普通高等学校“十二五”规划教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

刘忠东 罗贤强 黄璇 吴高翔 编

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

高等数学

刘忠东　罗贤强
黄　璇　吴高翔　编

重庆大学出版社

内容提要

本书根据经济管理类、化学类和生物类等专业高等数学课程的基本要求，参照研究生入学考试大纲，结合编者多年的教学实践经验编写而成。全书共 8 章，内容为函数与极限，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，常微分方程与差方程，无穷级数。

本书内容丰富，逻辑清晰，重点突出，简明实用，便于教学。书后附有习题答案与提示，供教师和学生参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．刘忠东等编．—重庆：重庆大学出版社，2015.5

ISBN 978-7-5624-8975-7

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①刘…　Ⅲ.①高等数学　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 067695 号

高等数学

刘忠东　罗贤强　黄　璇　吴高翔　编

策划编辑：杨粮菊

责任编辑：文　鹏　　版式设计：杨粮菊

责任校对：关德强　　责任印制：赵　晟

重庆大学出版社出版发行

出版人：邓晓益

社址：重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编：401331

电话：(023) 88617190　88617185(中小学)

传真：(023) 88617186　88617166

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆联谊印务有限公司印刷

*

开本：720×960　1/16　印张：22　字数：380 千

2015 年 5 月第 1 版　2015 年 5 月第 1 次印刷

印数：1—3 000

ISBN 978-7-5624-8975-7　定价：39.80 元

前言

为了适应高等教育大众化的发展现状，在教学课时减少的情况下，使学生能较好地掌握高等数学的基本思想和方法，提高学生的数学素质和能力，编者根据多年的教学实践编写了本书。本书是为一般高等院校经济管理类、化学类、生物类等相关专业的本科生所编写的高等数学教材，具有以下特点：

第一，对于重要概念，尽可能从实际问题引出并用图形、文字、代数的方法加以呈现。对于重要定理的引入与证明，尽可能呈现“发现”过程，力求做到深入浅出、形象直观、通俗易懂。

第二，在保持内容的科学性、系统性的同时，适当简化或略去了某些性质和定理的证明过程，引导学生用数学的观点、方法分析问题和解决问题。

第三，本教材适用于经济管理类、化学类、生物类等相关专业。在例题的选用上，除经典的物理学实例外，选用了适量的经济、化学和生物等方面的实例，以适应不同专业的教学需求。

本书在编写过程中参考了众多国内现有同类教材（见参考文献），同时得到了重庆大学出版社的大力支持，对此表示衷心感谢。

限于作者水平，不当之处在所难免，敬请广大读者批评指出。

编　者

2015 年 1 月

目录 CONTENS

第 1 章　函数与极限

函数是高等数学的主要研究对象,极限是微积分学的理论基础.本章着重介绍函数的极限和连续性等基本概念以及它们的性质.

1.1　函　数

1.1.1　集合

一般地,把具有某种特定性质的对象组成的总体称为**集合**,把组成集合的对象称为该集合的**元素**.

通常用大写字母 A,B,C 等表示集合,用小写字母 a,b,c 等表示元素.若 a 是集合 A 的元素,记为 $a\in A$,否则记为 $a\notin A$.根据集合中元素个数的多少,集合可分为**有限集**和**无限集**.

集合通常有两种表示方法:**列举法**和**描述法**.

(1)列举法.列举法是将集合的所有元素一一列举出来的表示方法.例如,由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A 可表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

(2)描述法.若集合 A 是由具有某种性质 P 的元素的全体所组成,就可以表示成

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如,大于 0 小于 6 的一切实数组成的集合可表示成

$$M=\{x\mid 0<x<6,x\in\mathbf{R}\}.$$

习惯上,将全体非负数整数即自然数的集合记为 $\mathbf{N}$,全体正整数的集合记为 $\mathbf{N}^*$,全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$,全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$,全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$.

