九章丛书

高校经典教材同步辅导丛书

配套人大版 · 赵树嫄主编

教你用更多的自信面对未来！

经济应用数学基础（一）

微积分（第三版）同步辅导及习题全解

主编 冯君淑

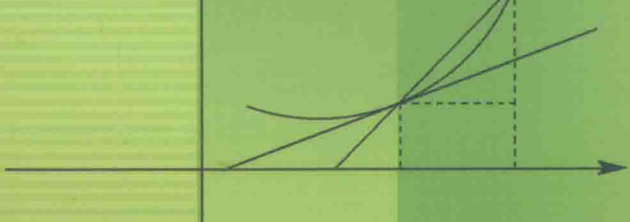
新版

习题超全解

名师一线经验**大汇集**，解题步骤**超详细**，方法技巧**最实用**

一书两用

同步辅导+考研复习



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

微积分（第三版）
同步辅导及习题全解

主　编　冯君淑

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是与中国人民大学出版社、赵树嫄主编的《经济应用数学基础（一）微积分》（第三版）一书配套的同步辅导及习题全解辅导书。

本书共有九章，分别介绍函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数、微分方程与差分方程简介。本书按教材内容安排全书结构，各章均包括知识结构、学习指南、知识点归纳、经典例题解析、考研题精解、课后习题全解六部分内容。全书按教材内容，针对各章节习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习《经济应用数学基础（一）微积分》（第三版）课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课命题作为参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

微积分（第三版）同步辅导及习题全解 / 冯君淑主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2015.6
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-3354-7

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①冯… Ⅲ. ①微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第156000号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：李　炎　加工编辑：张　蕾　封面设计：李　佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 **微积分（第三版）同步辅导及习题全解**
作　　者	主　编　冯君淑
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　　格	148mm×210mm　32 开本　13.875 印张　476 千字
版　　次	2015 年 7 月第 1 版　2015 年 7 月第 1 次印刷
印　　数	0001—6000 册
定　　价	22.00 元

前言

赵树嫄主编的《经济应用数学基础(一)微积分》(第三版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《微积分同步辅导及习题全解》(第三版)。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到《经济应用数学基础(一) 微积分》(第三版)这门课程的特点,我们在内容上作了以下安排:

1. 知识结构。以图的形式概括各章知识点及其之间的联系,使读者对全章内容有一个清晰的脉络。

2. 学习指南。简单扼要地说明本章的学习目标,明确学习任务。

3. 知识点归纳。对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章节主要定理及重要公式,使读者在各章节学习过程中目标明确,有的放矢。

4. 典型例题解析。该部分选取了一些具有启发性或综合性较强的经典例题,对所给例题先进行分析,再给出详细解答,意在抛砖引玉。

5. 考研真题精解。精选历年研究生入学考试中具有代表性的试题进行了详细的解答,以开拓广大同学的解题思路,使其能更好地掌握该课程的基本内容和解题方法。

6. 课后习题全解。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给了详细的解答。

由于时间较仓促,编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者
2015 年 06 月

目 录

第一章 函数

知识结构

- 函数
  - 集合的概念、表示及运算 → 并、交、差、补集，集合的运算律
  - 实数、绝对值及其性质 → 区间、领域的概念
  - 函数的概念 → 定义域、值域、对应关系、隐函数
  - 分段函数的概念
  - 函数关系的建立 → 建立实际问题的函数关系
  - 函数性质的概念 → 奇偶性、周期性、单调性、有界性
  - 反函数、复合函数
  - 基本初等函数、初等函数 → 七个基本初等函数的性质及其图像
  - 图像的简单组合与交换 → 函数图形叠加、翻转、放缩、平移

学习指南

1. 理解实数绝对值的概念,掌握解简单绝对值的方法；

2. 理解函数的定义,会求函数的定义域与值域；

3. 掌握函数的基本性质,包括单调性、奇偶性、周期性、有界性等；

4. 深刻理解复合函数和反函数的概念,会求解复合函数的定义域,熟练掌握求解复合函数和求解反函数的基本方法；

5. 掌握基本初等函数的定义、定义域、基本性质和图像特征,理解初等函数的概念,会判别非初等函数；

6. 会建立应用问题的函数关系式,掌握经济学中常用的成本函数、收益函数、利润函数等．

第一节 集合

知识点归纳

1. 集合的概念

(1) 集合是具有某种属性的事物的全体,构成集合的事物或对象,称为集合的元素.元素与集合的关系为:$a \in A$ 或者 $a \notin A$.

