



“十二五”普通高等教育规划教材

■ 北京建筑大学数学系 编著

简明 高等数学

JIANMING GAODENG SHUXUE



国防工业出版社

National Defense Industry Press

简明高等数学

北京建筑大学数学系 编著

国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书是在保证高等数学理论完整的基础上,本着必须、够用的原则进行编写,注重学生数学素质和能力的培养.内容包括:函数与极限、导数与微分、不定积分、定积分及应用、无穷级数、多元函数的微积分、微分方程等.每章后附内容小结和测试题,书末还附有习题答案.

本书适合作为非数学专业的本科教材,也可作为本科院校经济类、建筑类、农学类、医学类等专业学生和教师的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

简明高等数学/北京建筑大学数学系编著. —北京:国防工业出版社,2015.9

ISBN 978-7-118-10303-8

I. ①简... II. ①北... III. ①高等数学 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 168532 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

三河市鼎鑫印务有限公司

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 14¼ 字数 325 千字

2015 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—3000 册 定价 32.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010)88540777

发行邮购: (010)88540776

发行传真: (010)88540755

发行业务: (010)88540717

前 言

本书是编者结合多年的实践教学经验并汲取了同类教材的优点编写而成的. 内容取材于实际教学中的教改成果, 保证高等数学科学性的基础上, 注重思想方法和应用, 以必须和够用为原则, 注重学生数学素质和应用能力的培养. 另外, 本书在每章后附有详细的内容小结和规范的测试题, 书末还附有习题答案. 本书通俗易懂, 方便学生自学.

本书主要包括: 函数与极限、导数与微分、不定积分、定积分及应用、无穷级数、多元函数的微积分、微分方程等.

本书编者都是北京建筑大学的一线教师, 具体分工如下: 第一章、第二章由吴尚文编写; 第三章、第四章由侍爱玲编写; 第五章、第六章由张鸿鹰编写; 第七章由牟唯嫣编写. 全书由张鸿鹰统稿.

本书已于 2013 年编写完成, 并在北京建筑大学作为内部参考教材试用, 编者根据学生所提建议进行了多次修改.

在本书的编写、出版过程中, 得到了北京建筑大学理学院领导、数学系白羽主任、教务处梁凯老师的大力支持. 数学系老师及试用班级的同学都提出了许多宝贵的意见, 此处一并表示衷心的感谢!

本书得以出版, 诚挚感谢国防工业出版社的大力支持!

受编者水平所限, 书中不足之处在所难免, 恳请读者、同行和专家批评指正.

编 者

2015 年 9 月

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
一、区间和邻域	1
二、函数	2
三、反函数、复合函数及初等函数	5
四、典型例题	6
习题 1.1	7
第二节 极限的概念及性质	8
一、数列的极限	8
二、函数的极限	9
三、无穷小与无穷大	11
四、极限的性质	12
习题 1.2	12
第三节 极限的运算	13
一、极限的运算法则	13
二、两个重要极限	15
三、无穷小等价定理	17
习题 1.3	18
第四节 函数的连续性	19
一、函数连续性的概念	19
二、连续函数的运算法则	21
三、闭区间上连续函数的性质	22
习题 1.4	23
本章小结	24
第一章 测试题	25
第二章 导数与微分	28
第一节 导数	28
一、导数的概念	28
二、导数的运算	33
习题 2.1	39
第二节 微分	40
一、微分的概念	40

二、微分的运算	42
三、微分在近似计算中的应用	43
习题 2.2	44
第三节 导数的应用(一)	44
一、微分中值定理	44
二、洛必达法则	45
三、函数的单调性与凹凸性	48
四、函数的极值与最值	51
习题 2.3	54
第四节 导数的应用(二)	55
一、边际与边际分析	55
二、弹性与弹性分析	57
习题 2.4	59
本章小结	60
第二章 测试题	61
第三章 不定积分	64
第一节 不定积分的概念和性质	64
一、原函数与不定积分	64
二、不定积分的性质	66
三、基本积分表	67
习题 3.1	69
第二节 换元积分法	69
一、第一类换元法	69
二、第二类换元积分法	72
习题 3.2	74
第三节 分部积分法	75
习题 3.3	77
本章小结	77
第三章 测试题	79
第四章 定积分及其应用	82
第一节 定积分的概念	82
一、定积分问题的两个引例	82
二、定积分的定义	84
三、定积分的性质	86
习题 4.1	88
第二节 牛顿—莱布尼兹公式	88
一、积分上限函数	89
二、牛顿—莱布尼兹公式	90