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,或 B **包含** A,记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$).例如有

$$\mathbf{N}^*\subset\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

如果 $A\subset B$ 且 $B\supset A$,则称集合 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

不含任何元素的集合称为**空集**,记为$\varnothing$,并规定空集为任一集合的子集.

1.1.2 实数集

区间与邻域是微积分学中常用的实数集.

设 a 和 b 为实数,且 $a<b$. 数集$\{x\mid a<x<b\}$称为**开区间**,记为(a,b);数集$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$称为**闭区间**,记为$[a,b]$;数集$\{x\mid a\leqslant x<b\}$和$\{x\mid a<x\leqslant b\}$都称为**半开半闭区间**,分别记为$[a,b)$和$(a,b]$.

以上这几类区间统称为**有限区间**,其中 a,b 分别称为区间的**左端点**和**右端点**,$b-a$ 称为**区间的长度**.

类似可定义无穷区间

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\};$$
$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\};$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\};$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}.$$

设有实数 a 及 δ,且 $\delta>0$. 称数集$\{x\mid |x-a|<\delta\}$为**点 a 的 δ 邻域**,记为$U(a,\delta)$. 其中,a 称为这个**邻域的中心**,δ 称为这个**邻域的半径**,如图 1.1 所示.

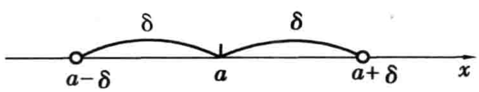

图 1.1

称数集$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$为**点 a 的去心 δ 邻域**,记为$\overset{0}{U}(a,\delta)$. 它是点 a 的 δ 邻域去掉中心点 a 所得的集合.

当不需要强调邻域的半径 δ 时, 点 a 的 δ 邻域和去心 δ 邻域可分别简记为 $U(a)$ 和$\overset{0}{U}(a)$.

为了方便,把区间$(a-\delta,a)$和$(a,a+\delta)$分别称为点 a 的**左 δ 邻域**和**右 δ 邻域**.

1.1.3 函数的概念

定义 1 设 D 是一个非空实数集，如果按照某一确定的对应法则 f，对于每一个实数 $x \in D$，都有唯一的一个实数 y 与之对应，则称对应法则 f 是定义在实数集 D 上的**函数**，记为

$$f: D \to \mathbf{R} \text{ 或 } y = f(x), x \in D.$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**.

每个 $x \in D$ 所对应的数 y 称为函数 f 在点 x 的**函数值**，记为 $y = f(x)$. 全体函数值的集合

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 f 的**值域**.

函数概念的两个基本要素是对应法则和定义域. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同，则称这两个函数相同.

函数的定义域通常按以下两种情况来确定：一种是有实际背景的函数，其定义域根据这个问题的实际意义来确定；另一种是用数学表达式表示的函数，如不说明定义域，则其定义域就是指使表达式有意义的一切实数组成的集合，称为函数的自然定义域.

例 1 求函数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ 的定义域.

解 要使函数有意义，必须有

$$4 - x^2 > 0,$$

即

$$-2 < x < 2.$$

故函数的定义域为

$$D = \{x \mid -2 < x < 2\}.$$

函数的表示法主要有三种：解析法（或称公式法）、表格法和图形法. 用图形法表示函数是基于函数图形的概念，称坐标平面上的点集

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

为函数 $y = f(x), x \in D$ 的**图形**.

例 2　函数

$$y = |x| = \begin{cases} -x, & x<0 \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

称为绝对值函数,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,它的图形如图 1.2 所示.

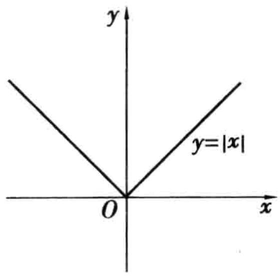

图 1.2

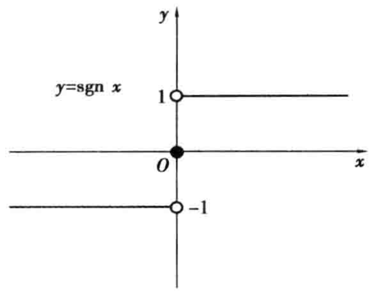

图 1.3

例 3　函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

称为**符号函数**,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,它的图形如图 1.3 所示.

