成人中等学校高中课本

数学 下

SHUXUE

chengren
zhongdengxuexiao
gaozhong
keben

上海教育出版社

目　录

第五章　平面解析几何

平面解析几何的主要任务是借助坐标系，用坐标表示点，用方程表示曲线，通过研究方程的特征间接地来研究曲线的性质. 因此可以说，解析几何是用代数方法来研究几何问题的一门学科.

一　平面直角坐标系

5.1　有向线段、两点的距离

1. 有向线段

在初中，我们学过数轴，它是规定了原点、正方向和单位长度的直线. 一条直线具有两个相反的方向，如果选定其中一个方向作为正方向，那么相反的方向就是负方向. 我们把规定了正方向的直线叫做**有向直线**. 例如，直角坐标系中的 x 轴和 y 轴都是有向直线.

图　5-1

图　5-2

同样，一条线段也有两个相反的方向. 如图 5-1 中的线段 AB，如果以 A 为起点、B 为终点，那么，它的方向是从 A 到 B；相反，如果以 B 为起点、A 为终点，那么，它的方向就是从 B 到 A. 规定了方向，即规定了起点和终点的线段叫做**有向线**

段. 图 5-1 中，以 A 为起点、B 为终点的有向线段记作$\overline{AB}$；以 B 为起点、A 为终点的有向线段记作$\overline{BA}$. 图 5-1 中，点 C 是线段 AB 上的一点，$\overline{AB}$和$\overline{AC}$是方向相同的有向线段，$\overline{AB}$和$\overline{BC}$是方向相反的有向线段.

选定长度单位后，我们就可以量得一条线段的长度，线段 AB 的长度就是有向线段 AB 的长度，记作 $|AB|$ *.

如图 5-2，数轴 Ox 是有向直线，A、B 是数轴上的两点，A 的坐标为 -2，B 的坐标为 3，可以看出有向线段 AB 的长度 $|AB|=5$，而有向线段 BA 的长度 $|BA|=5$，所以 $|AB|=|BA|$，也就是有向线段的长度与它的方向无关.

根据在数轴上的任一有向线段 AB 与数轴 Ox 的方向相同或相反，分别把它们的长度加上正号或负号（有向线段的方向与数轴的方向相同时，其数量为正；方向相反时，其数量为负），这样所得的数，叫做**有向线段的数量**，并用 AB 表示. 例如，如图 5-2，$AB=|AB|=5$，$BA=-|BA|=-5$. 显然

$$AB=-BA.$$

2. 数轴上有向线段的数量

现在我们来研究对于数轴上任意一条有向线段，怎样用它的起点坐标和终点坐标来表示它的数量.

设 AB 是数轴 Ox 上任意一条有向线段，点 A、B 的坐标分别是 x_1、x_2，那么 $OA=x_1$，$OB=x_2$. 如果 A、B 两点与原点 O 的位置如图 5-3 所示，可

图 5-3

---

* 在引入有向直线后，线段 AB 的长度一律用 $|AB|$ 表示.

得

$$AB=|AB|=|OA|+|OB|,$$

而 $\quad |OA|=-OA=-x_1, \quad |OB|=OB=x_2,$

$$\therefore \quad AB=-OA+OB=-x_1+x_2=x_2-x_1.$$

同样可以证明，当 A、B 两点在数轴上的其他位置时，上面等式也成立，即有向线段 AB 的数量

$$\boldsymbol{AB=x_2-x_1}.$$

根据这个公式可得，数轴上两点 A、B 的距离公式（有向线段 AB 的长度公式）：

$$\boldsymbol{|AB|=|x_2-x_1|}.$$

例 1 已知数轴上三点 A、B、C 的坐标分别是 -3、-1、4，求 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 的数量和长度（图 5-4）.

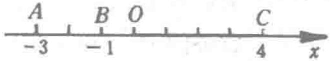


图 5-4

解

$$AB=(-1)-(-3)=2, \quad |AB|=|2|=2;$$
$$BC=4-(-1)=5, \quad |BC|=|5|=5;$$
$$CA=(-3)-4=-7, \quad |CA|=|-7|=7.$$

3. 直角坐标系中两点的距离

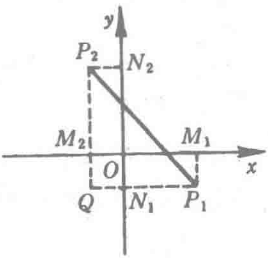


图 5-5

如图 5-5，在直角坐标系中，已知两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，我们来求这两点的距离 $|P_1P_2|$.

