CAMBRIDGE

现代数学译丛 26

# Bäcklund变换和Darboux变换
## ——几何与孤立子理论中的应用

〔澳〕C. Rogers W. K. Schief 著
周子翔 译

科学出版社

现代数学译丛26

# Bäcklund 变换和 Darboux 变换
## ——几何与孤立子理论中的应用

〔澳〕C. Rogers W. K. Schief 著

周子翔 译



科学出版社

北京

图字：01-2015-2594 号

## 内 容 简 介

本书大量介绍了曲面的经典微分几何同现代孤立子理论的联系. 对于从十九世纪和二十世纪初著名的几何学家如 Bianchi, Bäcklund, Eisenhart 关于保持某些特殊类型的曲面的几何性质不变的变换，作者提供了大量文献. 书中以大量的篇幅介绍了 Bäcklund-Darboux 变换、它们的非线性叠加原理以及在孤立子理论中的重要性. 本书的宗旨是介绍这些变换以及曲面的经典微分几何同孤立子理论中的非线性方程的联系. 从几何角度来看，孤立子方程来源于在 Bäcklund-Darboux 变换下不变的各种曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组.

本书适合应用数学和数学物理方面的高年级本科生和研究生阅读.

*Bäcklund and Darboux Transformations-Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*, 1st edition (978-0-521-01288-1) by C. Rogers, W. K. Schief first published by Cambridge University Press 2002


图书在版编目(CIP)数据

Bäcklund 变换和 Darboux 变换：几何与孤立子理论中的应用/(澳)罗杰斯(Rogers, C.), (澳)希弗(Schief, W. K.)著；周子翔译.—北京：科学出版社, 2015.5
(现代数学译丛)
书名原文：Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory
ISBN 978-7-03-044342-7

Ⅰ. ①B… Ⅱ. ①罗… ②希… ③周… Ⅲ. ①微分几何 ②孤立子 Ⅳ. ①O186.1 ②O572.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 105736 号

责任编辑：李 欣／责任校对：张怡君
责任印制：张 倩／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 5 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2015 年 5 月第一次印刷 印张：22
字数：441 000

**定价：128.00 元**
(如有印装质量问题，我社负责调换)

**纪念英国皇家学会会员 David Crighton 教授**

**献给 Christel 和 Wolfgang**

Colin Rogers 是新南威尔斯大学荣誉退休教授，澳大利亚研究理事会(ARC)复杂系统的数学与统计卓越中心特约研究员，剑桥大学 Clare Hall 的终身成员. 他毕业于牛津大学，在 Nottingham 大学获博士学位，是专著 *Bäcklund Transformations and Their Applications* (1982)的作者之一. 他是澳大利亚科学院院士，2011 年由于他的数学研究成果获得该科学院的 Hannan 数学科学奖，他还获得了澳大利亚政府的百年奖章.

Wolfgang K. Schief 是新南威尔斯大学教授，该校数学与统计学院应用数学系主任. 他还是柏林科技大学微分几何教授和新南威尔斯大学 ARC 研究员，澳大利亚研究理事会(ARC)复杂系统的数学与统计卓越中心首席研究员，香港理工大学应用数学系工程与应用数学名誉研究员.①

①有关两位作者的信息已由作者本人更新.——译者

# 译 者 序

本书的作者 Rogers 教授和 Schief 教授在孤立子理论及其同微分几何的联系方面作出了大量重要的工作. 虽然我在十年前才同他们第一次见面, 但早在二十世纪八十年代中期, 当我开始学习孤立子理论时, 所学的两本书之一就是 Rogers 教授和 Shadwick 教授所著的 *Bäcklund Transformations and Their Applications* 一书, 后来又读过 Rogers 和 Schief 教授的一些文章. 本书 *Bäcklund and Darboux Transformations — Geometry and Modern Applications in Soliton Theory* 出版于 2002 年, 是孤立子几何理论方面的著名著作, 谷超豪先生在该书出版之际收到 Rogers 教授赠书后就曾向我们推荐过. 所以当 Rogers 教授提议让我将此书翻译成中文时, 我欣然接受.