例 4　函数

$$y=[x]$$

称为**取整函数**. 这里$[x]$表示不超过 x 的最大整数,称为 x 的整数部分. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,它的图形如图 1.4 所示.

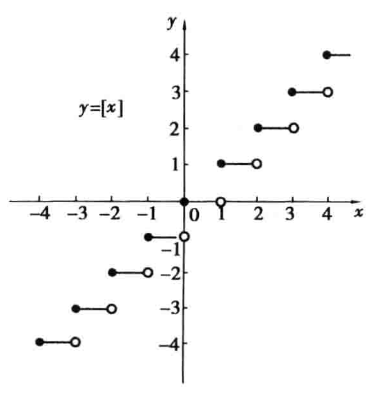

图 1.4

上面几个函数在其定义域的不同区间,对应法则用不同的公式表达,这类函数称为**分段函数**.

分段函数在实际问题中也是经常出现的. 例如,某市出租车按如下规定收费:当行驶里程不超过 3 km 时,一律收起步费 10 元;当行驶里程超过 3 km 时,除起步费外,对超过 3 km 且不超过 10 km 的部分,按 2 元/km 计费,对超过 10 km 的部分,按

3 元/km 计费. 则车费 C 与行驶里程 S 之间的函数关系为

$$C(S)=\begin{cases}10, & 0<S\leqslant 3\\ 2S+4, & 3<S\leqslant 10\\ 3S-6, & S>10\end{cases}$$

1.1.4 函数的性质

1)有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义. 如果存在正数 M,使对 D 中每一个 x 都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上**有界**,并称 $f(x)$ 是 D 上的**有界函数**. 否则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

直观上看,有界函数 $f(x)$ 的图形介于水平线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.

例如,正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数,因为对一切实数 x 有 $|\sin x|\leqslant 1$ 和 $|\cos x|\leqslant 1$. 又如函数 $y=x^3$ 在 $[0,1]$ 上是有界的,而在 $[0,+\infty)$ 上却是无界的.

2)单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果对任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**(**单调减少**),并称区间 I 为函数 $f(x)$ 的**单调增加区间**(**单调减少区间**).

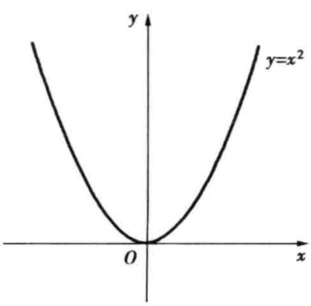

图 1.5

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

函数在 I 上单调增加(单调减少),其图形沿 x 轴正向逐渐上升(逐渐下降).

例如函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不具有单调性,但在 $(-\infty,0]$ 上单调减少,在 $[0,+\infty)$ 上单调增加,如图 1.5 所示.

3)奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 在数轴上关于原点对称. 如果对任何 $x\in D$ 有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称$f(x)$是D上的**奇函数**;如果对任何$x\in D$有

$$f(-x)=f(x),$$

则称$f(x)$是D上的**偶函数**.

例如,$f(x)=\sin x$是奇函数,因为$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$. 又例如,$f(x)=\cos x$是偶函数,因为$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$.

奇和偶的名称来自x的幂次. 如果$f(x)$是x的奇数次幂,如$f(x)=x$或$f(x)=x^3$,则它就是奇函数;如果$f(x)$是x的偶数次幂,如$f(x)=x^2$或$f(x)=x^4$,则它就是偶函数.

奇函数的图形关于原点对称,如图1.6所示;偶函数的图形关于y轴对称,如图1.7所示.

