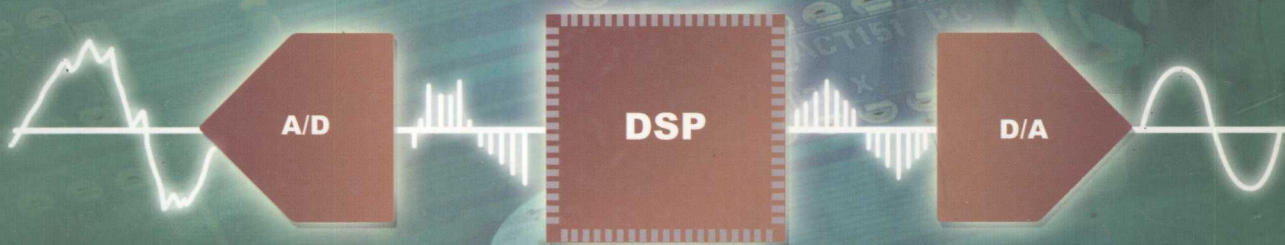


现代数字信号处理简明教程

金连文 韦 岗 编著



清华大学出版社

现代数字信号处理简明教程

金连文 韦 岗 编著

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书以通俗易懂的语言、简洁的数学推理来讲述现代数字信号处理的基本概念、基本原理及基本算法。全书共7章,主要内容包括:数字信号处理的基本概念、随机信号分析基础、信号量化与编码、平稳随机信号的线性模型、功率谱估计、自适应滤波器原理及算法、多抽样率信号分析等。本书还收集整理了不少的习题、例题和思考题,便于读者理解和领会有关理论和技术。

本书适合理工科与信号处理相关专业的高年级本科生和研究生作为教材或参考书,也可作为同等学历申请硕士学位的相关人员的教材或自学参考书,还可供有关信号处理领域的工程技术人员参考。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13901104297 13801310933

本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签,无标签者不得销售。

图书在版编目(CIP)数据

现代数字信号处理简明教程/金连文,韦岗编著.北京:清华大学出版社,2004.1
ISBN 7-302-07755-X

I. 现… II. ①金… ②韦… III. 数字信号-信号处理-教材 IV. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 112297 号

出 版 者: 清华大学出版社 地 址: 北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn 邮 编: 100084
社 总 机: 010-62770175 客 户 服 务: 010-62776969

组稿编辑: 欧振旭

文稿编辑: 陈韦凯

封面设计: 秦 铭

版式设计: 郑轶文

印 刷 者: 北京市清华园胶印厂

装 订 者: 三河市新茂装订有限公司

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 185×260 印 张: 15.5 字 数: 336 千字

版 次: 2004 年 1 月第 1 版 2004 年 7 月第 2 次印刷

书 号: ISBN 7-302-07755-X/TN·162

印 数: 5001~7000

定 价: 19.80 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770175-3103 或(010)62795704

前 言

信号通常是指含有一定信息的时间函数。根据信号随时间变化规律的不同,一般又可将信号分为确定性信号和随机信号两大类。传统信号处理的主要研究对象是确定性信号,而现代信号处理的主要研究对象是随机信号。

数字信号处理是通信与信息学科中的一个重要研究领域,现代信号处理是目前我国许多高校中“通信与信息系统”学科研究生的专业基础课程之一,被国务院学位委员会列为工程硕士全国统考“信息与通信工程”专业的考试科目之一。目前,在国内外已有不少现代信号处理方面的教材及专著,但能完整覆盖考试大纲的书籍还很少。本书编写的初衷是以大纲为中心,结合近年来信号处理的一些成熟的理论和技术,编写一本深入浅出阐述信号处理基本概念和原理的研究生教材。

本书简明扼要地阐述了现代数字信号处理的基本概念、基本原理及基本算法,全书共7章,主要包括:

- ◇ 数字信号处理的基本概念;
- ◇ 随机信号分析基础;
- ◇ 信号量化与编码;
- ◇ 平稳随机信号的线性模型;
- ◇ 功率谱估计(包括经典谱估计、现代谱估计两大部分);
- ◇ 自适应信号处理的基本原理及自适应滤波器原理、算法;
- ◇ 多抽样率信号分析。

本书力求用通俗易懂的语言、简洁的数学推理来叙述现代信号处理这一学科的基本概念及方法,同时书中收集整理了不少的习题、例题和思考题,便于读者理解和领会书中介绍的有关理论和技术。

本书可作为高等院校理工科研究生和高年级本科生“数字信号处理”课程教材及教学参考书,也可作为同等学力申请硕士学位的有关人员的教学或自学参考书,亦可供有关信号处理领域工程技术人员作参考。

本书要求读者具有“信号与系统”、“高等数学”、“线性代数”、“概率论与数理统计”等课程的基本知识。

本书在编写过程中,参考和引用了一些前人的著作、论文及研究成果,具体参见书后的参考文献。在此,我们对这些文献的著作者表示谢意。

限于作者水平有限,编写时间仓促,本书疏忽错漏之处在所难免,选材内容尚需充实完善,恳请广大读者批评指正。

作者

2003年12月于广州

目 录

第 1 章 数字信号处理基本概念	1
1.1 概述	1
1.2 离散时间信号	2
1.2.1 连续时间信号的采样	2
1.2.2 采样定理	3
1.2.3 几种常见的数字信号	5
1.2.4 信号的能量、功率及周期性	6
1.2.5 信号的基本运算	7
1.3 信号的 Fourier 变换	8
1.3.1 连续时间信号的 Fourier 变换	8
1.3.2 离散时间信号的 Fourier 变换	9
1.3.3 离散 Fourier 变换(DFT)	9
1.3.4 DFT 的性质	10
1.4 z 变换	11
1.4.1 z 变换的定义	11
1.4.2 z 变换的收敛域	11
1.4.3 z 变换的性质	13
1.4.4 逆 z 变换	14
1.5 离散时间系统	15
1.5.1 基本概念	15
1.5.2 离散时间系统的线性性和时不变性	15
1.5.3 离散时间系统的单位冲激响应函数	16
1.5.4 LSI 系统的稳定性	17
思考题	18
习 题	18
第 2 章 随机信号分析基础	21
2.1 概述	21
2.2 随机信号的概率结构	23
2.2.1 概率分布函数及概率密度函数	23
2.2.2 随机信号的阶数及其平稳性	25
2.3 随机信号的数字特征	26
2.4 随机信号的功率谱密度	29

2.4.1	维纳-辛钦定理	29
2.4.2	功率谱密度的性质	30
2.5	离散时间随机信号	32
2.5.1	离散时间随机信号的数字特征	33
2.5.2	离散随机序列的功率谱密度	34
2.6	随机信号的遍历性	35
2.6.1	总集意义上的数字特征与时间意义上的数字特征	35
2.6.2	平稳随机信号的遍历性	36
2.7	几种常见的随机信号	37
2.8	随机信号数字特征的估计	40
2.8.1	估计的质量	40
2.8.2	随机信号均值及方差的估计	41
2.8.3	自相关函数的估计	43
	思考题	48
	习题	48
第3章	信号量化与编码	51
3.1	引言	51
3.2	标量量化	52
3.2.1	概述	52
3.2.2	标量量化器结构	53
3.2.3	量化器性能测度	55
3.2.4	均匀量化器	56
3.2.5	非均匀量化器	57
3.2.6	最佳量化	60
3.2.7	有记忆量化	63
3.3	矢量量化的基本理论	66
3.3.1	概述	66
3.3.2	基本定义	66
3.3.3	矢量量化器的结构	67
3.3.4	矢量量化器的性能测度	69
3.3.5	最邻近矢量量化器	70
3.3.6	格型矢量量化器	72
3.3.7	矢量量化器渐近性能分析	73
3.4	矢量量化器的设计	73
3.4.1	概述	73
3.4.2	最佳量化条件	75
3.4.3	矢量量化器设计	76

