

近代數學概觀

WHAT IS MATHEMATICS?

(第二冊)

原著者 RICHARD COURANT
HERBERT ROBBINS

譯者 余介石
楊錫寬

中華書局出版

一九五一年九月初版

大學用書

近代數學概觀(第二冊)

◎定價人民幣 十六元

譯者 余錫介 寬石

原書名 What is Mathematics?
原著者 Richard Courant and Herbert Robbins
原出版者 Oxford University Press
原書版次及出版年月 第四版 一九四八年

出版者 上海河南中路二二一號 中華書局股份有限公司

印刷者 上海澳門路四七七號 中華書局上海印刷廠

發行者 三聯·中華商務·開明·聯營聯合組織 中國圖書發行公司

各地分店 三聯書店 中華書局 商務印書館 開明書店 聯營書店

總目編號(15500) 印數1-3,000

本書內容提要

本書譯自 R. Courant 等所著之 *What is Mathematics* 最新修訂本，計分四冊。此為第二冊，包含兩部分；（一）幾何作圖，討論尺規作圖準則，各種作圖法與著名作圖題，原著者稱此類問題永為幾何學中衆所愛好之題材，譯本又附加補遺，敘述近十餘年來我國的三分角家與方圓家，更可引起讀者之興趣。（二）射影幾何與非歐幾何，從高等觀點闡發幾何學的內容及其基礎，使讀者對斯學得一鳥瞰。有志研習幾何者與中學數學教師，極宜讀此書。

近代數學概觀第二冊

目次

	頁數
第一編 幾何作圖題及數域運算.....	7—65
引言.....	7—9
第一部 不可能性之證與代數.....	10—29
第一章 基本幾何作圖題.....	10—16
第一節 數域 (Fields) 之構造與開平方	第二節 正
多邊形	第三節 Apollonius 問題
第二章 可作數與數域.....	16—23
第一節 一般理論	第二節 一切可作數皆為代數數
第三章 希臘三大問題之不可作.....	23—29
第一節 倍立方	第二節 三次方程式之一定理
第三節 三分角	第四節 正七邊形
第五節 方	圓問題概略
第二部 作圖各法.....	29—51
第四章 幾何變換 反演.....	29—35
第一節 一般討論	第二節 反演之性質
第三節 反點之作圖	第四節 如何單用圓規平分線段與求出
圓心	

第五章 用他種工具作圖法 Mascheroni 單用 圓規作圖法.....35—45

- 第一節 倍立方之古典作圖法 第二節 單用圓規之
作圖法 第三節 用器械作圖 器械作出之曲線 擺
線 第四節 聯節器 Peaucellier 與 Hart 反演器

第六章 再論反演及其應用.....45—50

- 第一節 角之不變性 圓族 第二節 對 Apollonius
問題之應用 第三節 反復反射

第一編補遺 我國之三分角家及方圓家51—65

- 第一節 三分角問題略史 第二節 汪聯松君 第
三節 吳佑之君 第四節 楊師禹君 第五節 楊
嘉如君 第六節 論準確度 第七節 袁成林君
第八節 宋敍倫君 第九節 劉明君 第十節 尾
聲

第二編 射影幾何 公理派 非歐幾何·66—121

第一章 引言.....66—68

- 第一節 幾何性質之分類 變換下之不變性 第二節
射影變換

第二章 基本概念.....68—72

- 第一節 射影變換羣 第二節 Desargues 定理

第三章 交比.....72—79

- 第一節 定義及其不變性之證明 第二節 對完全四

邊形之應用

第四章 平行性與無窮遠.....79—84

- 第一節 無窮遠點視作“理想點” 第二節 理想元素
及射影 第三節 含無窮遠元素之交比

第五章 應用問題.....84—89

- 第一節 初步事項 第二節 平面上 Desargues 定理
之證明 第三節 Pascal 定理 第四節 Brianchon 定理
第五節 對偶性方面之註

第六章 解析式表示.....89—94

- 第一節 預備事項 第二節 齊次坐標 對偶性之代
數基礎

第七章 單用直尺作圖之問題.....94—96

第八章 錐線與二次曲面.....96—109

- 第一節 錐線之初等度量幾何 第二節 錐線之射影
性質 第三節 錐線之線素曲線觀 第四節 Pascal
與 Brianchon 關於錐線之普通定理 第五節 雙曲面

第九章 公理派與非歐幾何學.....109—121

- 第一節 公理派方法 第二節 雙曲性非歐 (non-
Euclidean) 幾何 第三節 幾何與實體 第四節
Poincaré 模型 第五節 橢性或 Riemann 氏幾何

第二編補遺 高維幾何.....122—127

- 第一節 引言 第二節 解析途徑 第三節 幾何
或配合途徑

附錄一	補充註釋及習題.....	128—130
附錄二	進修時之參考書.....	131—132
附錄三	索引.....	133—136

近代數學概觀

WHAT IS MATHEMATICS?

(第二冊)

原著者 RICHARD COURANT
HERBERT ROBBINS

譯者 余介石
楊錫寬

中華書局出版

一九五一年九月初版

大學用書

近代數學概觀(第二冊)

◎定價人民幣 十六元

譯者

余錫介

寬石

原書名 What is Mathematics?

原著者 Richard Courant and Herbert Robbins

原出版者 Oxford University Press

原書版次及出版年月 第四版 一九四八年

出版者

上海河南中路二二一號
中華書局股份有限公司

印刷者

上海澳門路四七七號
中華書局上海印刷廠

發行者

三聯·中華商務·開明·聯營聯合組織
中國圖書發行公司

各地分店

三聯書店
中華書局
商務印書館
開明書店
聯營書店

總目編號(15500) 印數1—3,000

近代數學概觀第二冊

目次

	頁數
第一編 幾何作圖題及數域運算.....	7—65
引言.....	7—9
第一部 不可能性之證與代數.....	10—29
第一章 基本幾何作圖題.....	10—16
第一節 數域 (Fields) 之構造與開平方	第二節 正
多邊形	第三節 Apollonius 問題
第二章 可作數與數域.....	16—23
第一節 一般理論	第二節 一切可作數皆為代數數
第三章 希臘三大問題之不可作.....	23—29
第一節 倍立方	第二節 三次方程式之一定理
第三節 三分角	第四節 正七邊形
第五節 方	圓問題概略
第二部 作圖各法.....	29—51
第四章 幾何變換 反演.....	29—35
第一節 一般討論	第二節 反演之性質
第三節 反點之作圖	第四節 如何單用圓規平分線段與求出
圓心	

第五章 用他種工具作圖法 Mascheroni 單用 圓規作圖法.....35—45

- 第一節 倍立方之古典作圖法 第二節 單用圓規之
作圖法 第三節 用器械作圖 器械作出之曲線 擺
線 第四節 聯節器 Peaucellier 與 Hart 反演器

第六章 再論反演及其應用.....45—50

- 第一節 角之不變性 圓族 第二節 對 Apollonius
問題之應用 第三節 反復反射

第一編補遺 我國之三分角家及方圓家51—65

- 第一節 三分角問題略史 第二節 汪聯松君 第
三節 吳佑之君 第四節 楊師禹君 第五節 楊
嘉如君 第六節 論準確度 第七節 袁成林君
第八節 宋敍倫君 第九節 劉明君 第十節 尾
聲

第二編 射影幾何 公理派 非歐幾何·66—121

第一章 引言.....66—68

- 第一節 幾何性質之分類 變換下之不變性 第二節
射影變換

第二章 基本概念.....68—72

- 第一節 射影變換羣 第二節 Desargues 定理

第三章 交比.....72—79

- 第一節 定義及其不變性之證明 第二節 對完全四

邊形之應用

第四章 平行性與無窮遠……………79—84

- 第一節 無窮遠點視作“理想點” 第二節 理想元素
及射影 第三節 含無窮遠元素之交比

第五章 應用問題……………84—89

- 第一節 初步事項 第二節 平面上 Desargues 定理
之證明 第三節 Pascal 定理 第四節 Brianchon 定理
第五節 對偶性方面之註

第六章 解析式表示……………89—94

- 第一節 預備事項 第二節 齊次坐標 對偶性之代
數基礎

第七章 單用直尺作圖之問題……………94—96

第八章 錐線與二次曲面……………96—109

- 第一節 錐線之初等度量幾何 第二節 錐線之射影
性質 第三節 錐線之線素曲線觀 第四節 Pascal
與 Brianchon 關於錐線之普通定理 第五節 雙曲面

第九章 公理派與非歐幾何學……………109—121

- 第一節 公理派方法 第二節 雙曲性非歐 (non-
Euclidean) 幾何 第三節 幾何與實體 第四節
Poincaré 模型 第五節 橢性或 Riemann 氏幾何

第二編補遺 高維幾何……………122—127

- 第一節 引言 第二節 解析途徑 第三節 幾何
或配合途徑

附錄一	補充註釋及習題.....	128—130
附錄二	進修時之參考書.....	131—132
附錄三	索引.....	133—136

近代數學概觀第二冊

第一編 幾何作圖題及數域運算

余介石譯

引言

作圖題永爲幾何學中衆所愛好之題材。僅用尺規即可作甚多圖形，如作一線段，等分一角，由一點作一線垂直於已知線，或圓內作一內接正六邊形等，讀者在中學時代，皆已習知，當能回憶。於此等問題中，直尺僅用於作直線，而非衡量距離與割度之工具。限用尺規之傳統觀念，雖導源甚古，然希臘人亦未嘗躊躇而使用他種工具。

Apollonius (約公元前 200 年時人) 之切圓問題，爲著名之古典作圖題之一，此題爲求一圓與平面內之已知三圓相切。在特例，三圓中之一圓或數圓可縮爲一點，或伸爲直線(即“圓”之半徑爲零或“無限大”)。例如求作一圓過一點且與二已知直線相切。此類之特例尚易解，而一般情形則甚難。

尺規作圖中，以 n 邊正多邊形之作圖，或最富於趣味。如 $n=3, 4, 5, 6$ 時之解早已求得，且爲中學幾何學之主要部分。但正七邊形($n=7$)已證明不可解。三等分一已知角、倍立方(即求一立方體，其體積爲一已知立方體之二倍)與方圓問題(即作一正方形與已知圓等面積)爲希臘之古典三大作圖題，皆未能解。於此等作圖題中，僅限於用尺規爲工具。

因此類未能解決之問題，遂引起數學中一種顯著而新穎之進展；且因數百年求解未得，進而懷疑此等問題或爲決不可解。數學家因迫不得已乃研究如何證明其一問題之不可解？

在代數學中，引出此種新思考方法者爲五次及以上方程式之解法問題。十六世紀數學家已知三次或四次代數方程式之解法，可用類於解二次方程式之初等方法之手續完成。此等方法，均有下述之公共特性，即方程式之解或根，可用方程式之係數，以一串運算表爲代數式，此等運算或爲有理運算——加、減、乘或除——或爲開平方、開立方與開四次方。吾人可謂四次及低次之代數方程式，可用“根式”(radix 一字爲拉丁文，其意爲根)求解。因此而思及推廣此法則，用開高次方根以解五次或高次方程式，乃極自然之勢。但所有如此之嘗試，均告失敗。十八世紀曾有若干卓越數學家誤以爲業已得解。直至十九世紀初，意大利人 Ruffini (1765—1822) 與挪威天才 N. H. Abel (1802—1829) 始懷一種革新之思想，即求證用根式解 n 次代數方程式之不可能。吾人須知此問題非任何 n 次代數方程式是否有解。1799 年，Gauss 於伊之博士論文中，首先證實此事。任何方程式之根之存在，已無疑義，且此諸根能以適宜過程求出，達於精確程度，自更無問題。方程式根之數值解法自極重要，而有高度之發展。但 Abel 與 Ruffini 之問題，與此迥異，此問題即：僅用有理運算與根式能否求解。由於對此問題求澈底明瞭之願望，遂激發 Ruffini、Abel 與 Galois (1811—1832) 所創立近世代數與羣論之偉大擴展。

證明某些幾何作圖題之不可能性，即爲代數學中此種趨勢之一簡單之例。藉代數概念之助，即可於本編證明，僅用尺規三分角，作正七邊形，或倍立方之不可能性。(方圓問題較難處理，可參見本編第三章第五節。)吾人之出發點，不僅在某種作圖題不可能性之消極方面，而在其積極性，即一切可作問題如何可以完全判別？至此問題得解後，則易知上述問題，不在可作之列。

Gauss 十七歲時曾研究正“ p 邊形”(即有 p 邊之多邊形)之可作性, 於此 p 爲一質數. 當是時僅知 $p=3$ 及 $p=5$ 之作圖法. Gauss 發現當 p 是質“Fermat 數”, 即

$$p = 2^{2^n} + 1$$

時正 p 邊形可作, 而僅在此時方可作. 最先之 Fermat 數爲 3, 5, 17, 257, 65537 (參看本書第一冊第一編之補遺第一章), 青年之 Gauss 對此發明, 喜不自勝, 乃放棄作語言學家之願望, 而立志從事數學與其應用. 彼常回顧彼首次之偉大成就而自傲. 伊死後, Goettingen 塑有伊之銅像, 銅像之座作正十七邊形, 實無其他方式, 更適宜表達伊之榮耀.

從事幾何作圖時, 須知問題不在作出精確達於相當程度之圖形, 而爲僅用尺規, 并設尺規完全準確, 理論上能否求作. Gauss 所證明者, 乃伊之作圖可完全依據原理完成. 其理論不在以簡單方法作圖, 亦非求問題簡化之方, 與減少必須步驟. 此等問題, 理論上比較不甚重要. 就實用觀點言, 此種作圖法所得結果, 皆不及用精確之量角器所作者之較可滿意, 世人每未能了解幾何作圖題之理論性質, 且頑固不承認已確立之科學事實, 致三分角家與方圓家源源不絕出現*. 此輩中能了解初等數學之人, 如讀本編, 當可獲益.

*[譯註] 此種情形, 在我國亦非例外, 請參看本編補遺“我國之三分角家與方圓家”.

於此有須再度鄭重說明者, 即吾人對幾何作圖之觀念, 在若干方面, 不甚自然. 尺規固然爲作圖中最簡之工具, 但幾何本性初不以此等工具爲限. 希臘數學家, 在甚久以前, 即已認識如倍立方等若干問題之解決, 須准許運用正交形之直尺*; 吾人甚易創設圓規以外之工具, 藉以作橢圓、雙曲線, 及更複雜之圖形, 故其使用, 得擴大可作(Constructible)圖形之範圍至相當程度. 但在以下諸章, 吾人仍當固守幾何作圖僅用尺規之標準觀念.

*[譯註] 參看後文第五章第一節.