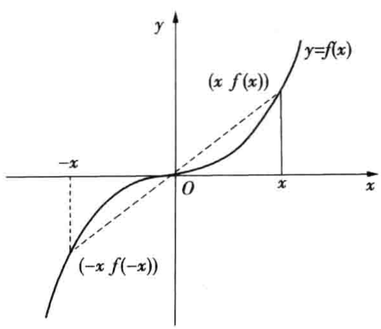

图1.6

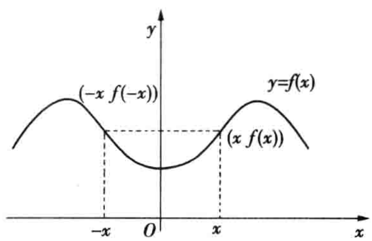

图1.7

4)周期性

设函数$f(x)$定义域为D. 如果存在正数T,使得对一切$x\in D$,都有$x\pm T\in D$,且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称$f(x)$为D上的**周期函数**,称T为$f(x)$的一个**周期**.

显然,如果T为$f(x)$的周期,则对于任何正整数k,kT也是函数$f(x)$的周期. 如果在周期函数的所有周期中有一个最小的,则称此周期为该函数的**最小正周期**. 通常说周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数$y=\sin x$,$y=\cos x$都是周期为2π的周期函数.

1.1.5 反函数与复合函数

1)反函数的概念

设有函数 $y=f(x), x\in D$,若对于每一个 $y\in f(D)$,有唯一的 $x\in D$ 使得 $y=f(x)$,则在 $f(D)$ 上定义了一个函数,记为

$$x=f^{-1}(y), y\in f(D).$$

称这个函数为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.

习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,故函数 $y=f(x), x\in D$ 的反函数记为

$$y=f^{-1}(x), x\in f(D).$$

由反函数的定义可知,如果当 $x_1\neq x_2$ 时有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则函数 $y=f(x)$ 一定有反函数. 由此可见,单调函数一定有反函数,并且其反函数有相同的单调性.

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 而言,原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**. 如果将它们的图形画在同一坐标平面上,则这两个图形关于直线 $y=x$ 对称,如图 1.8 所示.

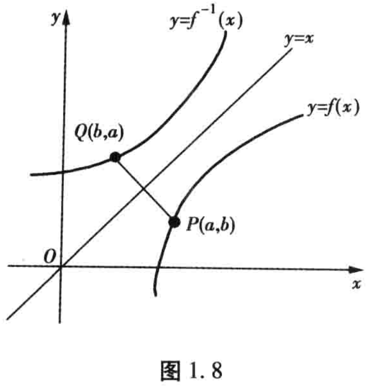

图 1.8

例 5 求函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数.

解 函数的定义域为 $x\in[1,+\infty)$,值域为 $(-\infty,0]$,由 $y=-\sqrt{x-1}$ 解得

$$x=y^2+1.$$

所求反函数为

$$y=x^2+1, x\in(-\infty,0].$$

例 6 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数,其定义域

为$[-1,1]$,值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$如图 1.9(a)所示.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 是 $y=\cos x, x\in[0,\pi]$ 的反函数，其定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,如图 1.9(b)所示.

反正切函数 $y=\arctan x$ 是 $y=\tan x, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$的反函数,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,如图 1.9(c)所示.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 是 $y=\cot x, x\in(0,\pi)$ 的反函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,\pi)$,如图 1.9(d)所示.