从点 P_1、P_2 分别向 x 轴和 y 轴作垂线 P_1M_1、P_1N_1，P_2M_2、P_2N_2，垂足分别为 $M_1(x_1, 0)$、$N_1(0, y_1)$，$M_2(x_2, 0)$、$N_2(0, y_2)$，其中直线 P_1N_1 和 P_2M_2 相交于点 Q.

在 Rt$\triangle P_1QP_2$ 中，

$$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|P_2Q|^2.$$

$$\because\quad |P_1Q|=|M_1M_2|=|x_2-x_1|,$$

$$|QP_2|=|N_1N_2|=|y_2-y_1|,$$

$$\therefore\quad |P_1P_2|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2.$$

由此得到两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$的距离公式：

$$|\boldsymbol{P_1P_2}|=\sqrt{(\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1})^2+(\boldsymbol{y_2}-\boldsymbol{y_1})^2}.$$

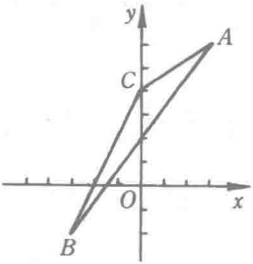


图 5-6

例 2 已知直角坐标系中三点的坐标分别是 $A(3,6)$、$B(-3,-2)$、$C(0,4)$，求每两点的距离.

解 如图 5-6，由两点的距离公式，可得

$$|AB|=\sqrt{(-3-3)^2+(-2-6)^2}$$
$$=\sqrt{100}=10,$$

$$|BC|=\sqrt{[0-(-3)]^2+[4-(-2)]^2}$$
$$=\sqrt{45}=3\sqrt{5},$$

$$|AC|=\sqrt{(0-3)^2+(4-6)^2}=\sqrt{13}.$$

例 3 求在 x 轴上与点 $A(-5,-12)$的距离为 13 的点 P 的坐标.

解 由于点 P 在 x 轴上，可设点 P 坐标为$(x,0)$.

$$\because\quad |PA|=13,$$

$$\therefore\quad \sqrt{[x-(-5)]^2+[0-(-12)]^2}=13.$$

两边平方，得 $(x+5)^2+144=169$,

$$(x+5)^2=25,\quad x+5=\pm5,$$

$$\therefore\quad x_1=-10,\quad 或\ x_2=0.$$

因此，所求点 P 的坐标是 $(-10,0)$，或 $(0,0)$.

习　题　一

1. 已知数轴上 A、B 两点的坐标 x_1、x_2 分别是：

(1) $x_1=8, x_2=5$；　　(2) $x_1=6, x_2=-3$；

(3) $x_1=-5, x_2=0$；　　(4) $x_1=-2, x_2=-6$，

求 AB、BA、$|AB|$.

2. 填空题：

(1) 已知数轴上点 A 的坐标是 4，点 B 的坐标是 x，且 $AB=8$，那么 $x=$________；

(2) 已知数轴上点 A 的坐标是 3，点 B 的坐标是 x，且 $|AB|=8$，那么 $x=$________；

(3) 在直角坐标系中，点 $(2,-3)$ 关于 x 轴的对称点的坐标是________；

(4) 在直角坐标系中，点 $(-3,5)$ 关于 y 轴的对称点的坐标是________；

(5) 在直角坐标系中，点 (a,b) 关于原点的对称点的坐标是________.

3. 求连结下列两点所成线段的长度：

(1) $(3,7)$、$(-5,1)$；　　(2) $(4,-3)$、$(-2,-3)$；

(3) $(2\sqrt{3},-2)$、$(0,0)$；　　(4) $(2,2)$、$(5,-1)$；

(5) $(6,-4)$、$(-2,-2)$；　　(6) $(4,-1)$、$(-1,11)$；

(7) $(\frac{1}{2},1)$、$(8\frac{1}{2},1)$；

(8) $(\cos\theta,\sin\theta)$、$(-\sin\theta,\cos\theta)$.