3.5 受限矢量量化	79
3.5.1 结构受限矢量量化	80
3.5.2 树形结构矢量量化	80
3.5.3 分类矢量量化	82
3.5.4 正交变换矢量量化	82
3.5.5 乘积码技术	83
3.5.6 均值消除矢量量化	84
3.5.7 形状-增益矢量量化	84
3.5.8 多级矢量量化	85
3.5.9 分层及多分辨率矢量量化	85
3.5.10 快速最邻近编码	86
3.6 有记忆矢量量化	87
3.6.1 预测矢量量化	87
3.6.2 自适应矢量量化器	89
3.7 应用举例	91
3.7.1 图像信号压缩	91
3.7.2 语音信号压缩	91
3.7.3 模式识别	92
思考题	92
习 题	92
第 4 章 平稳随机信号的线性模型	95
4.1 随机信号通过线性系统	95
4.1.1 基本概念	95
4.1.2 线性系统的输入输出信号之间数字特征的关系	96
4.2 离散时间序列的自回归滑动平均模型	98
4.2.1 基于线性微分方程的线性非移变系统	98
4.2.2 离散时间序列的自回归滑动平均模型	99
4.2.3 ARMA 模型的传递函数	100
4.2.4 ARMA 系统的稳定性	103
4.3 ARMA 模型的数字特征	104
4.3.1 互相关函数	104
4.3.2 自相关函数	104
4.3.3 功率谱密度	109
4.4 ARMA、AR、MA 模型之间的关系	110
思考题	112
习 题	112

第 5 章 功率谱估计	117
5.1 概述	117
5.2 经典谱估计的基本方法	118
5.2.1 周期图法.....	118
5.2.2 相关图法.....	123
5.2.3 经典谱估计方法的改进.....	124
5.3 功率谱估计的参数模型法	128
5.3.1 AR 谱估计的相关函数法	129
5.3.2 AR 参数谱估计与最佳线性预测器的关系	130
5.3.3 Levinson - Durbin 算法	133
5.3.4 Burg 算法	136
5.3.5 AR 谱估计的性质	139
5.3.6 MA 谱估计、ARMA 谱估计	140
5.4 最大熵谱估计	143
5.5 特征分解法谱估计	146
5.5.1 Pisarenko 谐波分解与相关矩阵的特征分解	146
5.5.2 基于信号子空间的频率估计及功率谱估计.....	148
思考题.....	150
习 题.....	151
第 6 章 自适应滤波	153
6.1 数字滤波器的基本概念	153
6.1.1 基本概念.....	153
6.1.2 FIR 和 IIR 数字滤波器的实现.....	154
6.2 维纳(Winner)滤波器	155
6.2.1 滤波器的最优化问题.....	155
6.2.2 最小均方误差(MMSE)准则与正交性原理.....	156
6.2.3 Wiener - Hopf 正则方程	157
6.2.4 Wiener 滤波器的求解	158
6.3 自适应滤波器	161
6.3.1 自适应滤波器的基本概念.....	161
6.3.2 基于最小均方差误差的自适应滤波器及性能函数.....	162
6.3.3 梯度搜索法.....	165
6.3.4 LMS 自适应滤波器	168
6.4 线性预测格型滤波器	171
6.4.1 格型滤波器的数学模型.....	171
6.4.2 格型滤波器的特点.....	173
6.4.3 格型滤波器的几个性质.....	174