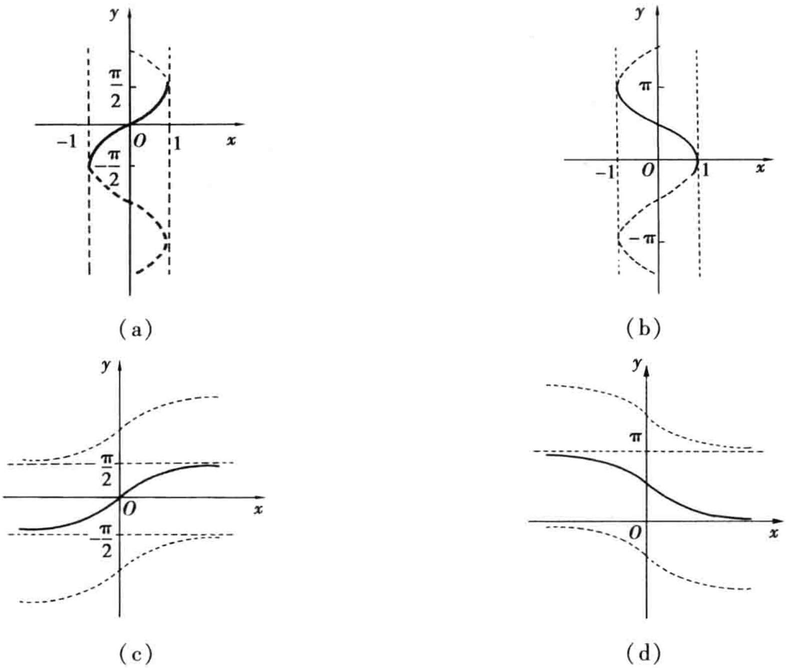

图 1.9

2)复合函数的概念

将函数 $u=g(x)$ 代入另一个函数 $y=f(u)$ 的自变量的位置,得到的新函数 $y=f[g(x)]$称为函数 $y=f(u)$和函数 $u=g(x)$ 的**复合函数**. 复合函数的定义域是使得$f[g(x)]$有意义的 x 组成的集合. 其中,f 称为**外(层)函数**,g 称为**内(层)函数**,u 称为**中间变量**.

例如,函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$ 与函数 $u=g(x)=1-x^2$ 的复合函数为

$$y=f(g(x))=\sqrt{1-x^2},$$

其定义域为$[-1,1]$.

并不是任意两个函数都能进行复合. 例如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能进行复合,因为对任意实数 x,表达式 $\arcsin(2+x^2)$ 没有意义.

复合函数也可由多个函数相继复合而成. 例如,由三个函数 $y=\sqrt[3]{u}$, $u=\sin v$ 与 $v=x^2$ 相继复合而成的复合函数为

$$y=\sqrt[3]{\sin x^2}.$$

1.1.6 初等函数

下列函数称为基本初等函数.

常量函数:$y=C$(C 是常数).

幂函数:$y=x^{\alpha}$(α 为实数).

指数函数:$y=a^x$($a>0, a\neq 1$).

对数函数:$y=\log_a x$($a>0, a\neq 1$).

三角函数:$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$.

反三角函数:$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算形成的并可以由一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

例如,$y=\sqrt{1-x^2}$ 是多项式 $u=1-x^2$ 与幂函数 $y=u^{\frac{1}{2}}$ 复合而成,而多项式 $1-x^2$ 又是常数 1 与幂函数 x^2 之差,所以 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是初等函数.

又如符号函数、取整函数不是初等函数.

分段函数常常不是初等函数,但有些分段函数却是初等函数. 如函数

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

是一个分段函数,因为 $y=|x|=\sqrt{x^2}$,所以是初等函数.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$; (2) $y=\ln(x+1)$;

(3) $\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$; (4) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<1\\ x+3, & x\geqslant 1\end{cases}$,求:$f(0)$,$f(1)$,$f(2)$,$f(x+2)$.

3. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=x+\sin x$; (2) $y=|\sin x|$;

(3) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$; (4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(5) $y=\sin x-\cos x+1$; (6) $y=x(x-1)(x+1)$.

4. 证明 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内单调增加. 能否说 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 内单调增加?

5. 求下列函数的反函数:

(1) $y=-\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,0]$; (2) $y=1+\ln(x+3)$;

(3) $y=e^{4x+5}$; (4) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

6. 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合而成:

(1) $y=(1+x)^{20}$; (2) $y=(\arcsin x^2)^2$;

(3) $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$; (4) $y=2^{\sin^2 x}$.