习题 4.2	91
第三节 定积分的积分法	92
一、定积分的换元积分法	92
二、定积分的分部积分法	94
习题 4.3	95
第四节 定积分的应用	95
一、微元法	95
二、平面图形的面积	96
三、旋转体的体积	98
四、经济应用问题	100
习题 4.4	101
本章小结	101
第四章 测试题	102
第五章 无穷级数	105
第一节 常数项级数的概念	105
习题 5.1	108
第二节 无穷级数的基本性质	108
习题 5.2	112
第三节 正项级数	113
一、正项级数收敛的基本定理	113
二、正项级数的比较判别法	114
三、比较判别法的极限形式	116
四、达朗贝尔比值判别法	117
习题 5.3	118
第四节 任意项级数	119
一、交错级数的敛散性的判定	119
二、任意项级数的绝对收敛与条件收敛	121
习题 5.4	123
第五节 幂级数	123
一、函数项级数的概念	123
二、幂级数的收敛半径与收敛域	124
三、幂级数的性质	130
习题 5.5	132
第六节 函数展开成幂级数	132
一、 $f(x)$ 的麦克劳林级数	133
二、 $f(x)$ 展开成 $x - x_0$ 的幂级数	137

习题 5.6	138
本章小结	138
第五章 测试题	143
第六章 多元函数的微积分	147
第一节 空间解析几何简介	147
一、空间直角坐标系的建立	147
二、空间点的坐标	148
三、空间任意两点之间的距离	148
四、空间曲面与方程	149
五、平面区域的概念	152
习题 6.1	152
第二节 多元函数的概念	153
一、多元函数的概念	153
二、二元函数的几何意义	154
三、二元函数的极限	155
四、二元函数的连续性	156
习题 6.2	157
第三节 偏导数	157
一、偏导数的概念	157
二、偏导数的几何意义	159
三、偏导数与连续的关系	159
四、高阶偏导数	160
习题 6.3	161
第四节 全微分	161
一、全微分的定义	161
二、全微分与偏导数的关系	163
习题 6.4	164
第五节 复合函数与隐函数的微分法	164
一、复合函数的微分法	164
二、隐函数的微分法	168
习题 6.5	170
第六节 二元函数的极值	170
一、二元函数的极值与最值	170
二、条件极值、拉格朗日乘数法	173
三、极值的应用	174
习题 6.6	176

第七节 二重积分	176
一、二重积分概念的引入——曲顶柱体的体积	176
二、二重积分的定义	177
三、二重积分的性质	178
四、二重积分的计算	179
习题 6.7	188
本章小结	189
第六章 测试题	193
第七章 微分方程	197
第一节 微分方程的基本概念	197
第二节 一阶微分方程	198
一、可分离变量的微分方程	198
二、齐次方程	199
三、一阶线性微分方程	201
四、伯努利方程	202
习题 7.2	203
第三节 微分方程在经济学中的应用	203
一、马尔萨斯人口增长模型	203
二、价格调整模型	204
三、多马经济增长模型	204
习题 7.3	205
本章小结	205
第七章 测试题	206
参考答案	208

第一章 函数与极限

高等数学是研究变量变化规律的科学. 函数是高等数学最基本的概念, 它描述了变量之间的某种依赖关系; 极限就是描述自变量变化过程中的函数变化趋势的重要概念, 它是高等数学的基本研究方法, 后面介绍的导数、定积分、级数等概念, 都要由它来定义. 本章复习函数概念及其性质, 重点讨论极限和连续的概念、运算及其性质.