6.5 最小二乘滤波	175
6.5.1 最小二乘法的基本概念	175
6.5.2 线性向量空间及投影操作算子	176
6.5.3 最小二乘格型滤波器	181
6.5.4 快速横向滤波器	185
6.6 自适应滤波技术的应用	191
6.6.1 自适应均衡器	193
6.6.2 自适应回声消除	194
6.6.3 自适应噪声消除器	196
6.6.4 自适应信号增强器	197
6.6.5 自适应谱估计	199
思考题	200
习 题	201
第 7 章 多抽样率信号分析	205
7.1 概述	205
7.1.1 多抽样率系统基本理论	205
7.1.2 数字滤波器阵列	208
7.1.3 滤波器的多相表示	208
7.1.4 抽取/内插滤波器的多相结构	210
7.1.5 多相结构的开关模型	211
7.1.6 几种特殊的滤波器与滤波器阵列	212
7.2 正交镜像滤波器阵列	214
7.2.1 基本理论	214
7.2.2 QMF 的多相表示	217
7.2.3 QMF 阵列的失真消除	218
7.2.4 多通道滤波器阵列基本理论	220
7.2.5 M 子带 QMF 阵列的多相表示	223
7.2.6 完全重构 M 子带 QMF 阵列	224
7.2.7 无混叠滤波器阵列	226
思考题	229
习 题	230
参考文献	232

第1章 数字信号处理基本概念

1.1 概 述

信号是指含有一定信息量的时间或空间的函数,通常用 $x(t)$ 或 $x(n)$ 来表示。它的自变量可以是时间也可以是其他变量,例如空间距离、日期等。一般而言,若非特别说明,在本书将 $x(t)$ 或 $x(n)$ 视为随时间变化的函数。

若 t 是定义在时间轴上的连续变量,则称 $x(t)$ 为连续时间信号,亦称模拟信号。若 t 仅在时间轴上的离散点取值,通常将此时的 $x(t)$ 记为 $x(nT_s)$ (T_s 表示两相邻点之间的时间间隔,又称为采样周期),称 $x(nT_s)$ 为离散时间信号,一般可将 T_s 归一化为 1,这样 $x(nT_s)$ 可表示为 $x(n)$, n 为整数。所以, $x(n)$ 又可称为离散时间序列,或简称时间序列 (Time Series)。

根据信号随时间变化规律的不同,一般又可将信号分为确定性信号和随机信号两大类。本章主要对确定性信号处理的基本内容进行一些归纳和总结,读者需已经学过相关的一些基础课程(如“信号与系统”)。不具备这方面基础知识的读者,可参考信号与系统、确定性数字信号处理等方面的书籍(如文献[4]、[19]等)。

1. 信号的分类

如前所述,信号可以分为连续时间信号和离散时间信号两大类。除此之外,对信号的分类方法还有很多,下面列出几种常见的分类方法:

(1) 周期信号和非周期信号

对信号 $x(n)$,若有 $x(n) = x(n \pm KN)$, K 、 N 均为正整数,则称 $x(n)$ 是周期函数,否则, $x(n)$ 为非周期函数。

(2) 因果信号和非因果信号

对信号 $x(n)$,如果当 $n < 0$ 时, $x(n) = 0$,则称 $x(n)$ 为因果信号,否则称之为非因果信号。

(3) 确定性信号和随机信号

如果信号 $x(n)$ 随时间的变化是有规律的,即给定信号 $x(n)$ 在任意时刻 n 的值都能被精确地确定,则称这一类信号为确定性信号。反之,如果信号随时间的变化是随机的,没有确定规律的,则这类信号称之为随机信号,有关随机信号的分析方法将在第 2 章进行阐述。

(4) 一维信号、二维信号及多通道信号

若信号 $x(n)$ 仅仅是时间 n 这一个变量的函数,那么 $x(n)$ 为一维时间信号。信号 $x(m, n)$ 是变量 m 和 n 的函数,称之为二维信号。例如一幅数字化了的图像, m 和 n 是在 x 方向和 y 方向的离散值,它们分别代表了 x 和 y 两个方向上的距离, $x(m, n)$ 表示了坐标 m 、 n 处图像的灰度。

同样,多维信号可定义为:

$$\mathbf{X} = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)]^T$$

式中 T 代表转置, n 是时间变量, 如果 m 代表通道数, 那么也称 \mathbf{X} 是一个多通道信号。 \mathbf{X} 的每一个分量 $x_i(n), i=1, 2, \dots, m$ 都代表了一个一维信号源。例如, 在医院做常规心电图检查时, 12 个电极可同时给出 12 导联的信号。医生在检查这些心电信号时, 不仅要检查各导联心电图的形态, 还要检查各个导联之间的关系。

一维、二维及多通道信号又都可以分别对应确定性信号、随机信号、周期与非周期信号、能量信号与功率信号。

2. 数字信号处理及其研究领域

近 20 年来, 随着计算机软件技术的飞速发展, 数字信号处理(Digital Signal Processing, DSP)技术得到了较大的发展, 并广泛应用于各行各业中, 简而言之, 数字信号处理就是利用计算机或专用设备, 以数值计算的方法对信号进行采集、变换、分析、综合、估计、识别等加工处理, 以达到提取信息和便于利用的目的。数字信号处理技术及设备具有灵活、精确、抗干扰能力强、造价低、设备尺寸小、速度快、稳定性好等突出优点, 这些都是模拟信号处理技术所无法比拟的。

数字信号处理的主要研究领域包括:

- (1) 信号采集: 采样、量化、多抽样率、量化噪声分析等;
- (2) 信号分析(时域、频域): 信号的特征分析等;
- (3) 信号变换: 各种变换方法等(如 Fourier 变换、小波变换等);
- (4) 信号编码: 如语音信号压缩编码、图像信号压缩编码等;
- (5) 信号估值: 如估值理论、相关、功率谱估计;
- (6) 离散时间系统分析: 系统的描述、频率特性、稳定性;
- (7) 信号滤波: 各种滤波器设计及应用;
- (8) 快速算法: 如 FFT 等;
- (9) 信号建模: AR、MA、ARMA 等模型;
- (10) 非线性信号处理: 神经网络信号处理等;
- (11) 硬件实现技术: DSP、ASIC 等通用或专用芯片技术及其应用;
- (12) 应用研究: 应用信号处理技术解决实际工作中的各种问题。

数字信号处理的应用范围非常广泛, 例如语音信号的识别、合成、压缩、编码, 图像信号的变换、识别、压缩、增强, 生物医学信号处理, 雷达信号处理, 滤波器设计等, 可以毫不夸张地说, 只要有电子信息设备的地方, 就能看到数字信号处理的应用。

1.2 离散时间信号

1.2.1 连续时间信号的采样

现实生活中的信号一般是连续的, 要对连续信号进行数字处理, 首先必须对信号进行采样。采样器的工作原理如图 1-1(a)所示, 连续时间信号 $x(t)$ 经过电子开关 S , 开关每隔

T 秒钟短暂地闭合一次, 这样输出周期为 T 的脉冲串, 称 T 为采样周期, $f_s = \frac{1}{T}$ 为采样频率(简称采样率)。采样器的数学模型可用图 1-1(b)来表示。

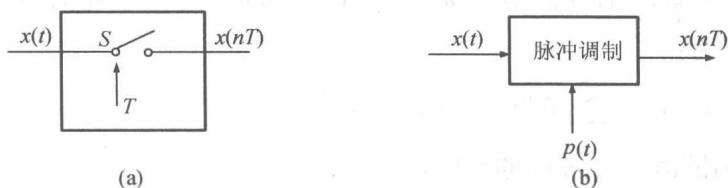


图 1-1 信号采样原理图

经过采样器后, 连续时间信号变为:

$$x(nT) = x(t) \cdot p(t) \quad (1.2.1)$$

式中 $p(t)$ 为周期 T 的脉冲序列。在理想情况下, 可设脉冲序列 $p(t)$ 为理想的冲激采样信号(如图 1-2(b)), 即

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.2.2)$$

则

$$\begin{aligned} x(nT) &= x(t) \cdot p(t) \\ &= x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

这样, 时间连续的信号 $x(t)$ 经采样后已变为时间离散的信号 $x(nT)$, 如图 1-2 所示。通常可将采样周期 T 归一化为 1, 则可用 $x(n)$ 来表示数字化后的离散信号。

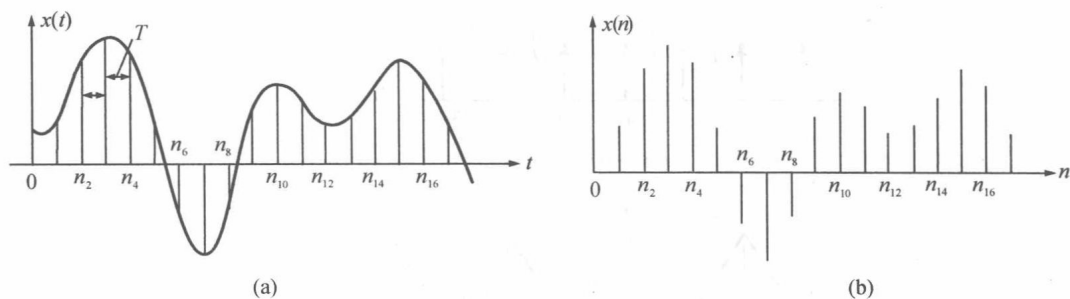


图 1-2 连续时间信号离散化过程

1.2.2 采样定理

连续信号经过采样后, 其信息量是否会丢失? 或者说能否把采样后的数字信号恢复成连续号? 如果能恢复, 要具备什么条件? 采样定理将清楚地回答这些问题。

对连续信号 $x(t)$ 进行 Fourier 变换, 可以得到其频谱为:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.2.4)$$

设采样频率为 $f_s = \frac{1}{T}$, 采样角频率为 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, 根据 Fourier 级数的知识, 可以推导出 $p(t)$ 的 Fourier 级数展开为:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\frac{2\pi}{T}t} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\omega_s t} \quad (1.2.5)$$

所以, 采样后的离散信号 $x(nT)$ 的频谱为:

$$\begin{aligned} \hat{X}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)p(t)e^{j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\omega_s t} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega - m\omega_s)t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(\omega - m\omega_s) \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

可见, 连续信号经过采样后, 其频谱将是周期函数, 周期为角频率 ω_s 。假设连续信号 $x(t)$ 是限带信号, 则 $X(\omega)$ 、 $\hat{X}(\omega)$ 及 $p(t)$ 的频谱和 $P_s(\omega)$ 的关系可用图 1-3 来表示。

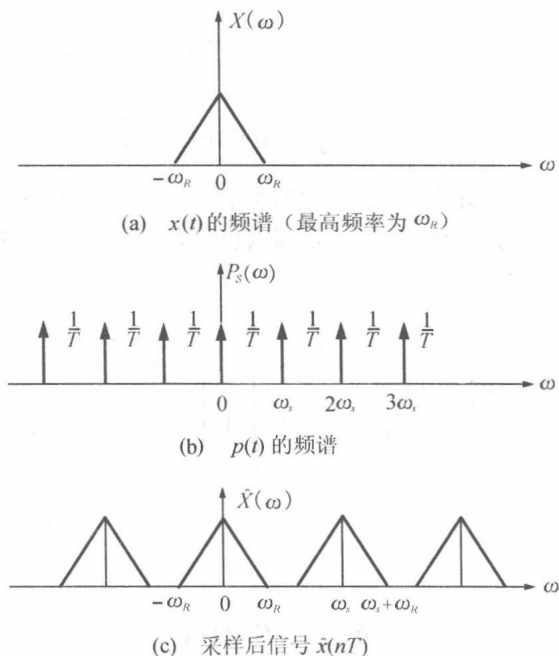


图 1-3 $x(t)$ 、 $p(t)$ 及 $\hat{x}(nT)$ 的频谱

由图 1-3 可见, 对于带通信号, 如果最高频率 ω_R 小于 $\omega_s - \omega_R$, 则 $x(nT)$ 的频谱不会出现“混叠现象”。这样, $\hat{X}(\omega)$ 中包含了完整的 $X(\omega)$ 信号, 可对 $\hat{X}(\omega)$ 中一个周期的频谱进行 Fourier 反变换, 完整地恢复原始的连续信号 $x(t)$ 。也就是说, 在采样过程中, 为避免

