21世纪高等院校教材

概率论与数理统计

主　编　杨殿武　苗丽安

副主编　王金梅　黄治琴
　　　　吕林燕　张　颖

科学出版社

21 世纪高等院校教材

概率论与数理统计

主　编　杨殿武　苗丽安
副主编　王金梅　黄治琴
吕林燕　张　颖

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书系统地介绍了概率论与数理统计的基本理论与方法，内容结构严谨、层次清晰、通俗易懂.本书包括概率论与数理统计两部分，例题的选取与习题的配备注意典型与难易的结合，题型丰富.

本书可作为高等院校工学、管理学、经济学及非数学类理学等各专业的教材与参考书，也可供自学者及有关科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/杨殿武，苗丽安主编.—北京：科学出版社，2014.8
21世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-041529-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①杨… ②苗… Ⅲ.①概率论-高等院校-教材 ②数理统计-高等院校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第177330号

责任编辑：王 静/责任校对：胡小洁
责任印制：阎 磊/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
大厂书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014年8月第一版 开本：720×1000 B5
2014年8月第一次印刷 印张：12 3/4
字数：254 000

定价：26.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

概率论与数理统计是研究大量随机现象统计规律性的数学学科，在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域都具有极为广泛的应用. 特别是近几十年来，随着计算机的迅速普及，概率统计在经济和管理等领域的应用也得到长足发展. 正是概率统计的这种广泛应用性，使得它已成为高等院校各类专业大学生最重要的数学必修课之一. 本书是编者参照教育部颁布的高等学校工科类本科数学基础课程教学基本要求，在总结多年的教学实践经验的基础上编写而成. 在本书编写过程中，遵循由浅入深的原则，充分注重数学概念及理论的条理性，不过分追求数学的严谨，适合于高等院校理、工、经济、管理类等非数学类各专业的学生使用.

本书的第 1 章由杨殿武和吕林燕编写，第 2，3 章由苗丽安和张颖编写，第 4，5 章由王金梅和张颖编写，第 6，7，8 章由黄治琴和吕林燕编写，最后由杨殿武负责统稿.

感谢济南大学教务处、济南大学数学科学学院等各级领导在编写过程中给予的大力支持；感谢数学院的全体教师、特别是承担本课程教学任务的教师，本书的形成离不开他们的支持；感谢科学出版社对本书的支持.

由于编者水平所限，书中难免有不妥之处，欢迎广大师生及同行专家批评指正.

编　者

2014 年 4 月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章　概率论基础

概率论是研究随机现象数量规律的数学分支．它有着悠久的历史，从 20 世纪 30 年代以来得到了迅速的发展．科学技术中的许多实际问题以及概率论的逻辑基础问题，是其向前发展的动力．它的许多研究方向都有实际背景．目前，概率论广泛应用于工业、农业、军事和科学技术并向各个基础学科、工程学科渗透．它是数理统计的理论基础，也是信息论、控制论、可靠性理论、人工智能等的重要基础．概率论进入其他科学领域的趋势还在不断发展．因此，概率论已成为当今科技工作者必备的数学工具．

1.1　概率论的基本概念

1.1.1　随机现象

自然界和人类生产实践、科学试验及日常生活中的现象，大体可分为两类．一类是在一定条件下必然发生或必然不发生的现象，称之为必然现象．如在地球上向上抛出的重物必然会下落，在标准大气压下水加热到 100℃时必然会沸腾，同性电荷必然相互排斥等，都是必然现象．由于必然现象的结果是明确的，所以也称为**确定性现象**．另一类现象是在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，所得结果只是多种可能结果中的一种，而且不能事先确定，这类现象称之为**随机现象**．如掷一枚质地均匀的骰子所出现的点数，某电话交换台一小时内收到的呼叫次数，大炮向某一目标射击，炮弹着落点的位置等，都是随机现象．对某一随机现象，结果的出现就个别试验或观察来说，是无法预言的，呈现出一种偶然性，但在相同的条件下进行大量的试验或观察时，人们会发现，结果的出现又呈现出某种规律性．例如，掷一枚质地均匀的硬币，若仅掷一次，则可能出现正面(规定一面为正面，另一面为反面)，也可能出现反面，结果的出现是偶然的．但当在相同的条件下投掷的次数相当多时，就会发现出现正面和出现反面的次数大致相等．这种通过大量试验和观察而得出的随机现象的规律性，称为**统计规律性**．