4. 求在 y 轴上与点 $A(-12,3)$ 的距离为 13 的点 P 的坐标.

5. 已知点 Q 的横坐标是 4，且点 Q 到点 $M(-2,3)$ 的距离与它到原点的距离相等，求点 Q 的坐标.

6. 证明顶点为 $A(-3,-2)$、$B(1,4)$、$C(-5,0)$ 的三角形是等腰三角形.

5.2 线段的定比分点

设有向线段 P_1P_2 的两个端点分别是 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，点 P 把 $\overline{P_1P_2}$ 分成 $\overline{P_1P}$ 与 $\overline{PP_2}$，那么 $\overline{P_1P}$ 与 $\overline{PP_2}$ 的数量的比叫做**点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比**，通常用字母 λ 表示，就是 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$. 点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的**定比分点**.

现在我们来求分点 P 的坐标.

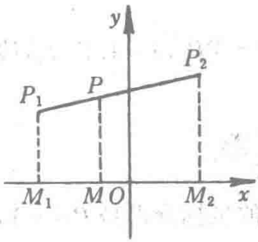


图 5-7

设点 P 的坐标为 (x,y). 从 P、P_1、P_2 分别向 x 轴作垂线 PM、P_1M_1、P_2M_2（图 5-7），垂足分别为 $M(x,0)$、$M_1(x_1,0)$、$M_2(x_2,0)$. 根据平行线分线段成比例定理，得

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}.$$

如果点 P 在 P_1 和 P_2 之间，点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的**内分点**. 这时 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的方向相同，它们的数量符号也相同，所以 λ 为正值，M 也在 M_1 和 M_2 之间. 如果点 P 在 P_1 和 P_2 之外，点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的**外分点**. 这时 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的方向相反，它们的数量符号也相反，所以 λ 为负值，M 也在 M_1 和 M_2 之外. 由此可得

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda.$$

∵ M_1、M_2、M 在 x 轴上的坐标分别是 x_1、x_2、x，

∴ $M_1M=x-x_1$，$MM_2=x_2-x$.

再根据
$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,$$
得
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$
同理，得
$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

因此，以点 $P_1(x_1,y_1)$ 为起点，点 $P_2(x_2,y_2)$ 为终点，分有向线段 P_1P_2 成定比 λ 的分点 P 的坐标是

$$\boldsymbol{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}}.$$

在应用上面公式时必须注意：(x_1,y_1) 是起点的坐标，(x_2,y_2) 是终点的坐标.

当 P 是线段 P_1P_2 的中点时，$P_1P=PP_2$，$\lambda=1$. 因此，线段 P_1P_2 的中点坐标是

$$\boldsymbol{x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}}.$$

例 1 已知线段 P_1P_2 的两个端点的坐标分别是 $P_1(-1,-4)$ 和 $P_2(3,2)$，

(1) 点 P 在线段 P_1P_2 上，且 $\dfrac{P_1P}{PP_2}=2$，求点 P 的坐标；

(2) 点 P' 在线段 P_1P_2 的延长线上，且 $\dfrac{P_2P'}{P'P_1}=-\dfrac{1}{4}$，求点 P' 的坐标(图 5-8).

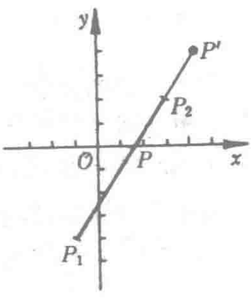


图 5-8

解 (1) 设点 P 的坐标为 (x,y).

由点 P 在线段 P_1P_2 上，且 $\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=2$，

根据定比分点公式，得

$$x=\frac{-1+2\times3}{1+2}=\frac{5}{3},$$

$$y=\frac{-4+2\times2}{1+2}=0.$$

因此，点 P 的坐标是 $\left(\frac{5}{3},0\right)$.

(2) 设点 P' 的坐标为 (x',y').

由点 P' 在线段 P_1P_2 的延长线上，且 $\lambda'=\frac{P_2P'}{P'P_1}=-\frac{1}{4}$，

根据定比分点公式，得

$$x'=\frac{3+\left(-\frac{1}{4}\right)\times(-1)}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{13}{3},$$

$$y'=\frac{2+\left(-\frac{1}{4}\right)\times(-4)}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}=4.$$

因此，点 P' 的坐标是 $\left(\frac{13}{3},4\right)$.