第一节 函 数

一、区间和邻域

1. 区间

可以取不同数值的量称为变量, 通常用字母 x, y, s, t, u, v 等表示, 它的取值范围称为变域, 即变量取值的集合. 如不特殊声明, 今后讨论的变域都是由实数组成的集合. 最常见的变域是区间, 区间用数集的记号表示如下:

(1) 开区间: $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$

(2) 闭区间: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$

(3) 半开区间: $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\};$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}.$$

(4) 无穷区间: $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\};$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\};$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\};$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}.$$

其中(1)~(3)称为有限区间, 在数轴上表示从点 a 到点 b 的有限线段, a, b 为区间的端点(a 称为左端点, b 称为右端点). 引进符号“ ∞ ”读作“无穷大”, 符号“ $-\infty$ ”读作“负无穷大”, 符号“ $+\infty$ ”读作“正无穷大”, 则称(4)中五种形式区间为无穷区间, 在数轴上表示射线或整个数轴, 在不需要辨别所讨论的区间是否包含端点及有限区间还是无限区间的情况下, 简称为“区间”, 用 I 来表示.

2. 邻域

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域, 记为 $U(a)$.

设 δ 是任一正数, 则开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 就是点 a 的一个邻域, 这个邻域称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}.$$

点 a 称为这邻域的中心, δ 称为这邻域的半径(图 1-1).

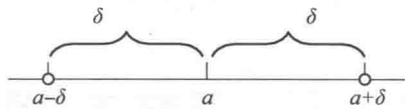


图 1-1

由于 $a - \delta < x < a + \delta$ 相当于 $|x - a| < \delta$, 因此

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

在 a 的邻域 $(a - \delta, a + \delta)$ 内去掉 a , 即数集 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为 a 的去心邻域, 记为 $U(a, \delta)$.

注: 邻域本质上就是一个特殊的开区间.

二、函数

1. 函数的概念

函数反映了变量之间的依赖关系, 下面考察三个例子:

例 1 圆的面积 s 与半径 r 之间的关系由 $s = \pi r^2$ 表示. 这里 s 与 r 都是变量, 根据 $s = \pi r^2$ 知, 任意给一个半径 r , 就有一个确定的面积与之对应.

例 2 气象台用自动记录仪把一天的气温变化情况自动描绘在记录纸上, 得到如图 1-2 所示的曲线. 根据这条曲线可以看出一天内任意一个时刻, 就有一个确定的温度与之对应.

例 3 厦门港是中国东南沿海重要港口, 表 1-1 给出厦门港 1992—2000 年集装箱吞吐量, 从表中可以看出, 任意给定 1992—2000 年中一个年份就有一个确定的吞吐量与之对应.

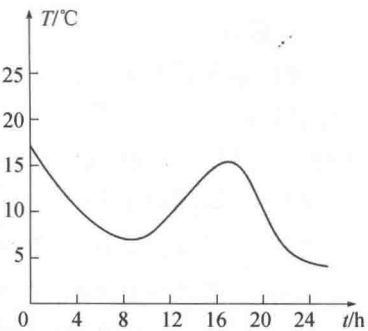


图 1-2

表 1-1 [单位: TEU(万标箱)]

年份	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
吞吐量	10.7	15.5	22.5	30.9	40.0	54.6	67.0	84.9	108.0

以上三例的实际意义虽不相同, 但却具有共同之处: 每个例子所描述的变化过程都有两个变量, 当其中一个变量在一定范围内取一定的值时, 按照某个对应法则(如解析式、曲线、表格), 另外一个变量有唯一值与之对应, 这种变量之间的对应关系抽象到数学中就得到了函数的概念.

定义 1 设 x, y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果有一个对应法则 f , 使每一个数值 $x \in D$, 按照对应法则 f , 变量 y 都有唯一确定的数值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记为

$$y = f(x), x \in D.$$

其中, x 称为自变量, y 称为因变量, 集合 D 称为定义域. 每一数值 $x \in D$ 取遍后得到对应函数值的集合称为函数的值域, 记为 z_f .

注: (1) 定义域和对应法则是函数的两个要素, 如果两个函数具有相同的定义域和对应法则, 则它们是相同的函数.

(2) 定义 1 中所定义的这种函数实质上是单值函数, 以后没特别说明, 本书中的函数都认为是单值函数.

(3) 由三个引例中不难看到, 常见的函数表示法有三种: 公式法、图像法、表格法.

2. 常用函数举例

例 4 五类基本初等函数

(1) 幂函数 $y = x^u$ (u 为任意实数);

(2) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$);

(3) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$);

(4) 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$;

(5) 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

前四种是大家比较熟悉的, 下面给出 (5) 中函数定义域和值域:

$$y = \arcsin x \quad \text{定义域 } x \in [-1, 1] \quad \text{值域 } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = \arccos x \quad \text{定义域 } x \in [-1, 1] \quad \text{值域 } y \in [0, \pi]$$

$$y = \arctan x \quad \text{定义域 } x \in \mathbf{R} \quad \text{值域 } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \operatorname{arccot} x \quad \text{定义域 } x \in \mathbf{R} \quad \text{值域 } y \in (0, \pi)$$

例 5 绝对值函数

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

其中, $x \in \mathbf{R}, y \in [0, +\infty)$.

例 6 符号函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

其中, $x \in \mathbf{R}, y = \{-1, 0, 1\}$.

3. 函数的性质

1) 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在正常数 M , 使 $x \in I$, 都有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界, 否则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

例如 $y = \sin x$, 对于一切 $x \in (-\infty, \infty)$ 都有 $M = 1$, 使

$$|\sin x| \leq 1,$$

所以函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

又如函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内找不到这样一个 M , 使

$$\left| \frac{1}{x} \right| \leq M,$$

所以函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界.

2) 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

(1) 若 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调增加;

(2) 若 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调减少.

例如, 函数 $y = x^2$, 在区间 $[0, +\infty)$ 内单调增加; 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少; 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不具有单调性.

注: 单调增加 (或减少) 的函数, 其图形是随自变量的增加而上升 (或下降) 的曲线 (图 1-3 中的 (a) 和 (b)).

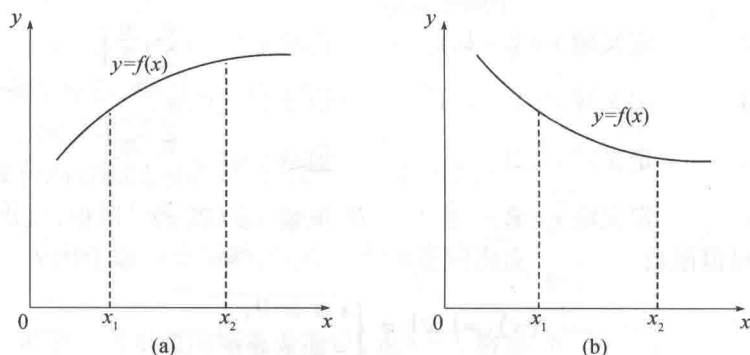


图 1-3

3) 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任意 $x \in D$, 恒有

(1) 若 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数;

(2) 若 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如, 函数 $y = x^3$ 是奇函数, 这是因为 $f(-x) = -x^3 = -f(x)$; 又如 $f(x) = x^2$ 是偶函数, 这是因为 $f(-x) = x^2 = f(x)$; 而 $y = x^3 + x^2$ 是非奇非偶函数.

注: 奇函数从图形上看关于原点对称, 偶函数从图形上看是关于 y 轴对称 (图 1-4 中的 (a) 和 (b)).

4) 周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个常数 $T \neq 0$, 使得对任意 $x \in D$ 有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x \pm T) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期, 通常所说的周期是指 $f(x)$ 的最小正周期.

例如, $y = \sin x$ 和 $y = \tan x$ 都是周期函数, 它们的周期分别为 2π 和 π .

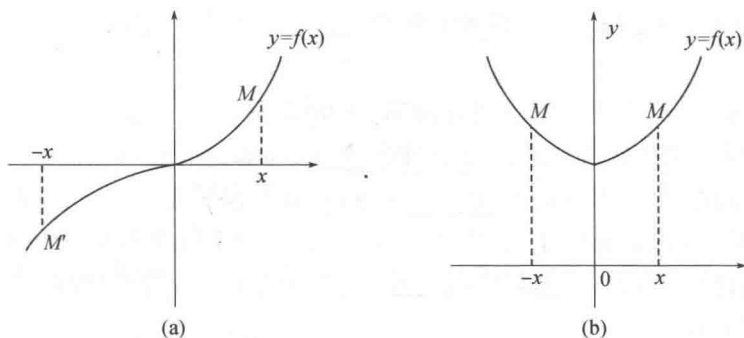


图 1-4

三、反函数、复合函数及初等函数

1. 反函数

在函数概念的引例 1 中选半径 r 为自变量, 则圆的面积 s 是半径 r 的函数, 它们函数关系由公式

$$s = \pi r^2, r \in [0, +\infty)$$

确定, 记为 $s = f(r)$, 反过来, 如果把面积 s 取作自变量, 而半径 r 作为因变量, 这样半径 r 是面积 s 的函数, 它们函数关系则可由

$$r = \sqrt{\frac{s}{\pi}}$$

确定, 记为 $r = \varphi(s)$, 这时, 称函数 $r = \varphi(s)$ 为函数 $s = f(r)$ 的反函数, 而 $s = f(r)$ 为直接函数.