特别提醒 ① 有限集合由有限个元素构成,无限集合由无限多个元素构成. ② 集合具有确定性的特征,即某个元素是否属于某个集合是确定的.

(2)①$A \subset A$;$\varnothing \subset A$;

若 $A \subset B, B \subset C$,则 $A \subset C$;

②$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$;

③$A \cup \varnothing = A, A \cup U = U, A \cup A = A$;

④$A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$;

⑤$A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap U = A, A \cap A = A$.

(3) 补集的性质:$A \cup \overline{A} = U, A \cap \overline{A} = \varnothing$.

2. 集合的表示与运算

表示法	列举法	按任意顺序列出集合的所有元素,并用花括号{}括起来
	描述法	设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则,A 为满足 $P(a)$ 的一切 a 构成的集合,则记为 $A = \{a \mid P(a)\}$
全集、空集与子集	全集	由所研究的一切事物构成的集合称为全集,记为 U
	空集	不包含任何元素的集合称为空集,记为 $\varnothing$
	子集	如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,即"如果 $a \in A$,则 $a \in B$",则称 A 为 B 的子集,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A
运算	并集	$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$
	交集	$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$
	差集	$A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$
	补集	$A' = \{x \mid x \in U$ 且 $x \notin A\}$
	笛卡尔乘积	设有集合 A 和 B. $x \in A, y \in B$,所有二元有序数组 (x,y) 构成的集合,称为集合 A 与 B 的笛卡尔乘积,记为 $A \times B$,即 $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$

3. 集合的运算律

交换律	$A \cup B = B \cup A$;$A \cap B = B \cap A$
结合律	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
分配律	$(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup (B \cap C)$;$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
摩根律	$(A \cup B)' = A' \cap B'$;$(A \cap B)' = A' \cup B'$

典型例题解析

题型 1:考察集合的表示

例 1 用描述法表示下列集合:

(1) 由方程 $x^2 + 5x - 6 = 0$ 的根所组成的集合.

(2) 由非负数全体组成的集合.

解 (1)$A = \{x \mid x^2 + 5x - 6 = 0\}$.

(2)$B = \{x \mid x \geqslant 0\}$.

特别提醒 用描述法表示集合是指把集合中元素所具有的某个共同属性描述出来,用$\{x \mid x$ 具有的共同属性$\}$ 表示.

例 2 用列举法表示下列集合:

(1) 由 1,3,5,6,7,9,11 组成的集合.

(2) 由方程 $x^2 + 6x - 27 = 0$ 的根所组成的集合.

解 (1)$A = \{1,3,5,7,9,11\}$.

(2)$B = \{-9,3\}$.

特别提醒 用列举法表示集合时,必须列出集合中的所有元素,不能遗漏和重复.

题型 2:考察集合的运算

例 1 (1) 设集合 $A = \{1,2,3,4\}$,$B = \{2,4,7,9\}$,求 $A \cup B$,$A \cap B$,$A - B$.

(2) 设集合 $A = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$,$B = \{x \mid x \geqslant 0\}$,$C = \{x \mid -1 < x < 3\}$,求 $A \cup (B \cap C)$.

(3) 设 $A = \{-1,0,1,2,3,4\}$,$B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$,$C = \{1,3\}$,求 B',C',$B' \cup C'$,$B' \cap C'$,$(B \cup C)' \cap B$.

解 (1)$A \cup B = \{1,2,3,4,7,9\}$,$A \cap B = \{2,4\}$,$A - B = \{1,3\}$.

(2)$\because B \cap C = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 3\}$

$\therefore A \cup (B \cap C) = \{-1 \leqslant x \leqslant 3\}$.

(3) $\because B=\{2,3\}$

$\therefore B'=A-B=\{-1,0,1,4\}$

$C'=A-C=\{-1,0,2,4\}$

$B'\cup C'=\{-1,0,1,2,4\}$

$B'\cap C'=\{-1,0,4\}$

又 $B\cup C=\{1,2,3\}$

$\therefore (B\cup C)'=\{-1,0,4\}$，$(B\cup C)'\cap B=\varnothing$.

特别提醒　集合的三种基本运算"并、交、补"是基础题型，必须掌握，按相关定义计算即可.

例 2

(1) 设 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{2,5\}$，求 $A\times B$，$B\times B$.

(2) 设 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$，求 $A\times B$.

解

(1) $A\times B=\{(1,2),(1,5),(3,2),(3,5),(5,2),(5,5),(7,2),(7,5)\}$.

$B\times B=\{2,5\}\times\{2,5\}=\{(2,2),(2,5),(5,2),(5,5)\}$.

(2) $A\times B=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，它表示平面直角坐标系中如图 1-1 所示的矩形区域.

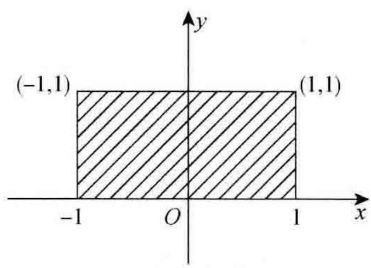


图 1-1

特别提醒　一般的，$A\times B$ 与 $B\times A$ 是不相同的两个集合，要注意集合笛卡尔乘积中集合的先后次序.

例 3 已知集合 $A=\{x\mid \log_2 x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid -\infty<x<a\}$，若 $A\subset B$，且实数 c 的取值范围是$(x,+\infty)$，求 c 的最小值.

解　解不等式 $\log_2 x\leqslant 2$，得 $0<x\leqslant 4$，即 $A=\{x\mid 0<x\leqslant 4\}$，由 $A\subset B$，知 $a>4$，故 $c\geqslant 4$，即 c 的最小值为 4.

第二节 实数集

知识点归纳

1. 绝对值

一个实数 x 的绝对值，记为 $|x|$，定义为 $|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0.\end{cases}$

绝对值及其运算的性质：

(1) $|x|\geqslant 0$；$|-x|=|x|=\sqrt{x^2}$；$-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

(2) $|xy|=|x|\cdot|y|$；$\left|\dfrac{x}{y}\right|=\left|\dfrac{x}{y}\right|(y\neq 0)$.

(3) $|x|\leqslant y\Leftrightarrow -y\leqslant x\leqslant y(y\geqslant 0)$；$|x|\geqslant y\Leftrightarrow x\geqslant y$ 或 $x\leqslant -y(y\geqslant 0)$.

(4) $|x|-|y|\leqslant |x+y|\leqslant |x|+|y|$.

(5) $|x|-|y|\leqslant |x-y|\leqslant |x|+|y|$.

(6) $|x-y|\geqslant ||x|-|y||$.

2. 区间

(1) 开区间：$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$.

(2) 闭区间：$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$.

(3) 半开区间：$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$,

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$.

(4) 无限区间：$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$,

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,

$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$.

3. 邻域

x_0 的 δ 邻域：$U(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$.

x_0 的空心 δ 邻域：$U(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$.

特别提醒 开区间、半开区间为有限区间，区间的长度为 $b-a$.

4. 均值不等式

对任意实数 a,b，恒有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

典型例题解析

题型 1：求解含绝对值的不等式

例 1 解不等式 $|2x-1|-|x-2|<0$.

解　原不等式等价于不等式组

$$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ 2x-1-(x-2)<0, \end{cases} \quad ①$$

或

$$\begin{cases} \frac{1}{2}<x<2, \\ 2x-1+x-2<0, \end{cases} \quad ②$$

或

$$\begin{cases} x \leqslant \frac{1}{2}, \\ -(2x-1)+x-2<0. \end{cases} \quad ③$$

不等式组 ① 无解，不等式组 ② 的解集为 $\frac{1}{2}<x<1$，不等式组 ③ 的解集为 $-1<x\leqslant\frac{1}{2}$.

综上，$-1<x<1$，原不等式的解集为 $\{x \mid -1<x<1\}$.

例 2 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

(1) $|x|\leqslant 2$；(2) $|x-5|\leqslant 1$；(3) $|x-x_0|<\varepsilon$（$\varepsilon>0$，x_0 为常数）；

(4) $|x|>1$；(5) $|x+2|\geqslant 3$；(6) $|x|>|x-2|$.

解　(1) 即 $-2\leqslant x\leqslant 2$，区间为 $[-2,2]$.

(2) 由 $-1\leqslant x-5\leqslant 1$ 知 $4\leqslant x\leqslant 6$，区间为 $[4,6]$.

(3) 由 $-\varepsilon<x-x_0<\varepsilon$ 知 $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$，区间为 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$.

(4) 即 $x>1$ 或 $x<-1$，区间为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(5) 由 $x+2\geqslant 3$ 或 $x+2\leqslant -3$ 知 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -5$，故区间为 $(-\infty,-5)\cup[1,+\infty]$.

(6) 由 $|x|>|x-2|$ 知 $x^2>(x-2)^2$，即 $4x-4>0$，$x>1$，故区间为 $(1,+\infty)$.