例 2 已知线段 AB 的中点坐标为 $C(-1,2)$，端点 B 的坐标为 $(2,5)$，求端点 A 的坐标（图 5-9）.

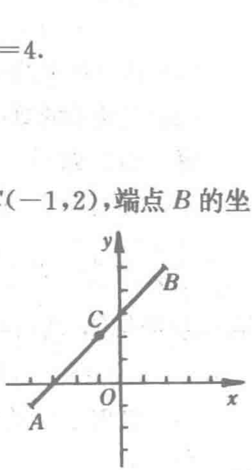


图 5-9

解 设点 A 的坐标为 (x_1,y_1).

因为点 C 为线段 AB 的中点，所以按中点坐标公式，可得

$$-1=\frac{x_1+2}{2},\quad 2=\frac{y_1+5}{2}.$$

$$\therefore\quad x_1=-4,\quad y_1=-1.$$

因此，所求点 A 的坐标为$(-4,-1)$.

本题还可以将 $A(x_1,y_1)$看作$\overline{CB}$的外分点，由 $\lambda=\frac{CA}{AB}=-\frac{1}{2}$和定比分点公式，求得

$$x_1=\frac{-1+\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=-4,$$

$$y_1=\frac{2+\left(-\frac{1}{2}\right)\times 5}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=-1.$$

由此可见，在运用定比分点公式时，用哪个点作为分点是可以灵活选择的，但是，起点、终点、分点一经选定，定比 λ 也随之确定.

例 3 三角形的三个顶点是 $A(3,7)$、$B(5,-1)$、$C(-2,-5)$，求：

(1) 边 AB 上的中线 CD 的长；

(2) 三角形的重心 G 的坐标.

解 (1) 如图 5-10，设边 AB 的中点 D 的坐标为(x,y)，则

$$x=\frac{3+5}{2}=4,\quad y=\frac{7+(-1)}{2}=3,$$

即点 D 的坐标为$(4,3)$.

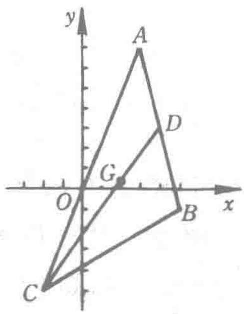


图 5-10

$$\therefore\quad |CD|=\sqrt{[4-(-2)]^2+[3-(-5)]^2}=10.$$

(2) 设重心 G 的坐标为(x',y')，则根据三角形重心的性质，$\frac{CG}{GD}=2$.

代入定比分点公式，得

$$x'=\frac{-2+2\times 4}{1+2}=2,\quad y'=\frac{-5+2\times 3}{1+2}=\frac{1}{3}.$$

所以，三角形的重心 G 的坐标为$(2,\frac{1}{3})$.

习 题 二

1. 填空题：

(1) 已知点 P 分$\overline{P_1P_2}$所成的比 $\lambda=2$，则点 P 分$\overline{P_2P_1}$所成的比 $\lambda'=$________；

(2) 已知点 P 分$\overline{P_1P_2}$所成的比 $\lambda=-2$，则点 P 分$\overline{P_2P_1}$所成的比 $\lambda'=$________.

2. 根据下列端点 P_1、P_2 的坐标，点 P 分$\overline{P_1P_2}$所成的比 λ，求点 P 的坐标：

(1) $P_1(-2,1)$、$P_2(3,-3)$，$\lambda=2$；

(2) $P_1(-5,8)$、$P_2(-1,-2)$，$\lambda=-3$；

(3) $P_1(-6,4)$、$P_2(8,-6)$，$\lambda=1$；

(4) $P_1(6,0)$、$P_2(0,-8)$，$\lambda=1$.

3. 已知线段 P_1P_2 的中点 P 的坐标是$(-1,2)$，点 P_1 的坐标是$(2,5)$，求点 P_2 的坐标.

4. 连结 $P_1(2,y_1)$和 $P_2(x_2,6)$两点所成线段的中点坐标是 $P(3,2)$，求 P_1、P_2 两点的坐标.

