近代數學概觀

第二冊

近代數學概觀

WHAT IS MATHEMATICS?

（第二冊）

原著者 RICHARD COURANT
HERBERT ROBBINS

譯　者 余　介　石
楊　錫　寬

中華書局出版

一九五一年九月初版

大學用書

近代數學概觀（第二冊）

◎定價人民幣[redacted]元

譯者　余介石　楊錫寬

原書名　What is Mathematics?

原著者　Richard Courant and Herbert Robbins

原出版者　Oxford University Press

原書版次及出版年月　第四版　一九四八年

出版者　中華書局股份有限公司　上海河南中路二二一號

印刷者　中華書局上海印刷廠　上海澳門路四七七號

發行者　中國圖書發行公司　三聯·中華·商務·開明·聯營聯合組織

各地分店　三聯書店　中華書局　商務印書館　開明書店　聯營書店

總目編號(15500)　印數1—3,000

本書內容提要

本書譯自 R. Courant 等所著之 What is Mathematics 最新修訂本，計分四冊。此篇第二冊，包含兩部分；(一)幾何作圖，討論尺規作圖準則，各種作圖法與著名作圖題，原著者稱此類問題永爲幾何學中衆所愛好之題材，譯本又附加補遺，敍述近十餘年來我國的三分角家與方圓家，更可引起讀者之興趣。(二)射影幾何與非歐幾何，從高等觀點闡發幾何學的內容及其基礎，使讀者對斯學得一鳥瞰。有志研習幾何者與中學數學教師，極宜讀此書。

近代數學概觀第二册

目次

近代數學概觀

WHAT IS MATHEMATICS?

（第二冊）

原著者 RICHARD COURANT
HERBERT ROBBINS

譯者 余介石
楊錫寬

中華書局出版

一九五一年九月初版

大學用書

近代數學概觀（第二冊）

◎定價人民幣[redacted]

譯者 余介石 楊錫寬

原書名 What is Mathematics?

原著者 Richard Courant and Herbert Robbins

原出版者 Oxford University Press

原書版次及出版年月 第四版 一九四八年

出版者 中華書局股份有限公司 上海河南中路二二一號

印刷者 中華書局上海印刷廠 上海澳門路四七七號

發行者 中國圖書發行公司 三聯・中華・商務・開明・聯營聯合組織

各地分店 三聯書店 中華書局 商務印書館 開明書店 聯營書店

總目編號(15500) 印數1—3,000

近代數學概觀第二册

目　次

近代數學概觀第二册

第一編　幾何作圖題及數域運算

余介石譯

引　言

作圖題永爲幾何學中衆所愛好之題材.僅用尺規卽可作甚多圖形,如作一線段,等分一角,由一點作一線垂直於已知線,或圓內作一內接正六邊形等,讀者在中學時代,皆已習知,當能回憶.於此等問題中,直尺僅用於作直線,而非衡量距離與劃度之工具.限用尺規之傳統觀念,雖導源甚古,然希臘人亦未嘗躊躇而使用他種工具.

Apollonius (約公元前200年時人)之切圓問題,爲著名之古典作圖題之一,此題爲求一圓與平面內之已知三圓相切.在特例,三圓中之一圓或數圓可縮爲一點,或伸爲直線(卽"圓"之半徑爲零或"無限大").例如求作一圓過一點且與二已知直線相切.此類之特例尙易解,而一般情形則甚難.

尺規作圖中,以n邊正多邊形之作圖,或最富於趣味.如$n=3,4,5,6$時之解早已求得,且爲中學幾何學之主要部分.但正七邊形($n=7$)已證明不可解.三等分一已知角、倍立方(卽求一立方體,其體積爲一已知立方體之二倍)與方圓問題(卽作一正方形與已知圓等面積)爲希臘之古典三大作圖題,皆未能解.於此等作圖題中,僅限於用尺規爲工具.