特别提醒　求解含绝对值的不等式关键是要正确去掉绝对值符号.

题型 2：求解含绝对值的不等式中的参数值

例 1 设 a 为实数，函数 $f(x)=2x^2+(x-a)|x-a|$，若 $f(0)\geqslant 1$，求 a 的取值范围.

解　因为 $f(0)\geqslant 1$，所以 $-a|a|\geqslant 1$，即 $\begin{cases} a<0, \\ a^2\geqslant 1, \end{cases}$ 故 $a\leqslant -1$.

例 2 若对任意 $x>0$，$\frac{x}{x^2+3x+1}\leqslant a$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解　对任意 $x>0$，$\frac{x}{x^2+3x+1}\leqslant a$，即对任意 $x>0$，恒有 $\frac{1}{x+\frac{1}{x}+3}\leqslant a$.

又由均值不等式 $\frac{1}{x+\frac{1}{x}+3}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+3}=\frac{1}{5}$，所以 a 的取值范围为 $\frac{1}{5}\leqslant a<+\infty$.

第三节 函数

知识点归纳

1. 函数的定义

名称	定义
函数	若 D 是一个非空实数集合,设有一个对应规则 f,使每一个 $x \in D$,都有一确定的实数 y 与之对应,则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系,或称变量 y 是变量 x 的函数,记作 $y = f(x), x \in D$. 其中 x 称自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,记作 D_f,即 $D_f = D$,全体函数值的集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域,记作 Z 或 Z_f.

特别提醒 (1) f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则,而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值;

(2) 表示函数的记号可以任意选取;

(3) 构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f;

(4) 当且仅当两个函数的定义域及对应法则都相同时,两个函数相等.

2. 显函数和隐函数

如果函数和对应规则是因变量用自变量的一个数学表达式表示出来的,这样的函数称为显函数;如果函数的对应规则是用一个方程 $F(x,y) = 0$ 来表示的,这样的函数称为隐函数.

特别提醒 (1) 显然,对于函数来说,最重要的是函数的定义域和对应法则,当它们一经确定,值域也就确定,习惯上我们把定义域、对应法则、值域称为函数的三要素.

(2) 求定义域的原则:如果已经用解析式表示,定义域就是使函数有意义的、实数范围内的点的集合,我们称之为自然定义域,其自变量 x 必须满足能够运算的条件,如分式的分母不能为零,对数的真数要大于零,平方根下非负等;如果是实际问题,定义域就是使变量有实际意义的点的集合.

典型例题解析

——— 题型 1:判断两个函数是否相同 ———

例 下列各对函数中,相同的一对函数是( ).

(A) $y=\frac{x^2}{x}$ 与 $y=x^2$　　(B) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$

(C) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$　　(D) $y=x^2$ 与 $u=v^2$

解　∵ 选项(A) 中两个函数的定义域 $D_1=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $D_2=(-\infty,+\infty)$ 不相同;选项(B) 中的 $D_1=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\neq D=(0,+\infty)$;而选项(C) 中的两个函数定义域虽相同,但对应法则不相同,其中函数 $y=x$,当 $x>0$ 时,$y>0$;当 $x<0$ 时,$y<0$. 而函数 $y=\sqrt{x^2}$,当 $x>0$ 时 $y>0$;当 $x<0$ 时 $y>0$.

对于选项(D) 中的两个函数,只是变量的表示字母不同,但定义域和对应法则完全相同.

∴ 仅选项(D) 是正确的.

特别提醒　区分两个函数是否相同,关键是研究确定函数关系的两个要素定义域和对应法则,而与变量用什么字母表示无关.

题型 2:求函数定义域

例 1 求函数 $y=\tan(\sqrt{x}-2)$ 的定义域.

解　定义域应满足 $\sqrt{x}-2\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$($k$ 为整数),即定义域为

$$D=\left\{x\mid x\neq\left(k\pi+\frac{\pi}{2}+2\right)^2 \text{ 且 } x\geqslant 0, k \text{ 为整数}\right\}.$$

特别提醒　求初等函数的定义域有下列原则:① 分母不能为零. ② 偶次根式被开方数大于等于零. ③ 对数的真数大于零. ④$\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$. ⑤$\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. ⑥$\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

例 2 求函数 $y=\frac{1}{x(1-x^2)}+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解　x 需满足 $\begin{cases}x(1-x^2)\neq 0,\\1-x^2\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\neq 0,\\1-x^2\geqslant 0,\end{cases}$ 也即 $\begin{cases}x\neq 0,\\-1<x<1.\end{cases}$ 故定义域为 $D=\{x\mid -1<x<1, \text{且 } x\neq 0\}$.