下面给出反函数的定义:

定义 2 给定函数 $y = f(x)$ ($x \in D, y \in Z$), 如果对于 Z 中每一个值 y , 通过对应法则 f^{-1} , 使得 D 中有唯一确定的值 x 与之对应, 则称在 Z 上确定了 $y = f(x)$ 的反函数, 记作

$$x = f^{-1}(y) \quad (y \in Z).$$

例如, $s = f(r) = \pi r^2$ ($0 \leq r < +\infty$) 的反函数为

$$r = f^{-1}(s) = \sqrt{s/\pi} \quad (0 \leq s < +\infty).$$

注: (1) 反函数的定义域和值域, 恰好是直接函数的值域和定义域.

(2) 直接函数 $y = f(x)$ 与反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称的.

(3) 习惯上用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 因而 $y = f(x)$ 的反函数常写成 $y = f^{-1}(x)$ 的形式.

2. 复合函数

对于一些函数, 例如 $y = e^{\sin x}$, 可以把它看成由 $y = e^u$ 和 $u = \sin x$ 两个函数发生联系构成, 像这样由两个或两个以上函数构成一个的函数称为复合函数. 下面给出复合函数的定义.

定义 3 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 如果对于 $\varphi(x)$ 的定义域中的某些 x 值所对应的 u 值, 函数 $y = f(u)$ 有定义, 则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数,

称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记为 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 称为中间变量.

例如, $y=\ln u, u=2x+1$ 就可以复合而成 $y=\ln(2x+1)$.

不是任意两个函数都能复合成一个函数,如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$,这是因为 $u=2+x^2$ 中 u 的取值范围为 $[2, +\infty)$,而 $y=\arcsin u$ 中 u 的范围为 $[-1, 1]$,即 $u=2+x^2$ 中 x 所对应的 u 值使 $y=\arcsin u$ 无定义,从而它们不满足复合条件而不能复合成一个函数.

注:复合条件是 $f[\varphi(x)]$ 的定义域或者与 $\varphi(x)$ 的定义域完全相同,或者只是 $\varphi(x)$ 的定义域的一部分.

3. 初等函数

定义 4 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算并且可用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如, $y=3x^2+2x+1, y=\sqrt{1-x^2}, y=2e^{\sin x}$ 等都是初等函数.

一般分段函数不是初等函数,但个别分段函数除外,例如 $f(x)=\begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, 由于

$f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}, u=x^2$ 复合而成,所以该函数是初等函数.

四、典型例题

例 7 求函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\ln(1+2x)$ 的定义域.

分析:函数的定义域是使函数有意义的点集,有时也需考虑问题的实际背景,本题没有实际意义要求,使函数有定义的点集即为定义域.

解:依题意知

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ 1+2x > 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ x > -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

则定义域为

$$\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x \leq 1\right\}.$$

例 8 设 $f(x)=x^2+2x-3$, 求 $f\left(\frac{1}{t}\right)$ 和 $f(2)$.

解:将 $x=\frac{1}{t}$ 和 $x=2$ 分别代入 $f(x)=x^2+2x-3$, 即得

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}-3, \quad f(2)=5.$$

例 9 设

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & -3 \leq x \leq 0, \\ -x^3, & 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

求 $f(-2), f(1)$.

解: 当 $x = -2$ 时应代入 $f(x) = x^3$ 中计算, 即得 $f(-2) = -8$;

当 $x = 1$ 时应代入 $f(x) = -x^3$ 中计算, 即得 $f(1) = -1$.

例 10 函数 $y = \sqrt{\log_a \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ 是由哪些较简单的函数复合而成的?