5. 三角形的三个顶点是 $A(-3,-2)$、$B(1,4)$、$C(-5,0)$，求：

(1) 三角形的周长；

(2) 边 BC 上的中线 AD 的长；

(3) 三角形的重心 G 的坐标.

6. 设$\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，重

心为 $G(x',y')$，求证

$$x'=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y'=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

7. 已知直角三角形的三个顶点为 $A(a,0)$、$B(0,b)$、$O(0,0)$，

(1) 求斜边 AB 的中点 D 的坐标；

(2) 求证 $|OD|=\frac{1}{2}|AB|$.

二　直　线

5.3　一次函数的图象与直线的方程

初中研究一次函数时，在直角坐标系中画出的一次函数的图象是一条不平行于 y 轴的直线. 例如，函数 $y=2x+1$ 的图象是一条不平行于 y 轴的直线(图 5-11).

可以看出，满足函数式 $y=2x+1$ 的每一对 x、y 的值都是直线 l 上的点的坐标，如数对(0,1)满足函数式，在直线 l 上就有一点 A，它的坐标是(0,1). 反过来，直线 l 上每一点的坐标都满足函数式，如直线 l 上点 P 的坐标是(1,3)，数对(1,3)就满足函数式.

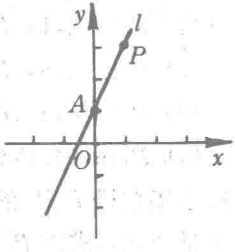


图　5-11

一般地，一次函数 $y=kx+b$ 的图象是一条不平行于 y 轴的直线，它是以满足 $y=kx+b$ 的每一对 x、y 的值为坐标的点构成的. 由于函数 $y=kx+b$ 可以看作二元一次方程 $kx-y+b=0$，因此，我们也可以说，这个方程的解和这条直线上的点也存在这样的一一对应关系.

以一个方程的解为坐标的点都是某条直线上的点；反过

来，这条直线上点的坐标都是这个方程的解，这时，这个方程就叫做这条**直线的方程**，这条直线叫做这个**方程的直线**. 例如，方程 $2x-y+1=0$ 是直线 l 的方程，直线 l 是方程 $2x-y+1=0$ 的直线(图 5-11).

在解析几何里研究直线时，就是利用直线与方程的这种关系，建立直线的方程，并通过方程来研究直线的有关问题.

5.4 直线的倾斜角和斜率

1. 直线的倾斜角和斜率

为了研究直角坐标系中的直线方程，需要研究直线的倾斜角和斜率.

对于一条与 x 轴相交的直线 l，如果 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到与直线 l 重合时所转的最小正角为 α，那么 α 叫做直线 l 的**倾斜角**(图 5-12).

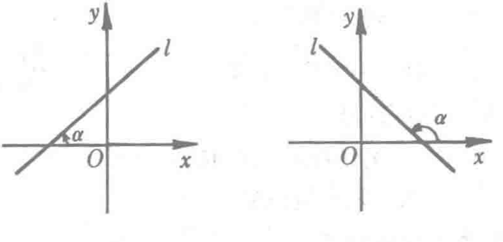


图 5-12

对于一条与 x 轴平行或重合的直线 l，我们规定直线 l 的倾斜角为 0°. 因此，直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$(或 $0\leqslant\alpha<\pi$).

倾斜角不是 90°的直线，它的倾斜角的正切叫做这条直

线的**斜率**.直线的斜率常用 k 表示,即

$$k=\mathrm{tg}\alpha.$$

倾斜角是 90°的直线没有斜率,这时,直线与 x 轴垂直.

不难得到,直线的倾斜角 α 与它的斜率 k 之间有如下关系:

当 $0°<\alpha<90°$时, $k>0$;

当 $90°<\alpha<180°$时, $k<0$;

当 $\alpha=0°$时, $k=0$;

当 $\alpha=90°$时, k 不存在.

例 1 如图 5-13,直线 l_1 和 l_2 相交于点 A,l_1、l_2 分别与 x 轴相交于 B、C,又 $\angle ABC=60°$,$\angle ACB=45°$,求直线 l_1、l_2 的斜率 k_1、k_2.