题型 3:综合题

例 记函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A,函数 $g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)]$ $(a<1)$ 的定义域为 B.

(1) 求 A;(2) 若 $B\subset A$,求实数 a 的取值范围.

解　(1) 要使函数 $f(x)$ 有定义,需满足 $2-\frac{x+3}{x+1}\geqslant 0$,即 $\frac{x-1}{x+1}\geqslant 0$,也即 $x<-$

1 或 $x \geqslant 1$,故 $A=(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$.

(2) 要使函数 $g(x)$ 有定义,需满足 $(x-a-1)(2a-x)>0$,因 $a<1$,故 $a+1>2a$,所以上面不等式的解集为 $2a<x<a+1$,故 $B=(2a,a+1)$.

因 $B\subset A$,故 $2a\geqslant 1$ 或 $a+1\leqslant -1$,即 $a\leqslant \frac{1}{2}$ 或 $a\leqslant -2$. 又因为 $a<1$,所以 $\frac{1}{2}\leqslant a<1$ 或 $a\leqslant -2$.

第四节　分段函数

知识点归纳

1. 概念

有些函数,对于定义域内自变量不同的值,其对应规则要用两个或者两个以上的式子表示,这类函数称为分段函数.

2. 几个常用的分段函数

(1) 绝对值函数: $y=|x|=\begin{cases} x, x\geqslant 0, \\ -x, x<0. \end{cases}$

(2) 符号函数: $y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases} -1, x<0, \\ 0, x=0, \\ 1, x>0. \end{cases}$

(3) 取整函数: $y=[x]$.

(4) 狄利克莱函数: $y=\begin{cases} 1, x\in \mathbf{Q}, \\ 0, x\in \overline{\mathbf{Q}}, \end{cases}$ 其中 $\mathbf{Q}$,$\overline{\mathbf{Q}}$ 分别表示有理数和无理数.

典型例题解析

题型 1:求分段函数的定义域

例 求函数 $y=\frac{1}{\ln|x|}$ 的定义域.

解　绝对值函数可以化为分段函数

$$y=\frac{1}{\ln|x|}=\begin{cases} \frac{1}{\ln x}, x>0 \text{ 且 } x\neq 1 \\ \frac{1}{\ln(-x)}, x<0 \text{ 且 } x\neq -1 \end{cases}$$

其中第一段的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$,第二段的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$,再取各段定义域的并集 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(1,+\infty)$,即定义域为 $\{x|-$

$\infty < x < +\infty$ 且 $x \neq 0, x \neq \pm 1\}$.

特别提醒 分段函数的定义域就是求出各段上的定义域并将每段表达式的定义域并在一起.

题型 2:对分段函数的求值

例 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x, -1 < x < 0, \\ 2, 0 \leqslant x < 1, \\ x+1, 1 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$ 求 $f(3), f(2), f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 及 $f(x+1)$.

解 $f(3) = (x+1)\big|_{x=3} = 4$

$f(2) = (x+1)\big|_{x=2} = 3$

$f(0) = 2\big|_{x=0} = 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\big|_{x=\frac{1}{2}} = 2$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^x\big|_{x=-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$f(x+1) = \begin{cases} 2^{x+1}, -1 < x+1 < 0, \\ 2, 0 \leqslant x+1 < 1, \\ x+1+1, 1 \leqslant x+1 \leqslant 3, \end{cases}$$

即 $f(x+1) = \begin{cases} 2^{x+1}, -2 < x < -1, \\ 2, 1 \leqslant x < 0, \\ x+2, 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

特别提醒 由于分段函数在各段上的对应法则是不同的,所以求分段函数在某点的函数值时,要先找到该点所在区间的对应函数表达式,再代入求值.

题型 3:分段函数表达式

例 1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1, |x| \leqslant 1, \\ 0, |x| > 1, \end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解 由定义,$f(x) = \begin{cases} 1, |x| \leqslant 1, \\ 0, |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] = \begin{cases} 1, |f(x)| = 1, \\ 1 \,|f(x)| = 0, \end{cases}$ 故 $f[f(x)] = 1$.

例 2 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \begin{cases} \log_2(1-x), x \leqslant 0, \\ f(x-1) - f(x-2), x > 0, \end{cases}$ 求 $f(2009)$.

解 由已知得 $f(-1) = \log_2 2 = 1, f(0) = 0, f(1) = f(0) - f(-1) = -1$,