高中基础知识丛书

数学

四川教育出版社

高中基础知识丛书

数 学

四川教育出版社

一九八四年·成都

高中基础知识丛书《数　学》

四川教育出版社出版　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　宜宾地区印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米　1/32　印张11　字数 245 千
1984年 1 月第 1 版
1984年11月第 2 版　　1984年11月第 2 次印刷
印数：375,601—569,600

书号：7344·100　　定价：0.93 元

再版说明

为了满足社会读者的需要，我们将原以四川人民出版社名义出版的"高中基础知识丛书"进行再版。这次再版，我们根据部颁两种教学要求（"基本要求"、"较高要求"）的意见，对原书内容作了调整，重排印行。书中凡较高要求部分均以小号字排出，请读者使用时注意。

四川教育出版社

一九八四年六月

出版者的话

中学教育是基础教育。为了配合普通中学向高一级学校输送合格的新生和为四化建设提供劳动后备力量，我们出版了一套“高中基础知识丛书”，以帮助应届高中毕业生系统复习和掌握各科基础知识和基本技能；同时供报考电大、职工业余大学、以及招收高中毕业生的其它升学考试和文化考试复习之用；也可供教师指导学生复习时参考。

这套丛书是根据中学各科教学大纲和中学现行教材的基本内容，结合教师的教学实践和在校学生以及广大青年自学的需要编成的。丛书包括《政治》、《语文》、《历史》、《地理》、《数学》、《物理》、《化学》、《生物》、《英语》等，共九种。为使这套丛书适应上述读者对象，我们把丛书起点定在初中毕业程度；选材力求精炼，叙述简明扼要，并努力做到概念准确、条理清楚、详略得当、题型多样、重难点突出。对于各学科有关综合运用和灵活掌握知识的问题，我们在配备例题、选题上作了合理安排，以利广大读者复习、巩固和提高。

这本《数学》的编写，分代数、三角、立体几何、解析几何、极限和微积分五部分。第1—7章由陆中权、第8—10章由张新中、第11—12章由邓先闵、第13—19章由黄元正分别编写，陆中权同志任主编。曾坤伦同志提出了不少宝贵意见，谨致谢忱。

对书中不当之处，敬请读者提出意见，以便再版时改正。

一九八三年九月

第一章　幂函数　指数函数
对数函数

一　集　合

具有某种属性的一些对象的全体形成一个集合.

集合使用大写字母 A、B、C、…、X、Y、Z 表示.例如，我们常用N表示全体自然数的集合，J表示全体整数的集合，R表示全体实数的集合，C表示全体复数的集合.

集合里的各个成员叫做集合的元素，使用小写字母 a、b、c、…、x、y、z表示.

不含任何元素的集合叫做空集，用ϕ表示.

如果a是集合A的元素，就说a属于A，表示为$a \in A$；如果a不是集合A的元素，就说a不属于A，表示为$a \notin A$.

（一）集合的表示法

（1）列举法：把集合的元素一一列举出来，写在大括号内用来表示集合.

例如，由整式x^2，$3x+2$，$5y^3-x$，x^2+y^2组成的集合，可以表示为

$$\{x^2,\ 3x+2,\ 5y^3-x,\ x^2+y^2\}.$$

（2）描述法：把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律，写在大括号内用来表示集合.

例如，由不等式 $x-3>2$ 的所有的解组成的集合，可

以表示为　$\{x:x-3>2\}$.

全体有理数的集合，可以表示为

$$\left\{\frac{p}{q}:p、q\text{是整数}，q\neq 0\right\}.$$

全体实数的集合，可以表示为

$$\{x:-\infty<x<+\infty\}.$$

全体复数的集合，可以表示为

$$\{a+bi:a\text{与}b\text{是实数}，i^2=-1\}.$$

闭区间$[a, b]$内的实数集合，可以表示为

$$\{x:a\leqslant x\leqslant b, x\in R\}.$$

开区间(a, b)内的实数集合，可以表示为

$$\{x:a<x<b, x\in R\}.$$

（二）集合的一些概念

（1）子集：对于两个集合A与B,如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A就叫做集合B的子集，表示为　$A\subseteq B$，或$B\supseteq A$.

读作“A包含于B”，或“B包含A”。

任何一个集合都是它本身的子集，即$A\subseteq A$。

规定空集是任何集合的子集，即$\phi\subseteq A$.

（2）真子集：如果A是B的子集，且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A就叫做集合B的真子集，表示为$A\subset B$、或$B\supset A$.

（3）集合的相等：对于两个集合A、B，如果$A\subseteq B$，同时$B\subseteq A$，那么集合A和集合B就叫做相等，表示为$A=B$.

（4）全集：在研究集合与集合间的关系时，这些集合常常是某一个给定集合的子集，这个给定的集合叫做全集，用符号I表示.也就是说，全集包含了我们所要研究的各个集

合的全部元素.

（5）交集：由同时属于A和B的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的交集. 表示为：$A\cap B$，图1－1中阴影部分表示为$A\cap B$.

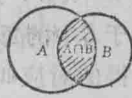

图1—1

对于任何集合A，$A\cap A=A$，$A\cap\phi=\phi$.

（6）并集:由属于A或者属于B的一切元素所组成的集合叫做集合A与B的并集.表示为：$A\cup B$. 图1—2中阴影部分表示为$A\cup B$.

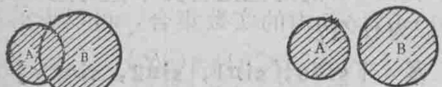

图1—2

对于任何集合A,$A\cup A=A$,$A\cup\phi=A$.

（7）补集：若全集为I,$A\subseteq I$,则由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A的补集.表示为$\overline{A}$.图1—3中阴影部分表示$\overline{A}$.

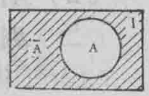

图1—3

对于任何集合A，$A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\phi$.

（三）对　应

（1）单值对应：设A与B是两个集合,如果按照某种对应关系，使A的任何一个元素，在B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应关系叫做从集合A到集合B的单值对应（也叫做映射）.A中的元素a所对应的B中的元素b叫做a的象，a叫做b的原象.

（2）一一对应：设A、B是两个集合，f是从集合A到集合B的单值对应，如果对于集合A的不同元素，在B中有不同的象，而且B中的每一个元素都有原象，这种单值对应叫做从A到B的一一对应.

（3）逆对应：设f是从集合A到集合B的一一对应，对于B中的每一个元素b，使在A中b的原象a和它对应，这样所得的对应叫做对应f的逆对应，表示为f^{-1}。显然f也是f^{-1}的逆对应。

例1 已知$A=\{0, 1, 2, 2\pi\}$，$B=\{\sin\alpha : \alpha\in A\}$.

（1）用列举法表示集合B；

（2）求$A\cap B$，$A\cup B$；

（3）由$A\to B$的对应是否为单值对应（映射），是否为一一对应，为什么？

解 （1）$B=\{\sin 0, \sin 1, \sin 2, \sin 2\pi\}$

$=\{0, \sin 1, \sin 2\}$.

（2）$A\cap B=\{0,1,2,2\pi\}\cap\{0,\sin 1,\sin 2\}=\{0\}$.

$A\cup B=\{0,1,2,2\pi\}\cup\{0,\sin 1,\sin 2\}$

$=\{0,1,2,2\pi,\sin 1,\sin 2\}$.

（3）对A中的任一元素，B中都有唯一的元素对应。即$0\to 0$，$1\to\sin 1$，$2\to\sin 2$，$2\pi\to 0$。故$A\to B$的对应为单值对应。但是，B中元素0对应A中的元素0和2π，故$A\to B$的对应不是一一对应。

例2 设$A=\{(x,y): 3x+2y=1\}$，$B=\{(x,y): x-y=2\}$，

$C=\{(x,y): 2x-3y=3\}$，$D=\{(x,y): 6x+4y=2\}$，

求$A\cap B$，$B\cap C$，$A\cap D$.

解 $A\cap B=\left\{(x, y): \begin{cases}3x+2y=1\\ x-y=2\end{cases}\right\}=\{(1, -1)\}$，

$B\cap C=\left\{(x,y): \begin{cases}x-y=2\\ 2x-3y=3\end{cases}\right\}=\phi$，

$A\cap D=\left\{(x,y): \begin{cases}3x+2y=1\\ 6x+4y=2\end{cases}\right\}=\{(x,y): 3x+2y=1\}$.

例 3 设方程$2x^2+x+m=0$的解集为A，方程

$2x^2+nx+2=0$的解集为B，且$A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$，

求$A\cup B$.

解 设$A=\left\{\frac{1}{2},\ x_1\right\}$，$B=\left\{\frac{1}{2},\ x_2\right\}$.

由韦达定理，得 $\begin{cases} x_1+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\cdot x_2=1. \end{cases}$

解得 $x_1=-1$，$x_2=2$.

所以 $A\cup B=\left\{\frac{1}{2},\ -1\right\}\cup\left\{\frac{1}{2},\ 2\right\}=\left\{-1,\ \frac{1}{2},\ 2\right\}$.

例 4 设$A=\{x: x^2-2x-3\leqslant 0,\ x\in J\}$，$B=\{0,\ 4,\ 5\}$，

$I=\{x: |x-1|\leqslant 4,\ x\in J\}$.

求$\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cup B$，$A\cap\overline{B}$及A的子集的个数.

解 $A=\{x: x^2-2x-3\leqslant 0,\ x\in J\}$

$=\{x: -1\leqslant x\leqslant 3,\ x\in J\}$

$=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

$I=\{x: |x-1|\leqslant 4,\ x\in J\}$

$=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

所以 $\overline{A}=\{-3,\ -2,\ 4,\ 5\}$.

$\overline{B}=\{-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

$\overline{A}\cup B=\{-3,\ -2,\ 0,\ 4,\ 5\}$.

$A\cup\overline{B}=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

A的子集个数为：

$$C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=(1+1)^5=32.$$

例 5 设集合$A=\{x: \cos x=1\}$，$B=\left\{x: \dfrac{\sin x}{1-\cos x}=0\right\}$，

求$A\cup B$，$A\cap B$。

解 $A=\{x:x=2n\pi,\ n\in J\}$，

$B=\{x:x=(2n+1)\pi,\ n\in J\}$，

所以 $A\cup B=\{x:x=n\pi,\ n\in J\}$，$A\cap B=\phi$。

例6 下列各对应关系中，指出哪些只是单值对应，哪些又是一一对应，或者都不是？

（1）f_1：点$(x,\ y)\to$点$(x,\ 0)$；

（2）f_2：点$(x,\ y)\to$点$(x',\ y')$，

其中$x'=x\cos\theta+y\sin\theta$，$y'=-x\sin\theta+y\cos\theta$；

（3）f_3：实数$x\to\lg x$；

（4）f_4：平面内的点$P\to$以P为圆心的单位圆；

（5）f_5：$0°$到$180°$间的角$\alpha\to\sin\alpha$；

（6）f_6：平面内的三角形$\to$这个三角形的外接圆。

解 单值对应：f_1，f_5，f_6。

一一对应：f_2，f_4。

f_3既不是一一对应，又不是单值对应。

二 对应与函数

（一）函数的定义 设在某变化过程中有两个变量x和y，变量y依赖于x，如果对于x在某个范围内的每一个值，按照某个对应关系，y都有唯一确定的值和它对应，y就叫做x的函数，常用符号$y=f(x)$表示y是x的函数，x叫做自变量。x的取值范围叫做函数的定义域。和x的值相对应的y的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域。

函数概念的三要素：定义域、值域、对应关系。这种对应关系是从定义域到值域的单值对应。

例如，一次函数$y=3x+2$.函数的定义域是R，值域是R，对应关系$x \longrightarrow 3x+2$是从R到R的单值对应。

二次函数$y=x^2+2$.函数的定义域是R，值域是$\{y:y\geqslant 2\}$，对应关系$x \longrightarrow x^2+2$是从R到$\{y:y\geqslant 2\}$的单值对应。

（二）反函数的定义 如果给定函数$y=f(x)$的对应关系f是定义域到值域上的一一对应，那么f的逆对应f^{-1}所确定的函数$x=f^{-1}(y)$叫做函数$y=f(x)$的反函数。但习惯上自变量用x来表示，函数用y来表示，因此函数$y=f(x)$的反函数通常表示成$y=f^{-1}(x)$。

反函数的定义域和值域分别是函数$y=f(x)$的值域和定义域。

互为反函数的函数图象间的关系：反函数$y=f^{-1}(x)$的图象与$y=f(x)$的图象关于直线$y=x$对称。

（三）函数的基本性质

（1）单调性(增减性)：

定义：对于函数$f(x)$，若x_1、x_2是函数$f(x)$的定义域(或其中某一区间)上的任意两个值，当$x_1>x_2$时，

1. 如果恒有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$f(x)$在定义域(或在其中某一区间)上是增函数；

2. 如果恒有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在定义域(或在其中某一区间)上是减函数。

在某一区间上的增函数或减函数，统称为在这个区间上的单调函数.这个区间叫做函数的单调区间。

从图象上看，在某一区间上的增函数，从左往右函数图象是逐渐上升的；在某一区间上的减函数，从左往右函数图象是逐渐下降的。

（2）奇偶性：

定义：对于函数$f(x)$，

1. 如果对于函数定义域里的任意一个x，都有$f(-x)=f(x)$，则称函数$f(x)$是偶函数；

2. 如果对于函数定义域里的任意一个x，都有$f(-x)=-f(x)$，则称函数$f(x)$是奇函数.

偶函数的图象关于Y轴对称，奇函数的图象关于原点对称.

三 幂 函 数

（一）幂函数 函数$y=x^n$叫做幂函数，其中x是自变量，n是常数（这里，n为有理数），函数的定义域是使x^n有意义的某些实数或全体实数的集合.

（二）幂函数的图象和性质

当$n>0$时：（如图1—4）

（1）图象都通过点$(0,0)$和$(1,1)$；

（2）在区间$(0,+\infty)$上是增函数.

当$n<0$时：（如图1—5）

（1）图象都通过点$(1,1)$；

（2）在区间$(0,+\infty)$上是减函数；

（3）在第一象限内，图象向上与y轴无限地靠近，向右与x轴无限地靠近.

例1 求下列函数的定义域

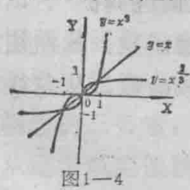

图1—4

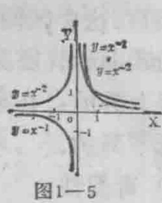

图1—5

（1）$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$；

（2）$y=\dfrac{1}{\sqrt{7-|x-2|}}+\lg(9-3^x)$；

（3）$y=\sqrt{2\cos x-1}-\sqrt{-\operatorname{tg} x}$.

解 （1）$\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ 16-x^2\geqslant 0.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}2k\pi\leqslant x\leqslant\pi+2k\pi,\ (k\in J)\\ -4\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$

∴ 定义域为$[-4,\ -\pi]$，$[0,\ \pi]$.

（2）$\begin{cases}7-|x-2|>0,\\ 9-3^x>0.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}-7<x-2<7,\\ 3^x<3^2.\end{cases}$

$\Longrightarrow\begin{cases}-5<x<9,\\ x<2.\end{cases}$

∴ 定义域为开区间$(-5,\ 2)$.

（3）$\begin{cases}\operatorname{tg}x\leqslant 0,\\ 2\cos x-1\geqslant 0.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\operatorname{tg}x\leqslant 0,\\ \cos x\geqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

解此三角不等式组，得

$$\begin{cases}\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi\right)\text{或}\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\pi\right),\\ \left(2k\pi-\dfrac{\pi}{3},\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\end{cases}$$

∴ 定义域为 $\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{3},\ 2k\pi\right)$ $(k\in J)$.

例 2 如果函数$y=(2m^2+5m-12)x^{m^2-3m+1}$是反比例函数，并且它的图象的两分支在第一、第三象限，求m的值.

解 由题意，得

$\begin{cases}m^2-3m+1=-1,\\ 2m^2+5m-12>0.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(m-2)(m-1)=0,\\ (2m-3)(m+4)>0.\end{cases}$

$\Longrightarrow\begin{cases}m=1,\ \text{或}m=2,\\ m<-4,\ \text{或}m>\dfrac{3}{2}.\end{cases}$ ∴ $m=2$.

例 3 如果$f(x)=x^3-3ax+a^2+5$，x、$a\in R$，

且$[f(x)-4]^2+|2-x|=0$，求a的值。

解 由 $[f(x)-4]^2+|2-x|=0$，

必有 $[f(x)-4]^2=0$，且$|2-x|=0$，

因此 $f(x)=4$和$x=2$，

于是 $f(2)=2^3-6a+a^2+5=4$，

即 $a^2-6a+9=0$，$\therefore$ $a=3$。

例 4 设 $y=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 4 & 9 \\ x^2 & 8 & 27 \end{vmatrix}$，

（1）x为何值时$y=0$？

（2）求y的极值，并讨论函数的增减性。

解 （1）$y=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 4 & 9 \\ x^2 & 8 & 27 \end{vmatrix}=2\times3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 \\ x^2 & 4 & 9 \end{vmatrix}$

$$=6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 2-x & 3-x \\ x^2 & 4-x^2 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

$$=6(2-x)(3-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2+x & 3+x \end{vmatrix}$$

$$=6(2-x)(3-x).$$

$\therefore$ 当$x=2$，或$x=3$时，$y=0$。

（2）$y=6(x^2-5x+6)=6\left(x^2-5x+\frac{25}{2}\right)+36-\frac{75}{4}$

$$=6\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{2}.$$

$\therefore$ 当$x=\frac{5}{2}$时，$y_{\text{极小值}}=-\frac{3}{2}$.

由于 $x=\frac{5}{2}$时，y取极小值，

$\therefore$ $x<\frac{5}{2}$时，y是减函数，

$x>\frac{5}{2}$时，y是增函数。

例5 （1）已知抛物线$y=ax^2+bx+c$的顶点坐标是$\left(\frac{1}{2},\ 25\right)$，它与$x$轴有两个交点，这两个交点的横坐标的立方和等于19，求a，b，c；

（2）如果抛物线 $y=2x^2-2ax+2a+1$与抛物线$y=x^2-(b-2)x+b$顶点相同，求a，b的值。

解 （1）顶点的坐标是$\left(\frac{1}{2},\ 25\right)$，故

$$y=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+25=ax^2-ax+\frac{a}{4}+25.$$

设 $ax^2-ax+\frac{a}{4}+25$的两根为α，β，且$\alpha^3+\beta^3=19$，即

$$(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta]=1\cdot\left[1^2-3\left(\frac{1}{4}+\frac{25}{a}\right)\right]=19,$$

$\therefore$ $a=-4$，$b=4$，$c=24$。

（2）$y=2x^2-2ax+2a+1=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{4a+2-a^2}{2}$，

$$y=x^2-(b-2)x+b=\left(x-\frac{b-2}{2}\right)^2-\frac{b^2+4}{4}.$$

根据题意，得

$$\begin{cases}\frac{a}{2}=\frac{b-2}{2},\\ \frac{4a+2-a^2}{2}=-\frac{b^2-4}{4},\end{cases}\quad \therefore\ a=2,\ b=4.$$

例6 （1）已知$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$，求$f(x)$；

（2）已知$f[f(x)]=\dfrac{x+1}{x+2}$，求$f(x)$。

解 （1）$f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\dfrac{x^2+1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2-\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+1$

$\therefore$ $f(x)=x^2-x+1$。

（2）$f[f(x)]=\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+1}}$，

$\therefore$ $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$。

例7 （1）求函数 $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$的极值；

（2）已知 $y=\dfrac{ax^2+3x+b}{x^2+1}$的极大值是$5\dfrac{1}{2}$，极小值是$\dfrac{1}{2}$，求$a$，$b$的值；

（3）已知 $y=f(x)$满足方程

$$2x^2-2xy+y^2-6x-4y+27=0,$$

求y的极值。

解 （1）原式化为 $(y-1)x^2+(y+1)x+(y-1)=0$。

$\because$ 关于x的方程有实根，

$\therefore$ $\Delta=(y+1)^2-4(y-1)^2\geqslant 0 \implies \dfrac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$.

$\therefore$ $y_{极大}=3$，$y_{极小}=\dfrac{1}{3}$。

（2）原式化为$(a-y)x^2+3x+(b-y)=0$。

$\because$ 关于x的方程有实根，

$\therefore$ $\Delta=9-4(a-y)(b-y)=-4y^2+4(a+b)y$
$-(4ab-9)\geqslant 0$。