解: $y = \sqrt{\log_a \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ 是由 $y = \sqrt{u}, u = \log_a v, v = 1 + \frac{1}{x}$ 三个简单的函数复合而成的.

例 11 火车站收取行李费规定如下: 当行李不超过 50kg 时, 按基本运费计算, 如从上海到某地每千克收取 0.15 元, 当超过 50kg 时, 超重部分按每千克 0.25 元收费, 试求上海到该地的行李费 y (元) 与质量 x (kg) 之间的函数关系式:

解: 运费的计算方法分两种情况, 即超重和不超重, 所以 y 是 x 的分段函数, 即

$$y = \begin{cases} 0.15x, & 0 \leq x \leq 50, \\ 7.5 + 0.25(x - 50), & x > 50. \end{cases}$$

习 题 1.1

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (2) y = \ln(1+2x) + \arcsin(1+2x);$$

$$(3) y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}; \quad (4) y = e^{2/x};$$

$$(5) y = \sin(3x - 2); \quad (6) y = \frac{1}{x-1} + \sqrt{2x+1}.$$

2. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同, 为什么?

$$(1) f(x) = 1, g(x) = \frac{x}{x};$$

$$(2) f(x) = \ln x^2, g(x) = 2 \ln x;$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x-1}.$$

3. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非奇又非偶函数?

$$(1) y = \frac{x^2 \sin x}{1+x^4}; (2) y = x(x-1)(x+1); (3) y = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$(4) y = 3x^2 - x^3; (5) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); (6) y = x^2 \cos x.$$

4. 设 $f(x) = \arcsin x$ 求下列函数值.

$$(1) f(0); \quad (2) f(-1); \quad (3) f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad (4) f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

5. 设 $f(x) = 3^x, \varphi(x) = 2x^2$, 求 $\varphi[f(x)], f[\varphi(x)]$.

6. 在下列各题中, 求由所给函数复合而成的函数, 并求这个复合函数分别对应于给

定自变量 x_1 和 x_2 的函数值.

$$(1) y = u^2, u = \cos x, x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{\pi}{6};$$

$$(2) y = \sqrt{u}, u = 1 + x^3, x_1 = 2, x_2 = 0;$$

$$(3) y = e^u, u = \tan x, x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = 0;$$

$$(4) y = u^3, u = e^x, x_1 = 1, x_2 = -1.$$

7. 问下列函数分别由哪些简单函数复合而成?

$$(1) y = (1 - 3x)^5; \quad (2) y = \ln \sin x; \quad (3) y = e^{\sin^2 x};$$

$$(4) y = \cos(2x + 1); \quad (5) y = \arcsin(2x + 3); \quad (6) y = \sqrt[4]{2x - 1}.$$

8. 京沪运输公司规定货物的吨千米运价为:在 2km 以内每千米 10 元,超过 2km,超过部分每千米 8 元,求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

第二节 极限的概念及性质

极限的概念是高等数学的基本概念,极限理论是高等数学的基本理论,正确地理解极限理论,掌握好求极限的基本方法,对学好高等数学是十分重要的.本节首先讨论数列的极限,然后推广到一般函数的极限.

一、数列的极限

1. 数列的概念

一般来说,按照一定顺序排成的一列数

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

称为数列,记为 $\{u_n\}$. 其中 u_n 称为第 n 项或通项, n 为 u_n 的序号.

$$\text{例如:数列 } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, u_n = \frac{1}{n}.$$

注:若将函数 $y = f(x)$ 中 x 的取值范围定义为正整数 n ,则数列可看作自变量为正整数 n 的函数 $u_n = f(n)$, $n \in N^+$,可见,数列是一种特殊函数.

2. 数列的极限

极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的,下面给出古代数学史上两个精典的实例.

例 1 《庄子·天下篇》中有这样一段话“一尺之棰,日取其半,万世不竭,”这段话的意思是,一尺长的木棍,每天取下它的一半,永远也取不完.这里可知,每天取下的长度可排成如下一个数列:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots,$$

通过观察可发现,当 n 无限增大时,这个数列的趋势无限接近于 0.

这个例子说明古代就已经具有无限细分的思想,并对极限过程有了初步的描述.

例 2 魏晋数学家刘徽在公元 3 世纪提出了用内按正多边形来推算圆面积的方