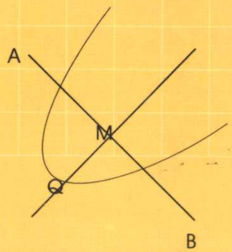
高等数学学习与考研指南



炮兵学院数学教研室，主编

电子科技大学出版社

高等数学学习与考研指南

炮兵学院数学教研室主编

编委：（以姓氏笔画为序）

王金山　王　俊　王雪琴　王碧文　汪志宏

邱国新　沈　浮　李　敏　陈之宁　周堂春

夏必腊　程　燕　潘保国　魏小燕

主审：廊坊导弹学院数学教研室（以姓氏笔画为序）

李文华　张同庆　张宝香　周洪珍　高延彬

图书在版编目（CIP 数据）

高等数学学习与考研指南/炮兵学院数学教研室主编.成都：电子科技大学出版社，2002.1

ISBN 7—81065—870—0

Ⅰ.高…　Ⅱ.炮…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—自学参考资料②高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 005796 号

高等数学学习与考研指南

炮兵学院数学教研室主编

出　　版：电子科技大学出版社（成都市建设北路二段四号，邮编：610054）

责任编辑：陈松明

发　　行：电子科技大学出版社

印　　刷：成都市青羊火炬印刷厂

开　　本：850×1168　1/32　印张　15.625　字数　350 千字

版　　次：2002 年 3 月第一版

印　　次：2002 年 3 月第一次印刷

书　　号：ISBN 7—81065—870—0/O·31

印　　数：1—3200 册

定　　价：22.80 元

前　言

本书是根据全国工科院校高等数学教学大纲和研究生入学考试高等数学考试要求结合军校的办学特征而编写的。该书的参考教材为同济大学数学教研室编写的《高等数学》(第四版)及《线性代数》第三版。

本书的主要内容按照高等数学及线性代数教材的自然顺序编写。其主要内容由内容提要形式给出题型按照:选择题、填空题、计算题、证明题分门别类逐个介绍;对整体内容编写了综合练习题并附有答案;提供了自测题。

本书侧重于通过高等数学各种典型题型的分析,介绍各种解题思路、方法和运算的技巧,帮助学员将高等数学中各个概念予以融会贯通,拓宽解题思路,提高分析解决问题的能力。

本书可供非数学专业的学员及参加硕士研究生考试的有关人员、特别是军校的学员复习高等数学、线性代数使用。

在编写此书过程中获得廊坊导弹学院的薛秦春教授及数学教研室的教员的指导,在此表示感谢。

对于本书错误恳请广大读者指正。

编　者

目 录

第一章　函数与极限

一、内容提要

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域，y 的取值范围叫做这个函数的值域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

2. 反函数的定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 若对于任意的 $y\in W$，有确定的 $x\in D$ 与之对应，使得 $y=f(x)$，则在 W 上定义了一个新的函数，称该函数为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=\varphi(y)$（或 $x=f^{-1}(y)$），$y=f(x)$ 称为直接函数.

3. 复合函数的定义

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2，值域为 W_2，并且 $W_2\subset D_1$，那么对任一 $x\in D_2$，通过函数 $u=\varphi(x)$ 有确定的 $u\in W_2\subset D_1$，因此对于这个 u 值，通过函数 $y=f(u)$ 有确定的 y 值与之对应，从而得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量.

4. 函数的性质

(1) 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果存在正数 M，使

得对于一切 $x\in X$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在数集 X 上有界.

(2) 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于任意 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是严格单调增加（或减少）的.

若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于 I 上任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（或减少）的.

(3) 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意的 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任意的 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

(4) 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的正数 T，使得对一切 $x\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 称为函数 $f(x)$ 的一个周期.

5. 基本初等函数、初等函数与分段函数

(1) 基本初等函数

幂函数：$y=x^{\alpha}$ $(\alpha\in R,\alpha\neq 0)$

指数函数：$y=a^{x}$ $(a>0,a\neq 1)$

对数函数：$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$

(2) 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并可用一个解析式表达的函数，叫做初等函数.

(3) 分段函数

在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同解析式来表示的函数，称为分段函数.

6. 函数的图形及其对称性质

已知函数 $y=f(x)$，定义域为 D，称平面点集：$C=\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图形. 奇函数的图形关于坐标原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称，直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

7. 数列极限的定义

(1) 已给数列 $\{x_n\}$ 及常数 a，若对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得对于 $n>N$ 的一切 x_n，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a$$

或

$$x_n\to a \quad (n\to\infty).$$

如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限，就称数列 $\{x_n\}$ 发散.

(2) 在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列(或子列).

8. 函数极限的定义

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一个去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0).$$

（2）设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果对于任意给定的正数 ε，总存在着正数 X，使得对于适合不等式 $|x|>X$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ (x\to\infty).$$

（3）设函数 $f(x)$ 在 $x<x_0$ 时有定义，A 为常数，若对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使适合不等式 $0<x_0-x<\delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A.$$

设函数 $f(x)$ 在 $x>x_0$ 时有定义，A 为常数，若对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使适合不等式 $0<x-x_0<\delta$ 的一切 x 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0+0)=A.$$

9. 函数左、右极限与极限的关系

（1）函数 $f(x)$ 在当 $x\to x_0$ 时，极限存在的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限存在且相等，即 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

（2）函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时，极限存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

10. 无穷小及无穷大的定义，无穷小与无穷大的关系

（1）若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（$x\to\infty$）时为无

穷小.

(2) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$,则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时为无穷大.

(3) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$,则有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{1}{f(x)}=0$;反之,若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=0$,并且 $g(x)\neq 0$,则有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{1}{g(x)}=\infty$.

11. 函数极限与无穷小之间的关系

在自变量的同一变化过程中,函数极限与无穷小之间有如下关系:

$\lim f(x)=A$ 充要条件为 $f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\alpha(x)=0$.

12. 无穷小的运算性质

(1) 有限个无穷小的和仍是无穷小.

(2) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

(3) 有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

(4) 常数与无穷小的乘积是无穷小.

13. 极限的性质

(1) 极限的唯一性

a. 数列 $\{x_n\}$ 不能收敛于两个不同的极限.

b. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$,则极限值 A 是唯一的.

(2) 收敛数列的有界性

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

(3) 收敛数列与其子数列间的关系

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,那么它的任一子数列也收敛,且极限也为 a.

(4) 函数极限的保号性定理

a. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在着点 x_0 的某一去心邻域，当 x 在该邻域内时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

b. 若在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

（5）有界性定理

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)=A$，则存在 $\delta>0$（或 $N>0$），当 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>N$）时，存在正数 $M>0$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

14. 等价无穷小的定义及代换定理

（1）等价无穷小的定义

设 α、β 是两个无穷小，若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 α 与 β 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

（2）无穷小的代换定理

设无穷小 α、α'、β、β' 满足 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$. 若 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$ 也存在，且有

$$\lim \frac{\beta}{\alpha}=\lim \frac{\beta'}{\alpha'}=\lim \frac{\beta}{\alpha'}=\lim \frac{\beta'}{\alpha}.$$

（3）当 $x\to 0$ 时，几个常用的等价无穷小

a. $x\sim \sin x\sim \tan x\sim \ln(1+x)\sim e^x-1$.

b. $1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2$.

c. $a^x-1\sim x\ln a \quad (a>0,\ a\neq 1)$

d. $(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x$.

15. 极限运算法则

（1）四则运算法则

在自变量的同一变化过程中，如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则：

a. $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm \lim g(x)=A\pm B$；

b. $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

c. $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$（此时要求 $B\neq 0$）.

（2）复合函数的极限运算法则

a. 设函数 $u=\varphi(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在且等于 a，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，但在点 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$，又 $\lim\limits_{u\to a}\varphi(x)=A$，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在，且

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(x)=A.$$

b. 如果对于函数 $u=\varphi(x)$，有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\varphi(x)=a$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 处连续，即 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ 时也有极限，并且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f[\varphi(x)]=f(a)$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\varphi(x)]$.

16. *极限存在准则和两个重要极限*

（1）夹逼准则

a. 设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 从第 N 项起满足不等式 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

b. 如果对于 x_0 的某个去心邻域内的一切 x（或对于 $|x|>X>0$ 的一切 x）有不等式 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 成立，并且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$，则有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$.

（2）单调有界准则

单调有界数列必有极限.

（3）两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\mathrm{e}$$

17. 海涅(Heine)定理

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$ 存在的充分必要条件是对任选数列$\{x_n\}$,当$n\to\infty$时,$x_n\to x_0$(或 $x_n\to\infty$),有

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=A.$$

18. 函数连续的定义

(1) 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果在点 x_0 处,当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时,对应的函数值的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$也趋于零,即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$在点 x_0 处连续.

(2) 若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内的每一点处都连续,则称$f(x)$是(a,b)内的连续函数,并称(a,b)为函数 $f(x)$的一个连续区间.

(3) 若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义,在开区间(a,b)内连续,且满足

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to b-0}f(x)=f(b),$$

则称 $f(x)$为闭区间$[a,b]$上的连续函数.

19. 间断点的定义

设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义(x_0 可以除外),$f(x)$在点 x_0 处只要满足下列条件之一时,则称点 x_0 为函数 $f(x)$的间断点.

(1) 函数 $f(x)$在点 x_0 处没有定义;

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,但是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

函数的左、右极限都存在的间断点,叫做第一类间断点. 特别,在间断点 x_0 处,函数极限存在,则称 x_0 点为 $f(x)$的可去间断点. 在第一类间断点中,非可去间断点,称为跳跃间断点. 如果在间断

点 x_0 处，函数 $f(x)$ 的左极限 $f(x_0-0)$ 与右极限 $f(x_0+0)$ 中，至少有一个不存在时，称 x_0 点为 $f(x)$ 的第二类间断点(包括无穷间断点).

20. 连续函数的性质

(1) 连续函数的和、差、积、商(当分母不为零时)仍是连续函数.

(2) 单调连续函数的反函数是连续的.

(3) 连续函数的复合函数是连续的.