1.1.2　随机事件

为了探索随机现象的规律性，常常需要做一些试验或进行大量观察，我们把对随机现象的试验和观察，统称为**随机试验**，简称为**试验**，用 E 表示．下面是随机试验的例子．

E_1:掷一枚质地均匀的硬币,观察正、反面出现的情况;

E_2:将一枚质地均匀的硬币掷两次,观察正、反面出现的情况;

E_3:掷一枚骰子,观察出现的点数;

E_4:一射手对某目标进行射击,直到击中目标为止,观察其射击次数;

E_5:在一大批灯泡中任取一只,测试其寿命.

在上述随机试验中,每个试验的全部可能出现的结果是清楚的.例如,随机试验 E_1 的全部可能出现的结果为"正面""反面";随机试验 E_2 全部可能出现的结果为(正,正)、(正,反)、(反,正)、(反,反)(其中(反,正)表示第一次掷硬币出现反面,第二次掷硬币出现正面,其他结果意思类似).这些结果是试验出现的基本结果,且在一次试验中有且仅有一个出现.我们把随机试验的每个基本结果称为**样本点**,用 e 表示,把随机试验的全部可能出现的基本结果所组成的集合,即全部样本点的集合,称为随机试验的**样本空间**,用 S 表示.随机试验 E_1 至 E_5 的样本空间依次为

$$S_1=\{正面,反面\};S_2=\{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\};$$

$$S_3=\{1,2,3,4,5,6\};\quad S_4=\{1,2,3,\cdots\};\quad S_5=\{t\mid t\geqslant 0\}.$$

在一次试验中,可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**,简称为**事件**,用 A,B,C 等大写字母表示.

随机试验的任何一个基本结果,在一次试验中都是可能出现或可能不出现的,因而都是随机事件.这是一类最简单的随机事件,称之为**基本事件**.例如,在随机试验 E_1 中,"出现正面",在随机试验 E_3 中,"出现 1 点""出现 3 点",在随机试验 E_4 中"射击 5 次"等,都是相应随机试验的基本事件.有些随机事件要复杂一些,它们不是基本事件,而是由具有某些特征的基本事件组成.例如,在随机试验 E_3 中,"出现偶数点";在随机试验 E_4 中,"射击次数不少于 6 次";在随机试验 E_5 中,"灯泡寿命不超过 1000 小时"等,都是在一次相应的试验中可能发生也可能不发生的事件,因而它们都是相应随机试验的随机事件.事件"出现偶数点"是由 3 个基本事件"出现 2 点""出现 4 点""出现 6 点"组成的;事件"射击次数不少于 6 次"是由无穷多个基本事件"射击 i 次"($i=6,7,8,\cdots$)组成的;事件"灯泡寿命不超过 1000 小时"是由无穷多个基本事件"灯泡寿命为 t 小时"($0\leqslant t\leqslant 1000$)组成的.如果用 A、B、C 分别表示这三个事件,用集合论的方法可将它们表示为

$$A=\{2,4,6\};\quad B=\{6,7,8,\cdots\};\quad C=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 1000\}.$$

显然它们依次是样本空间 S_3,S_4,S_5 的子集.所以,从集合论的观点看,随机事件是样本空间的子集.从而,我们又可以给出随机事件的另一定义:随机试验的样本空间的子集称为随机事件.在这样的定义下,基本事件便是仅包括一个样本点的单点集.

在一次试验中,我们说某事件发生了是指试验中出现了该事件中包含的一个样本点;反过来,若试验中出现了某事件中包含的一个样本点,则称该事件发生．换句话说,在一次试验中,当且仅当某一事件中的一个样本点出现时,称该事件发生．例如,在随机试验 E_3 中,若一次试验中出现了"2"点,则称 $A=\{2,4,6\}$ 事件,即"出现偶数点"这一事件发生;反之,若在某一次试验中 A 事件发生了,则该次试验中必定出现了"2"点、"4"点、"6"点中的某一个结果．

特别地,样本空间 S 是其本身的子集,按照定义,它也是一个随机事件,但由于 S 包含了随机试验的全部样本点,因而它在每次试验中都是必然发生的事件．我们称这种在每次试验中必然发生的事件为**必然事件**．空集 $\varnothing$ 也是样本空间的子集,但由于它不包含任何样本点,因而它是一个在每次试验中都不可能发生的事件．我们称在每次试验中都不可能发生的事件为**不可能事件**．实际上,必然事件和不可能事件所反映的现象是确定性现象,并不具有随机性,但为研究方便,仍将它们当作随机事件看待,并分别以 S 和 $\varnothing$ 表示．

把随机事件与样本空间的某个子集联系起来是很重要的,这使得我们能够从集合论的角度来研究随机事件．

1.1.3　事件间的关系与运算

在某些问题的研究中,常常需要同时研究许多事件,而这些事件之间又存在着一定的联系,这就需要我们对事件之间的关系与运算进行研究．下面,我们通过集合之间的关系和运算来讨论事件之间的关系和运算．值得注意的是,在理解这些关系与运算时,不要忘记随机事件的本来含义与"事件发生"的意义．

设随机试验 E 的样本空间为 $S,A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集．

(1) 若 $A\subset B$,则称事件 B 包含事件 A,指的是事件 A 的发生必导致事件 B 发生．如图 1-1 所示．

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B **相等**,记为 $A=B$.

(2) 事件 $A\cup B=\{e|e\in A$或$e\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的**和事件**．在试验中,当且仅当 A,B 中至少有一个发生时,事件 $A\cup B$ 发生．如图 1-2 所示．

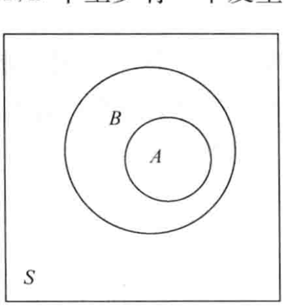

图 1-1

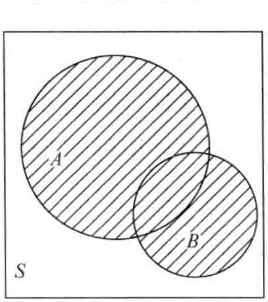

图 1-2

类似地,称 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件;称 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件.

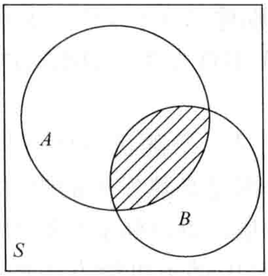

图 1-3

(3) 事件 $A \cap B = \{e \mid e \in A$ 且 $e \in B\}$ 为事件 A 与事件 B 的**积事件**. 在试验中,当且仅当 A 与 B 同时发生时,事件 $A \cap B$ 发生,也可记作 AB. 如图 1-3 所示.

类似地,称事件 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件;称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

(4) 事件 $A - B = \{e \mid e \in A$ 且 $e \notin B\}$ 为事件 A 与事件 B 的**差事件**. 在试验中,当且仅当 A 发生而 B 不发生时,事件 $A - B$ 发生. 如图 1-4 所示. 显然有 $A - B = A - AB = A\overline{B}$.