出现混叠现象,必须使:

$$\omega_s - \omega_R \geq \omega_R \quad (1.2.7)$$

即

$$\omega_s \geq 2\omega_R \quad (1.2.8)$$

这一结论就是著名的香农(Shannon)采样定理,有些文献亦称之为奈奎斯特(Nyquist)采样定理。

从采样定理可知,最小采样率应为 $\omega_s = 2\omega_R$ 。该采样率称为奈奎斯特采样率(取样率),称信号中的最高频率 ω_R 为 Nyquist 频率, $\omega_0 = \omega_s/2$ 为折叠频率。当然,一般的连续信号不一定是理想的限带信号,这样就不可避免地会发生混叠现象。此时处理的办法是对信号进行低通滤波后再采样。具体办法可参阅有关文献(如文献[4]、[19])。

1.2.3 几种常见的数字信号

下面介绍几种常见的数字信号。

1. 单位采样信号

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.2.9)$$

该信号又称之为 Dirac 函数,如图 1-4 所示。

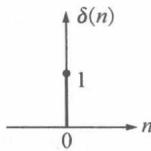


图 1-4 单位采样信号

$\delta(n)$ 在数字信号与系统中的作用是很重要的,犹如连续时间信号系统中的单位冲激 $\delta(t)$ 一样,但 $\delta(t)$ 与 $\delta(n)$ 的定义是不同的。 $\delta(t)$ 的定义是建立在积分意义上的,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.2.10)$$

且 $t \neq 0$ 时, $\delta(t) = 0$ 。其物理意义表示在极短时间内产生巨大的“冲激”, $\delta(n)$ 在 $n = 0$ 时定义为 1。

2. 脉冲序列

$$p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - k) \quad (1.2.11)$$

$p(n)$ 是 $\delta(n)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上所有移位的组合,如图 1-5 所示。

3. 单位阶跃信号

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.2.12)$$

$u(n)$ 如图 1-6 所示。

同样, $u(n)$ 也可以视为由 $\delta(n)$ 移位而成, 即有:

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n - k) \quad (1.2.13)$$

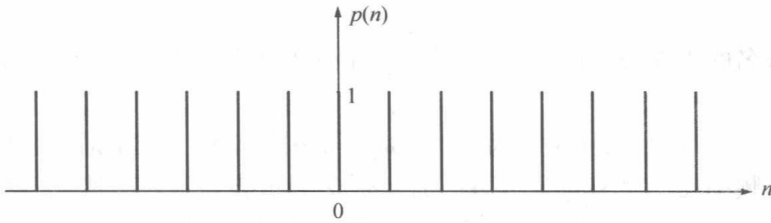


图 1-5 脉冲序列

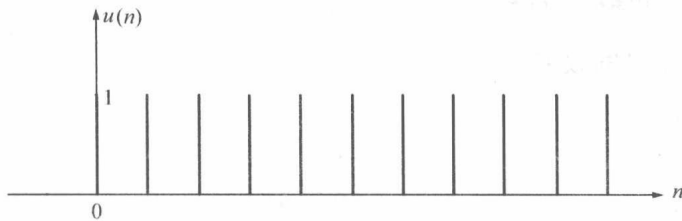


图 1-6 单位阶跃信号

4. 正弦信号

$$x(n) = A \sin(2\pi f_0 n T_s + \varphi) \quad (1.2.14)$$

式中, f_0 为频率, T_s 为采样周期, 令 $\omega = 2\pi f_0 T_s$, 则:

$$x(n) = A \sin(\omega n + \varphi) \quad (1.2.15)$$

A, φ 为常数, φ 代表初始相位。

5. 复正弦信号

$$x(n) = A e^{j(\omega n + \varphi)} = A \cos(\omega n + \varphi) + j A \sin(\omega n + \varphi) \quad (1.2.16)$$

6. 指数信号

$$x(n) = a^{|n|} \quad (1.2.17)$$

a 为常数且一般 $|a| < 1$ 。

1.2.4 信号的能量、功率及周期性

1. 信号的能量

离散时间信号 $x(n)$ 的能量定义为:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.2.18)$$

如果 $E < \infty$, 称 $x(n)$ 为能量有限信号, 简称能量信号。

对连续信号 $x(t)$, 其能量可用积分来定义。

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.2.19)$$

2. 信号的功率

信号 $x(n)$ 、 $x(t)$ 的功率分别定义为:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.2.20)$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (1.2.21)$$

如果 $P < \infty$, 则称信号为功率有限信号, 简称功率信号。

3. 信号的周期性

对离散信号 $x(n)$, 如果取任意的 n , 均有 $x(n) = x(n + kN)$ (N 为足够小的正整数), 则称 $x(n)$ 是周期为 N 的周期信号。同样, 对于周期连续信号, 下式同样成立:

$$x(t) = x(t + kT) \quad (k, T \text{ 为整数})$$

1.2.5 信号的基本运算

(1) 加法运算

信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的加法运算定义为:

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n) \quad (1.2.22)$$

(2) 减法运算

$$y(n) = x_1(n) - x_2(n) \quad (1.2.23)$$

(3) 乘法运算

$$y(n) = x_1(n)x_2(n) \quad (1.2.24)$$

(4) 放大(缩小)运算

$$y(n) = cx(n), c \text{ 为常数} \quad (1.2.25)$$

(5) 位移(延时、预测)运算

$$y(n) = x(n \pm m), m \text{ 为正整数} \quad (1.2.26)$$

(6) 卷积运算

$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的卷积定义为:

$$\begin{aligned} y(n) &= x_1(n) \otimes x_2(n) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(n-m)x_2(m) \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

(7) 相关运算

$x(n)$ 的自相关函数定义为:

$$R_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-m) \quad (1.2.28)$$

$x(n)$ 与 $y(n)$ 的互相关函数定义为:

$$R_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)y(n) \quad (1.2.29)$$

由卷积的定义不难看出:

$$R_x(m) = x(m) \otimes x(-m) \quad (1.2.30)$$

$$R_{xy}(m) = x(-m) \otimes y(m) \quad (1.2.31)$$

1.3 信号的 Fourier 变换

傅里叶(Fourier)变换是分析信号频域特征的重要工具。1822年,法国科学家 Fourier 指出,任意一个函数 $x(t)$ 都可以分解为无穷多个不同频率的正弦信号的和,从此开创了 Fourier 分析方法这一重要领域。任何信号经过傅里叶变换后可以得到信号的频谱。傅里叶分析方法包括连续时间信号及离散时间信号的傅里叶变换及傅里叶级数,其中离散傅里叶变换(DFT)是在频域及时域都取值离散的变换,易于用计算机实现。同时有快速算法 FFT,至今为止仍然是数字信号处理中最基本、最重要的运算,广泛应用于谱分析、相关、卷积、滤波器设计等领域。对傅里叶分析方法,许多信号处理的书籍都有论述,本节将对此进行简要介绍和归纳。

1.3.1 连续时间信号的 Fourier 变换

1. 非周期连续时间信号的 Fourier 变换

对一连续信号 $x(t)$,若 $x(t)$ 是绝对可积的,即:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (1.3.1)$$

则 $x(t)$ 的傅里叶变换存在并定义为:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (1.3.2)$$

逆变换:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega \quad (1.3.3)$$

时间连续信号 $x(t)$ 的频谱是一个非周期连续谱。

2. 周期连续时间信号的 Fourier 变换

设信号 $x(t)$ 的周期为 T ,其 Fourier 变换定义为:

$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (1.3.4)$$

式中, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty, \Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 。