(4) 基本初等函数在其定义域内是连续的；初等函数在其定义区间内是连续的.

21. 闭区间上连续函数的性质

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有下列性质：

(1) 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值和最小值.

(2) 函数 $f(x)$ 若满足 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

(3) 若 M、m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值. 当 μ 满足 $m<\mu<M$ 时，必存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=\mu$ 成立.

二、典型题分析

(一) 选择题

1. 函数 $y=(|x|-\sqrt{x^2})\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 的定义域是(　). (C)

(A) $(-\infty,+\infty)$　　(B) $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

(C) $[-1,1)$　　(D) $(-1,1)$

2. 设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，且它们可以构成复合函数 $f[f(x)]$，$g[f(x)]$，$f[g(x)]$，$g[g(x)]$，则其中为奇函数的是(　). (A)

(A) $f[f(x)]$ (B) $g[f(x)]$

(C) $f[g(x)]$ (D) $g[g(x)]$

3. 下列函数中，周期函数是（ ）. (C)

(A) $x+\cos x$ (B) $x\cos x$ (C) $\cos^2 x$ (D) $\cos x^2$

4. 若 $f(x-1)=x^2-x$，则 $f(x)=$（ ）. (A)

(A) x^2+x (B) $x(x-1)$

(C) $(x-1)^2-(x-1)$ (D) $(x+1)(x-2)$

5. 函数 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是（ ）. (B)

(A) $[-1,1]$ (B) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

(C) $[0,1]$ (D) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

6. 下列关于数列的论述中，正确的是（ ）. (D)

(A) 数列 $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\cdots$ 收敛于 0.

(B) 数列 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{2^3},\dfrac{1}{2^4},\cdots$ 收敛于 1.

(C) 数列 $2,\sqrt{2},\sqrt[3]{2},\cdots,\sqrt[n]{2}$ 收敛于 0.

(D) 数列 $1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n}$ 收敛于 1.

7. 数列有界是数列收敛的（ ）. (B)

(A) 充分条件，但不是必要条件

(B) 必要条件，但不是充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分条件也非必要条件

8. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$A$ 为有限数，则函数 $f(x)$ 必定在 x_0 的某个（ ）. (D)

(A) 邻域内有定义，并且 $f(x_0)=A$

(B) 邻域内有定义

(C) 去心邻域内有定义，并且在点 x_0 没有定义

(D) 去心邻域内有定义

9. 设 A 是常数，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 不成立的充要条件是（　）.（B）

(A) 对于任意给定的正数 ε，存在相应的正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A| \geqslant \varepsilon$.

(B) 存在某个正数 ε，对于任意给定的正数 δ，存在相应的 x_δ，有 $0<|x_\delta-x_0|<\delta$，及 $|f(x_\delta)-A| \geqslant \varepsilon$.

(C) 对于任意给定的正数 δ，存在相应的正数 ε，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A| \geqslant \varepsilon$.

(D) 对于任意给定的正数 ε，存在相应的正数 δ 及相应的 x_δ，有 $0<|x_\delta-x_0|<\delta$ 及 $|f(x_\delta)-A| \geqslant \varepsilon$.

10. 当 $x \to \infty$ 时，是无穷小量的有（　）.　　（B）

(A) $x\sin\dfrac{1}{x}$　(B) $\dfrac{1}{x}\sin x$　(C) x^2　(D) $e^{\frac{1}{x}}$

11. 下列命题中，错误的是（　）.　　（C）

(A) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$，是 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}=0$

(B) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}=0$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$

(C) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}=\infty$

(D) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=0$，并且存在某个正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x) \neq 0$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

12. 下列式子中，正确的是（　）.　　（B）

(A) $\lim\limits_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+4}-x)=\dfrac{1}{2}$

(B) $\lim\limits_{x \to \infty}(\sqrt[3]{1+x+3x^2+8x^3}-\sqrt[3]{1+x-3x^2+8x^3})=\dfrac{1}{2}$

(C) $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{2x}=\dfrac{1}{2}$

(D) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+4x^2}-\sqrt{1-x+4x^2})=\dfrac{1}{2}$

13. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}-ax-b\right)=0$，则常数 a 及 b 必定是（ ）. (C)

(A) $a=1,b=2$　　(B) $a=-1,b=2$

(C) $a=1,b=-2$　　(D) $a=-1,b=-2$

14. 下列极限中，有错误的是（ ）. (B)

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\tan x}{\tan x}=1$　　(D) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2}=1$

15. 下列极限中，正确的是（ ）. (D)

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

(C) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$　(D) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

16. 当 $x\to 0$ 时，与 x^2 同阶无穷小的是（ ）. (B)

(A) $x^2+\sin x$　　(B) $1-\cos x$

(C) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$　(D) $\tan x-\sin x$

17. 设

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{当 } x<a \text{ 时}\\ a, & \text{当 } x=a \text{ 时}\\ x^3, & \text{当 } x>a \text{ 时}\end{cases}$$

如果函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，则常数 $a=$（ ）. (C)

(A) 0　(B) 1　(C) -1　(D) 2

18. 点 $x=0$ 是函数