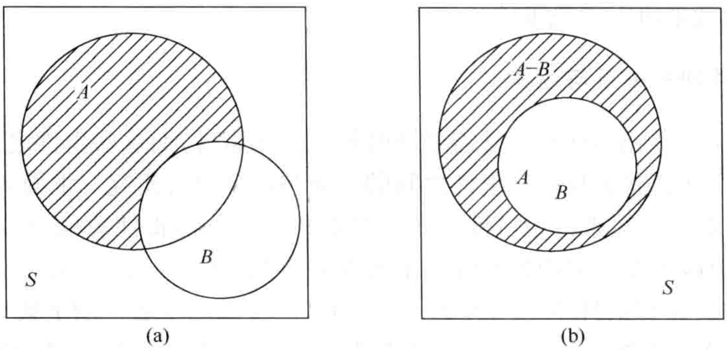

图 1-4

(5) 若 $AB = \varnothing$,则称事件 A 与事件 B 是**互不相容的,或互斥的**. 在试验中,两个互不相容的事件不能同时发生. 如图 1-5 所示. 显然任意两个基本事件都是互不相容的.

(6) 若 $A \cup B = S$ 且 $AB = \varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**,或称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**. 在每次试验中,两个互为对立的事件必有一个且仅有一个发生. 事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$, $\overline{A} = S - A$. 如图 1-6 所示.

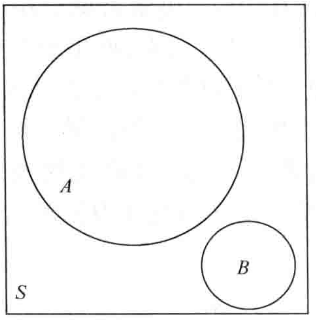

图 1-5

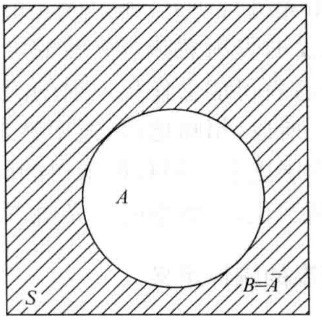

图 1-6

用图 1-1～图 1-6 可直观地表示以上事件之间的关系与运算．例如，在图 1-1 中，正方形表示样本空间 S，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，事件 B 包含事件 A；在图 1-2 中，正方形表示样本空间，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，而阴影部分表示和事件 $A\cup B$.

集合的运算法则对于事件的运算也都是成立的．在事件的运算中，经常用到下述法则.

交换律 $A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$.

结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C), A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

德·摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.1 设 A,B,C 为三个事件，则

(1) 事件 A 发生而事件 B,C 都不发生，可表示为 $A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$.

(2) 事件 A,B 都发生而事件 C 不发生，可表示为 $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$.

(3) 事件 A,B,C 中至少有两个发生，可表示为 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$ 或 $AB\cup AC\cup BC$.

事件及事件之间的关系与运算是以后进一步学习本课程的基础，读者务必多加练习，熟练掌握．

1.2 概率的定义

计算各种事件发生的概率，是概率论的基本任务之一．概率的直觉含义对大家并不陌生，其思想在科学技术、生产实践、日常生活等各方面都有所体现，成为人们作出决策、制定衡量标准等的重要依据．例如，发射一枚火箭，需要对火箭发射

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

的成功率事先进行研究，如果成功的可能性只有 10%，决策者就会决定暂时放弃发射，因为这时发射意味着失败的可能性为 90%，风险太大；如果成功的可能性为 95%，决策者就可能会作出发射的决定．这里的“成功率”“可能性大小”都是概率的同义语．所以，粗略地讲，概率就是事件发生可能性大小的度量．概率的定义曾是概率论发展史上人们长期探讨的问题，随着数学工具的不断发展及人们对概率认识的不断深化，对概率的定义由古典定义、统计定义而发展为公理化定义．