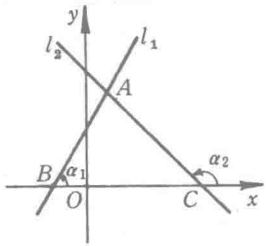


图 5-13

解 直线 l_1 的倾斜角

$$\alpha_1=\angle ABC=60°,$$

$$\therefore\quad k_1=\mathrm{tg}\alpha_1=\mathrm{tg}60°=\sqrt{3}.$$

直线 l_2 的倾斜角

$$\alpha_2=180°-\angle ACB=135°,$$

$$\therefore\quad k_2=\mathrm{tg}135°=-\mathrm{tg}45°=-1.$$

2.直线的斜率公式

在直角坐标系中,如果已知两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$,那么,直线 P_1P_2 就是确定的.当直线 P_1P_2 的倾斜角不等于 90°时,这条直线的斜率也是确定的.下面来研究怎样用两点的坐标来表示直线 P_1P_2 的斜率.

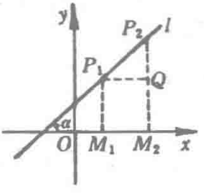
设直线 P_1P_2 的倾斜角是 α,斜率是 k.从 P_1、P_2 分别向 x

轴作垂线 P_1M_1、P_2M_2，垂足分别为 $M_1(x_1,0)$、$M_2(x_2,0)$，再作 $P_1Q\perp P_2M$，垂足为 Q，则点 Q 的坐标为 (x_2,y_1).

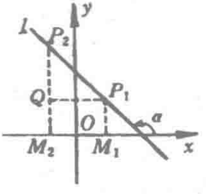
在图 5-14(1)中，$\alpha=\angle QP_1P_2$，

$$\operatorname{tg}\angle QP_1P_2=\frac{QP_2}{P_1Q}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

$$\therefore\quad k=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\angle QP_1P_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$



(1)



(2)

图 5-14

在图 5-14(2)中，$\alpha=180°-\angle QP_1P_2$，

$$\operatorname{tg}\angle QP_1P_2=\frac{QP_2}{QP_1}=\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2},$$

$$\therefore\quad k=\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}\angle QP_1P_2=-\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

由此可得经过 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 两点的直线的斜率公式：

$$\boldsymbol{k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}.$$

必须注意，当 $x_1=x_2$ 时，倾斜角是 90°，斜率 k 不存在.

例 2 求经过下列两点的直线的斜率和倾斜角：

(1) $A(5,1)$、$B(3,-1)$；

(2) $C(1,-\sqrt{3})$、$O(0,0)$.

解 (1) 如图 5-15,

$k_1=\frac{-1-1}{3-5}=1$,即 $\operatorname{tg}\alpha_1=1$.

又 $\because\ 0\leqslant\alpha_1<\pi$, $\therefore\ \alpha_1=\frac{\pi}{4}$.

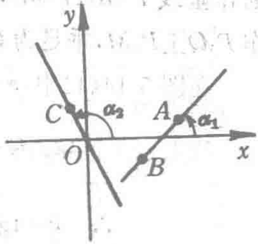


图 5-15

(2) $k_2=\frac{0-(-\sqrt{3})}{0-1}=-\sqrt{3}$,

即 $\operatorname{tg}\alpha_2=-\sqrt{3}$.

又 $\because\ 0\leqslant\alpha_2<\pi$,

$$\therefore\ \alpha_2=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}.$$

例 3 直线 l 的倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{6}$,直线 l 上一点 A 的坐标是 $(1,\sqrt{3})$,另一点 B 的横坐标是 4,求点 B 的坐标.

解 设点 B 的坐标是 $(4,y)$.

$$\because\ k=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3},\text{又}\ \because\ k=\frac{y-\sqrt{3}}{4-1}=\frac{y-\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore\ \frac{y-\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad y=2\sqrt{3}.$$

因此,所求点 B 的坐标是 $(4,2\sqrt{3})$.

习 题 三

1. 在直角坐标系中,画出下列方程表示的直线:

(1) $y=3x$; (2) $3x-y+1=0$;

(3) $3x-y-2=0$; (4) $3x+y+1=0$.

2. 在下列表中,根据直线斜率 k 的值来确定直线倾斜角 α 的值: