.

设计算机中浮点数的尾数位数 $t=8$, 则随着 n 的逐渐增大, $\frac{1}{n+1}$ 逐渐减小, 最终趋近于零. 因此, 必存在某个自然数 N, 使得

$$\frac{\frac{1}{N+1}}{S_N}\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-8}$$

因而

$$S_N+\frac{1}{N+1}\leqslant S_N\left(1+\frac{1}{2}\times10^{-8}\right)=S_N(1+0)=S_N$$

这里小数 $\frac{1}{N+1}$ 在对阶码的过程中被大数 S_N"吃掉"了, 于是

$$S_N+\frac{1}{N+1}=S_N$$

同理

$$S_M=S_N+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{M}=S_N$$

其中 M 为大于 N 的自然数.

例 1-6 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为观测值, 利用下面两个在数学上等价的公式求 s^2 时哪个更好?

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\tilde{x}^2\right)\tag{1-1}$$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{x})^2\tag{1-2}$$

其中 $\tilde{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

解 式(1-1)比式(1-2)更好. 这是因为: ① $\tilde{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均值, 极有可能出现 $\tilde{x}$ 与某个 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相近的情形, 从而计算 $(x_i-\tilde{x})$ 时出现两个相近的数相减的情形, 造成有效数字的损失, 而式(1-1)出现此种情形的可能性较小; ② 式(1-2)右端将使 $(x_i-\tilde{x})^2$ 产生的误差累计起来, 而式(1-1)则无此问题.

例 1-7 当 $n=0,1,2,\cdots,8$ 时, 求积分 $y_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+5}dx$ 的近似值, 注意设法控制误差的传播.

解 $$y_0=\int_0^1\frac{1}{x+5}dx=\ln6-\ln5\approx0.1823215568$$

$$y_n + 5y_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + 5x^{n-1}}{x+5}dx = \int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n}$$

由此可得算法(A)

$$(A)\begin{cases} y_n = \dfrac{1}{n} - 5y_{n-1} \\ y_0 = 0.1823215568 \end{cases}$$

所以

$$y_1 = 1 - 5y_0$$

设 y_n 的近似值为 $\tilde{y}_n$,则

$$y_1 - \tilde{y}_1 = -5(y_0 - \tilde{y}_0)$$

即 $\tilde{y}_0$ 的误差传播到 $\tilde{y}_1$ 时已增加了 5 倍,而

$$y_n - \tilde{y}_n = -5(y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1}) = (-5)^n(y_0 - \tilde{y}_0)$$

所以,$\tilde{y}_0$ 的误差传播到 $\tilde{y}_n$ 时已增加了$(-5)^n$ 倍,此算法不稳定,当 n 充分大时计算结果将严重失真.

另一方面,由 $y_n = \dfrac{1}{n} - 5y_{n-1}$,得

$$y_{n-1} = \frac{1}{5n} - \frac{1}{5}y_n$$

$$y_{10} = \int_0^1 \frac{x^{10}}{x+5}dx = \frac{1}{11}\left(\frac{x^{11}}{x+5}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{11}}{(x+5)^2}dx\right) = \frac{1}{11}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{12(\xi+5)^2}\right],\text{其中}0 < \xi < 1.$$

因而

$$\frac{1}{11}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{12(1+5)^2}\right] < y_{10} < \frac{1}{11}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{12(0+5)^2}\right]$$

即

$$0.01536 < y_{10} < 0.01545$$

取 $y_{10} = 0.0154$,可得算法(B)

$$(B)\begin{cases} y_{n-1} = \dfrac{1}{5n} - \dfrac{1}{5}y_n \\ y_{10} = 0.0154 \end{cases}$$

仿照分析算法(A)误差传播的方法可得算法(B)的误差传播过程:

$$y_0 - \tilde{y}_0 = -\frac{1}{5}(y_1 - \tilde{y}_1) = \left(-\frac{1}{5}\right)^n(y_n - \tilde{y}_n)$$

即 $\tilde{y}_n$ 的误差传播到 $\tilde{y}_0$ 时已变为原来的$\dfrac{1}{(-5)^n}$倍,此算法是稳定的,误差传播过程中逐步衰减.

由 $y_{10} = 0.0154$ 可得 $y_9 = 0.01692$,从而有

$$y_8 = 0.0188382222,\quad y_7 = 0.0212323556,\quad y_6 = 0.0243249575$$
$$y_5 = 0.0284683418,\quad y_4 = 0.0343063316,\quad y_3 = 0.0431387337$$
$$y_2 = 0.0580389199,\quad y_1 = 0.0883922160,\quad y_0 = 0.1823215568$$

1.3 习题选解

1.1 设 x 为准确值,x^* 为 x 的近似值,计算下列各种情况的绝对误差和相对误差.

(1) $x = \pi,\ x^* = 355/113$; (2) $x = \pi,\ x^* = 3.1416$;

(3) $x = \mathrm{e},\ x^* = 2.7182$; (4) $x = \sqrt{3},\ x^* = 1.7321$.

参考答案

(1) $E_a(x) = 2.668 \times 10^{-7}$; $E_r(x) \approx 8.493 \times 10^{-8}$.

(2) $E_a(x) = 7.346 \times 10^{-6}$; $E_r(x) = 2.338 \times 10^{-6}$.

(3) $E_a(x) = -8.0 \times 10^{-5}$; $E_r(x) = -2.943 \times 10^{-5}$.

(4) $E_a(x) = 4.919 \times 10^{-5}$; $E_r(x) = 2.840 \times 10^{-5}$.

1.2 设 x 为准确值,x^* 为 x 的一个近似值,若要求相对误差限 $|E_r(x)| \leqslant 0.0001$,对于下列各准确值 x,试求近似值 x^* 的最大范围.

(1) 121; (2) 990; (3) 2005; (4) 1200; (5) 2.5.

解 由 $E_r(x) = \dfrac{E_a(x)}{x}$ 及 $|E_r(x)| \leqslant 0.0001$,得

$$x - 0.0001|x| \leqslant x^* \leqslant x + 0.0001|x|$$

于是

(1) x^* 的最大范围为 $[120.9879,\ 121.0121]$.

(2) x^* 的最大范围为 $[989.901,\ 990.099]$.

(3) x^* 的最大范围为 $[2004.7995,\ 2005.2005]$.

(4) x^* 的最大范围为 $[1199.88, 1200.12]$.

(5) x^* 的最大范围为 $[2.49975,\ 2.50025]$.

1.3 下列各数都是经过四舍五入得到的近似值,求各数的绝对误差限、相对误差限和有效数字位数.

(1) 3235; (2) 0.0036; (3) 0.3012×10^{-5}; (4) 30.120.

参考答案

(1) 0.5; 0.01546%; 有 4 位有效数字, 即 3,2,3 和 5.

(2) 0.00005; 1.389%; 有 2 位有效数字, 即 3 和 6.

(3) 0.5×10^{-9}; 0.0166%; 有 4 位有效数字, 即 3,0, 1 和 2.

(4) 0.0005; 0.00166%; 有 5 位有效数字, 即 3,0,1,2 和 0.

1.4 已知 $\mathrm{e} = 2.7182818284590\cdots$,问:

(1) 若其近似值取 6 位有效数字,则该近似值是多少? 其绝对误差限是多少?

(2) 若精确到小数点后 4 位,则该近似值是多少? 其绝对误差限是多少?

(3) 若其近似值的绝对误差限为 $\dfrac{1}{2} \times 10^{-4}$,则该近似值有哪几个有效数字?

参考答案

(1) 2.71828; 0.00000183.

(2) 2.7183; 0.0000182.

(3) 有5位有效数字2,7,1,8和3.

1.5　已知近似值 $x_1 = 1.420$，$x_2 = -0.0142$，$x_3 = 1.42 \times 10^{-4}$ 的绝对误差限均为 0.5×10^{-3}，那么它们各有几位有效数字？

参考答案

x_1 有4位有效数字，即1，4，2和0；x_2 有2位有效数字，即1和4；x_3 没有有效数字.

1.6　为了尽量避免有效数字的严重损失，当 $|x| \ll 1$ 时对下列公式应该如何变形？

(1) $\dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{1-x}{1+x}$；　　(2) $1 - \cos x$；　　(3) $e^x - 1$.

参考答案

(1) $\dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2x^2}{(1+x)(1+2x)}$

(2) $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$

或

$$1 - \cos x \approx 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) = x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}\right)$$

(3) 利用 Taylor 展开式的前 n 项，得

$$e^x - 1 \approx x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

1.7　取 $\sqrt{2} \approx 1.4$，采用下列各式计算 $a = (\sqrt{2} - 1)^6$，哪一个得到的结果最好？

(1) $\dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$；　　(2) $99 - 70\sqrt{2}$；　　(3) $(3 - 2\sqrt{2})^3$；　　(4) $\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$.

解　因为 $70\sqrt{2} \approx 99$，$2\sqrt{2} \approx 3$，所以为避免两个相近的数相减，[式(2)与式(3)]都不宜采用.

(1)式与(4)式均未出现两个相近的数相减的情形，但(1)式需要依次计算1次加法，5次乘法，1次除法；而(4)式需要先计算1次乘法，再计算1次加法，然后计算2次乘法，最后计算1次除法；(4)式较(1)式运算次数少，因而用(4)式得到的结果最好.

1.8　数列 $\{x_n\}$ 满足递推公式 $x_n = 10x_{n-1} - 1\ (n = 1, 2, \cdots)$. 若取 $x_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$（3位有效数字），则按该递推公式从 x_0 计算到 x_{10} 时误差有多大？这个计算过程稳定吗？

解　若取 $x_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$，则 $|x_0^* - x_0| \leqslant 0.5 \times 10^{-2}$.

由递推公式 $x_n = 10x_{n-1} - 1$，得 $x_n^* = 10x_{n-1}^* - 1$，从而有

$$|E_n| = |x_n^* - x_n| = |(10x_{n-1}^* - 1) - (10x_{n-1} - 1)| = 10|x_{n-1}^* - x_{n-1}| = 10|E_{n-1}|$$

于是有

$$|E_{10}| = 10|E_9| = 10^2|E_8| = \cdots = 10^{10}|E_0| \leqslant 10^{10} \times 0.5 \times 10^{-2} = 0.5 \times 10^8$$

所以，按该递推公式从 x_0 计算到 x_{10} 时误差会达到 0.5×10^8，这个计算过程是不稳定的.

1.9　求方程 $x^2 - 56x + 1 = 0$ 的两个根，使它至少具有4位有效数字（$\sqrt{87} \approx 9.3274$）.

解　若根据求根公式 $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 求解，由于 $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{56^2 - 4} \approx 56 = -b$，所

以公式 $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$的分子会出现两个相近的数相减的情形. 为避免这种情况发生，可采用以下方法求根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{56+\sqrt{56^2-4}}{2}=28+\sqrt{28^2-1}=28+\sqrt{783}=55.98$$

由 $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$,得

$$x_2=\frac{c}{ax_1}=\frac{1}{55.982}=0.01786$$

1.10 计算

(1) $1-\cos 1^{\circ}$; (2) $\ln(\sqrt{10^{10}+1}-10^5)$; (3) $\frac{1}{759}-\frac{1}{760}$.

参考答案

(1) 1.5230×10^{-4}.

(2) $\ln(\sqrt{10^{10}+1}-10^5)=\ln\frac{1}{\sqrt{10^{10}+1}+10^5}=-\ln(\sqrt{10^{10}+1}+10^5)\approx-12.2061$.

(3) 1.7336×10^{-6}.

1.11 已知积分 $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+4}\mathrm{d}x$ 具有递推公式

$$I_n=\frac{1}{n}-4I_{n-1}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

请在 4 位十进制数计算机上利用下面两种算法计算积分 $I_0,I_1,\cdots,I_7$:

(1) 算法 1:令 $I_0=0.2231(\approx\ln1.25)$,计算 $I_n=\frac{1}{n}-4I_{n-1}\qquad(n=1,2,\cdots,7)$;

(2) 算法 2:令 $I_7=0$,计算 $I_{n-1}=\frac{1}{4n}(1-nI_n)\qquad(n=7,6,\cdots,1)$.

哪种算法准确？为什么？

参考答案(略)

1.4 综合练习

1. 计算过程中数据在计算机上都只能按照一定的舍入规则保留有限位,由此产生的误差称为__________.

2. 设 x 为准确值,x^* 为 x 的一个近似值,如果 x^* 的__________不超过它的某一数位的半个单位,并且从 x^* 左起__________到该数位共有 n 位,则称这 n 个数字为 x^* 的有效数字,也称用 x^* 近似 x 时具有 n 位有效数字.

3. 设准确值 x 的一个近似值 x^* 可以写成 $x^*=\pm0.a_1a_2\cdots a_n\times10^m$,其中 m 为整数,$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 0 ~ 9 中的某一数字,且 $a_1\neq0$. 如果 x^* 的__________满足 $|x^*-x|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{m-k}(1\leqslant k\leqslant n)$, 则称近似值 x^* 有________位有效数字.

4. 如果一个算法在执行过程中____________在一定条件下能够得到有效控制,即初始误差和________________不影响产生可靠的结果,则称这个算法是数值稳定的.

5. 如果标准模具是边长为100cm 的正方形,一个产品的边长是101cm,则边长和面积的相对误差分别是____________和____________.

6. 为了减少运算次数,计算$\frac{16x^5+17x^4+19x^3-14x^2-13x+1}{x^4+16x^2+8x+1}$的值时应将表达式变形为________________,为了避免舍入误差的影响,应将表达式 $\sqrt{2011}-\sqrt{2009}$ 变形为________________.

7. 设 N 充分大,计算$\int_N^{N+1}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

8. 已知$\sqrt{7}$可由下述迭代公式计算

$$\begin{cases}x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{7}{x_k}\right) & (k=0,1,2,\cdots)\\ x_0=2\end{cases}$$

若 x_k 是$\sqrt{7}$具有 n 位有效数字的近似值,证明 x_{k+1}是$\sqrt{7}$具有 $2n$ 位有效数字的近似值.

9. 设 $\sqrt{399}\approx 19.975$ 具有五位有效数字,求方程 $x^2-40x+1=0$ 的两个实根.

10. 估计 Taylor 展开式

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+O(x^4)$$

与

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+O(x^6)$$

的和以及积的逼近的阶.

1.5 实验指导

1. 计算多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 的值的秦九韶算法为

$$\begin{cases}p_k=xp_{k-1}+a_{n-k} & (k=1,2,\cdots,n)\\ p_0=a_n\end{cases}$$

编写秦九韶算法程序,并用该程序计算多项式

$$f(x)=x^5+3x^3-2x+6$$

在 $x=1.1,1.2$ 和 1.3 的值.

C 语言程序清单:

```
#include "stdio.h"
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
//程序名: qin
//程序功能: 按秦九韶算法计算多项式的值
```

```
//* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
void main()
{
    float a[101],x,p;
    int n, k; char yn;
    printf("\n 输入多项式次数 n (n< =100) :");
    scanf("%d",&n);
    for(k=n; k>=0; k--)
    {
        printf("\n 第% d 次项系数:",k);
        scanf("%f",&(a[k]));
    }
    While(1)
     {
        p=0;
        printf("\nx=");
        scanf("%f",&x);
        for(k=0; k<=n; k++)
            p=x*p+a[n-k];
        printf("\n p(%f)  = %f \n",x,p);
        printf("继续(y--是,其它--否)?");
        getchar();  scanf("%c",&yn);
        if (yn! ='Y' && yn! ='y')
            break;
    }
}
```

Matlab 程序清单:

```
n=input('\n 输入多项式次数 n (n< =100) :');
a=zeros(n+1,1); yn='y';
for k=n: -1: 0
  fprintf('\n 第%d 次项系数:' , k);
  a(k+1)=input(' ');
end
while 1
    p=0;
    x=input('x=');
    for k=0: n
        p=x*p+a(n-k+1);
    end
    fprintf('\n p(%f)  = %f \n', x, p);
    yn=input('继续(y--是, 其它--否)? ') ;
    if(yn~='y')
        break;
    end
```