因此類未能解決之問題,遂引起數學中一種顯著而新穎之進展;且因數百年求解未得,進而懷疑此等問題或為決不可解.數學家因迫不得已乃研究**如何證明其一問題之不可解?**

在代數學中,引出此種新思考方法者為五次及以上方程式之解法問題.十六世紀數學家已知三次或四次代數方程式之解法,可用類於解二次方程式之初等方法之手續完成.此等方法,均有下述之公共特性,即方程式之解或根,可用方程式之係數,以一串運算表為代數式,此等運算或為有理運算——加、減、乘或除——或為開平方、開立方與開四次方.吾人可謂四次及低次之代數方程式,可用"根式"(radix 一字為拉丁文,其意為根)求解.因此而思及推廣此法則,用開高次方根以解五次或高次方程式,乃極自然之勢.但所有如此之嘗試,均告失敗.十八世紀曾有若干卓越數學家誤以為業已得解.直至十九世紀初,意大利人 Ruffini (1765—1822)與挪威天才 N. H. Abel (1802—1829) 始懷一種革新之思想,即**求證用根式解 n 次代數方程式之不可能**.吾人須知此問題非任何 n 次代數方程式是否有解.1799 年,Gauss 於伊之博士論文中,首先證實此事.任何方程式之根之**存在**,已無疑義,且此諸根能以適宜過程求出,達於精確程度,自更無問題.方程式根之數值解法自極重要,而有高度之發展.但 Abel 與 Ruffini 之問題,與此迥異,此問題即:**僅用有理運算與根式能否求解**.由於對此問題求澈底明瞭之願望,遂激發 Ruffini、Abel 與 Galois (1811—1832)所創立近世代數與羣論之偉大擴展.

證明某些幾何作圖題之不可能性,即為代數學中此種趨勢之一簡單之例.藉代數概念之助,即可於本編證明,僅用尺規三分角,作正七邊形,或倍立方之不可能性.(方圓問題較難處理,可參見本編第三章第五節.)吾人之出發點,不僅在某種作圖題不可能性之消極方面,而在其積極性,即一切可作問題如何可以完全判別?至此問題得解後,則易知上述問題,不在可作之列.

Gauss 十七歲時曾研究正“p 邊形”(即有 p 邊之多邊形)之可作性,於此 p 爲一質數.當是時僅知 $p=3$ 及 $p=5$ 之作圖法.Gauss 發現當 p 是質“Fermat 數”,即

$$p=2^{2^n}+1$$

時正 p 邊形可作,而僅在此時方可作.最先之 Fermat 數爲 3,5,17,257,65537 (參看本書第一册第一編之補遺第一章),青年之 Gauss 對此發明,喜不自勝,乃放棄作語言學家之願望,而立志從事數學與其應用.彼常回顧彼首次之偉大成就而自傲.伊死後,Goettingen 塑有伊之銅像,銅像之座作正十七邊形,實無其他方式,更適宜表達伊之榮耀.

從事幾何作圖時,須知問題不在作出精確達於相當程度之圖形,而爲僅用尺規,幷設尺規完全準確,理論上能否求作.Gauss 所證明者,乃伊之作圖可完全依據原理完成.其理論不在以簡單方法作圖,亦非求問題簡化之方,與減少必須步驟.此等問題,理論上比較不甚重要.就實用觀點言,此種作圖法所得結果,皆不及用精確之量角器所作者之較可滿意,世人每未能了解幾何作圖題之理論性質,且頑固不承認已確立之科學事實,致三分角家與方圓家源源不絕出現*.此輩中能了解初等數學之人,如讀本編,當可獲益.

*〔譯註〕　此種情形,在我國亦非例外,請參看本編補遺“我國之三分角家與方圓家”.

於此有須再度鄭重說明者,即吾人對幾何作圖之觀念,在若干方面,不甚自然.尺規固然爲作圖中最簡之工具,但幾何本性初不以此等工具爲限.希臘數學家,在甚久以前,即已認識如倍立方等若干問題之解決,須准許運用正交形之直尺*;吾人甚易創設圓規以外之工具,藉以作橢圓、雙曲線,及更複雜之圖形,故其使用,得擴大可作(Constructible)圖形之範圍至相當程度.但在以下諸章,吾人仍當固守幾何作圖僅用尺規之標準觀念.

*〔譯註〕　參看後文第五章第一節.