1.2.1　概率的统计定义

为了给出概率的统计定义，我们首先引入事件频率的概念．

定义 1.1　若在相同条件下进行的 n 次重复试验中，事件 A 发生了 m 次，则称比值 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{m}{n},$$

并称 m 为事件 A 发生的**频数**．

频率描述了事件发生的频繁程度．在实际应用中，人们常常用频率来大致表示事件发生可能性的大小．例如，在篮球比赛中，解说员说某某运动员的投篮命中率为 70%，70%这个量一般是运动员将篮球投入篮筐的次数与投篮总次数之比，即频率．它一方面表示在过去一段时间内运动员“将篮球投入篮筐”这一事件发生的频繁程度，另一方面它可大致表示运动员在未来一次投篮中，“将篮球投入篮筐”这一事件发生可能性的大小．

频率有一个明显的特点就是具有随机波动性，即由同样的试验次数或不同的试验次数而计算得到的同一事件的频率会有所不同．例如，甲、乙、丙三人在相同条件下掷同一枚硬币，甲投掷 10 次，乙投掷 10 次，丙投掷 13 次，出现正面的次数分别为 4，6，7 次，因而算得事件“出现正面”的频率分别为 $\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{7}{13}$. 但是，经过大量的试验，人们又会发现，频率具有一定的稳定性，即它在一个确定的常数附近摆动．随着试验次数的增大，这种稳定性会越来越明显．历史上曾有人就投掷质地均匀的硬币做过大量试验(表 1-1)，结果发现，事件“出现正面”的频率总是在 0.5 附近摆动，随着试验次数的增大，这个频率将逐渐稳定于 0.5.

表 1-1

试验者	试验次数	出现正面的次数	频率
德·摩根	2048	1061	0.5181
泊松	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

由此可见,用频率来表示事件发生的可能性的大小不是十分合适的,但由于当试验次数逐渐增大时,频率会逐渐稳定于某个确定的常数,且对每一个事件 A 都有这样一个客观存在的常数与之对应,因此,用这个常数表示事件发生的可能性大小应该是合适的．于是有如下定义．

定义 1.2　在相同条件下进行大量重复试验,当试验次数充分大时,事件 A 的频率将在某个常数 p 附近摆动,这个常数 p 称为事件 A 的**概率**,记为 $P(A)$,即 $P(A)=p$.

这个定义称为概率的统计定义．

1.2.2　古典概型

现在我们讨论一类最简单的随机试验,这类随机试验具有如下特点:

(1) 样本空间 S 只包含有限个样本点,即 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$;

(2) 试验中每个基本事件 $\{e_i\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 发生的可能性相同．

把具有上述两个特点的随机试验称为**古典概型**(也称为**等可能概型**).

例如,掷一枚质地均匀的骰子．观察出现的点数,由于全部可能出现的结果只有 6 个,而每个结果出现的可能性都相同,所以这是一古典概型．在概率论发展初期,许多结果都是对古典概型作出的．时至今日,古典概型在概率论中仍占有一定地位．一方面由于它简单,对它的研究有助于直观地理解许多基本概念;另一方面,它在产品检验等实际问题及理论物理等理论研究中都有重要应用．

在古典概型中,每个基本事件发生的概率是相等的,所以对有 n 个基本事件的样本空间,每个基本事件发生的概率都是 $\frac{1}{n}$. 对任一随机事件 A,事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件总数}}.$$

例 1.2　将一枚硬币抛两次,设 $A_1=$"恰好有一次出现正面",$A_2=$"至少有一次出现正面". 求事件 A_1,A_2 的概率．

解　该试验的样本空间为

$$S=\{(\text{正},\text{正})(\text{正},\text{反}),(\text{反},\text{正}),(\text{反},\text{反})\},$$

因此 $P(A_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, P(A_2)=\frac{3}{4}$.

例 1.3　某商场进行有奖销售,共设奖券 100 张,其中一等奖 10 张,二等奖 20 张,其余是"谢谢(无奖)". 按照购买金额抽取奖券张数．第一位顾客抽取奖券

两张. 问

(1) 两张奖券都是一等奖的概率;

(2) 一张一等奖,一张二等奖的概率;

(3)有奖的概率.

解 设 A="两张奖券都是一等奖",B="一张一等奖,一张二等奖",C="有奖".

该实验的基本事件总数为 C_{100}^2,A 所包含的基本事件数为 C_{10}^2,B 所包含的基本事件数为 $C_{10}^1 \cdot C_{20}^1$,C 所包含的基本事件数为 $C_{30}^2+C_{30}^1 \cdot C_{70}^1$. 所以

$$P(A)=\frac{C_{10}^2}{C_{100}^2}=\frac{1}{110},\quad P(B)=\frac{C_{10}^1 \cdot C_{20}^1}{C_{100}^2}=\frac{20}{495},\quad P(C)=\frac{C_{30}^2+C_{30}^1 \cdot C_{70}^1}{C_{100}^2}=\frac{169}{330}.$$

1.2.3 几何概率

在古典概型中利用等可能性的概念,成功地计算了一类问题的概率. 不过,古典概型要求样本点总数必须有限. 在实际应用中,仅假定样本空间为有限集是不够的,有时需要处理有无穷多个样本点的情况. 把处理古典概型的方法推广到无限多结果而又具有某种等可能性的情形,便引出了几何概率的概念.

试验的可能结果可以是某区域 Ω 中的一个点. 这个区域可以是一维的,也可以是二维的,还可以是三维的,甚至可能是 n 维的. 这里不管是可能结果的全体还是我们所感兴趣的结果都是无限的,而等可能性是通过下列方式来赋予意义的:点落在某区域 $G(G\subset\Omega)$ 的概率与区域 G 的测度(长度、面积、体积等)成正比且与 G 的位置及开闭无关. 满足以上条件的随机试验称为**几何概型**.

定义 1.3 设 Ω 为一有限区域,其测度为 $m(\Omega)$(线段为长度,平面区域为面积,空间区域为体积),G 为 Ω 中任一区域,其测度为 $m(G)$. 若以 A 表示"在区域 Ω 中随机地取一点,而该点落在区域 G 中"这一事件,称

$$P(\mathrm{A})=\frac{m(G)}{m(\Omega)}$$

为事件 A 发生的概率,称此概率为**几何概率**.

几何概率的定义及计算与几何图形的测度密切相关,因此应在可度量长度、面积或体积的区域 Ω 中讨论问题,并且所考虑的事件是可度量的集合,这些集合的并、交也应该是事件.

例 1.4 两人相约 7 点到 8 点在某地会面,先到者等候另一人 20 分钟,过时就离去,试求这两人能会面的概率.

解 以 x,y 分别表示两人到达时刻,则能会面的充要条件为

$$|x-y|\leqslant 20.$$

这是一个几何概型问题,可能的结果全体是边长为 60 的正方形里的点,能会面的点的区域用阴影标出(图 1-7). 所求概率为

$$P=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

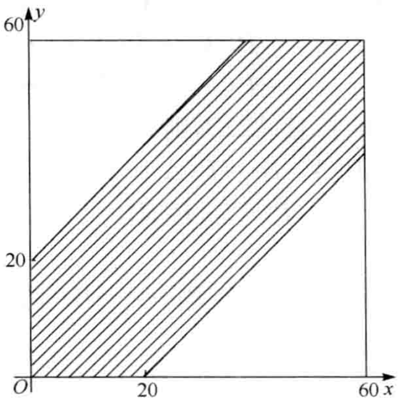

图 1-7

1.2.4 概率的公理化定义

定义 1.4 设 S 是随机试验 E 的样本空间,若对 E 的每一个随机事件 A 都赋予一个实数 $P(A)$,使满足

(1) **非负性** 对每一个事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

(2) **规范性** 对必然事件 S,有 $P(S)=1$;

(3) **可列可加性** 若 $A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的事件,即对于 $i\neq j$,有 $A_iA_j=\varnothing$, $i,j=1,2,\cdots$,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots, \tag{1.1}$$

称 $P(A)$为事件 A 的**概率**.

定义 1.4 称为**概率的公理化定义**,(1.1)式称为概率的**可列可加性**.

由定义 1.4,不难推得概率的一些重要性质.

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

证 令 $A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$,且 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$. 由概率的可列可加性(1.1)式得

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing),$$

由概率的非负性知,$P(\varnothing)\geqslant 0$,故由上式知 $P(\varnothing)=0$.

性质 2(有限可加性) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \tag{1.2}$$

(1.2)式称为概率的**有限可加性**.

证 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$,则有 $A_i A_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots$,由(1.1)式,并注意到当 $i \geqslant n+1$ 时,$P(A_i) = 0$,则得

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup \cdots) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(A_{n+1}) + \cdots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \end{aligned}$$

性质 3 设 A, B 为两事件,且 $A \supset B$,则

$$P(A-B) = P(A) - P(B), \tag{1.3}$$

$$P(A) \geqslant P(B).$$

证 当 $A \supset B$ 时,有

$$A = B \cup (A-B), B \cap (A-B) = \varnothing.$$

由概率的有限可加性,可得

$$P(A) = P(B) + P(A-B),$$

即

$$P(A-B) = P(A) - P(B).$$

又由于 $P(A-B) \geqslant 0$,所以

$$P(A) \geqslant P(B).$$

推论(减法公式) 设 A, B 为两事件,则

$$P(A-B) = P(A) - P(AB).$$

性质 4 对于任一事件 A,有

$$P(A) \leqslant 1.$$

证 因 $A \subset S$,由(1.3)式可得

$$P(A) \leqslant P(S) = 1.$$

性质 5(对立事件的概率) 对于任一事件 A,有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

证 因为 $A \cup \overline{A} = S$,且 $\overline{A A} = \varnothing$,故有

$$1 = P(S) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

即

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

性质 6(加法公式) 对于任意两事件 A, B,有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.4}$$

证 因 $A \cup B = A \cup (B - AB)$(图 1-2),且 $A(B-AB) = \varnothing$,$B \supset AB$,故由性质 2、性质 3 可得

$P(A\cup B)=P[A\cup(B-AB)]=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$

(1.4)式还能推广到多个事件的情况．例如，设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

一般地，对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，用归纳法可得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 1.5 设 A,B 为两事件，且 $P(B)=0.2,P(A\cup B)=0.6$，求 $P(A-B)$.

解 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，得

$$P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)=0.4,$$

所以 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.4$.

例 1.6 设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AB)=P(BC)=0,P(AC)=\frac{1}{8}$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率．

解 由于 $ABC\subset AB$，故 $P(ABC)\leqslant P(AB)=0,P(ABC)=0$. 所以

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\frac{5}{8}.$$

1.3 条件概率

1.3.1 条件概率

在实际问题中，除了要考虑某事件 B 的概率 $P(B)$ 外，有时还要考虑在"事件 A 已经发生"的条件下，事件 B 发生的概率．一般情况下，后者的概率与前者的概率不同，为了有所区别，常把后者的概率称为条件概率，记为 $P(B|A)$.

例 1.7 从 1,2,3,4,5,6,7,8,9 中任取一数，设事件 A="取得的数大于 6"，事件 B="取得的是偶数"，求已知事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率．

解 该试验的样本空间为 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，属于古典概型．显然 $A=\{7,8,9\},B=\{2,4,6,8\}$. 已知事件 A 发生，此时 B 中 2,4,6 不可能发生．于

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com