非常感谢作者提供了本书英文版的全部 LaTeX 源文件, 包括所有插图的文件, 这不但使得翻译时节省了大量输入公式的工作, 并且避免了可能产生的打印错误, 特别是使得中译本的插图能保持原来的质量. 为了中译本的出版, 作者专门更新了参考文献中所有在英文原版书出版时尚为预印本的文献目录, 并在本书最后列出了英文原版书出版后新完成的文献目录.

本书的出版得到了国家自然科学基金 (No. 11171073) 的资助. 在出版过程中, 科学出版社的李欣编辑做了大量的工作, 在此表示感谢.

译 者

2014 年 9 月

# 序　言

"唯有联结"

—— E. M. Forster,《霍华德庄园》

经典曲面微分几何和现代孤立子理论之间已经建立了深入的联系. 微分几何中的 Bäcklund 变换以及以 Levy 变换和基本变换形式出现的 Darboux 型变换成为孤立子理论中产生非线性方程解的重要工具. Eisenhart 在他 1922 年出版的专著《曲面的变换》的序中断言:

> *在过去 25 年里, 欧氏空间中曲面微分几何方面的许多进展同某一类型的曲面到同一类型的曲面之间的变换有关.*

著名的几何学家, 如 Bianchi, Calapso, Darboux, Demoulin, Guichard, Jonas, Ribaucour, Weingarten 都对具有各类变换的曲面类作了详细的研究.

该书主要介绍在 Bäcklund-Darboux 变换下具有不变性的曲面类. Bäcklund 变换下的不变性已经成为所有孤立子方程的共性. 从几何角度来看, 孤立子方程来源于许多在 Bäcklund-Darboux 变换下不变的曲面的非线性 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组, 这些曲面的线性 Gauss-Weingarten 方程组在加入了 Bäcklund 参数后给出非线性孤立子方程所相应的线性表示.

于是, 起源于十九世纪的 Bäcklund-Darboux 变换架起了经典微分几何和现代孤立子理论之间的桥梁. 伪球曲面、常平均曲率曲面、Bianchi 曲面、等温曲面是一些典型的曲面, 它们出现在经典文献中且具有 Bäcklund 变换以及相关的非线性叠加原理和可换性定理. 对于与这些曲面相联系的孤立子方程, 可换性定理提供了递推生成这些方程解的纯代数方法.

该书将以 Bäcklund-Darboux 变换为媒介, 介绍十九世纪和二十世纪早期经典微分几何的结果同当代孤立子理论之间的许多联系, 所用的方法在相当程度上基于 Darboux 和 Bianchi 的经典工作. 孤立子理论的研究者通过该书可了解相应问题的几何背景. 该书也可作为应用数学或数学物理方向的大学高年级学生或研究生的教科书, 在新南威尔士大学, 孤立子的几何理论课程已开设了多年.

# 前言与摘要

曲线和曲面的微分几何起源于十九世纪早期 Monge (1746-1818) 和 Gauss (1777-1855) 的奠基性工作. Monge 的主要贡献包含在他于 1807 年出版的《分析在几何中的应用》(*Applications de l'Analyse à la Géometrie*) 一书中. 该书 1850 年的版本有着特别的价值, 它包含 Liouville (1820-1882) 写的一个注记, 其中介绍了 Frenet (1816-1888), Serret (1819-1885), Bertrand (1822-1900), Saint-Venant (1796-1886) 等名人的工作, 其中 Saint-Venant 在几何方面的研究工作主要基于他对弹性问题的兴趣. Gauss 对曲面几何的研究源于对测地线的研究, 该项研究得到汉诺威选帝侯的资助, 这些工作包含于他在 1828 年出版的专著《曲面的一般研究》(*Disquisitiones Generals Circa Superficies Curvas*) 中. 书中 Gauss 建立了 Gauss 方程组, 它是后来曲面分析的基础. Gauss 方程组加上一些特殊类型曲面上的对称性成为联系经典微分几何和现代孤立子理论的基础, 而此联系是本书要讨论的中心.

孤立子理论也起源于十九世纪早期. 1834 年, 苏格兰工程师 John Scott Russell 首次在 Edinburgh 附近的运河中发现了峰状的波, 1965 年在 Kruskal 和 Zabusky 研究著名的 Fermi-Pasta-Ulam 问题时该现象被重新发现, 并被命名为*孤立子*. Scott Russell 发现这个"巨大的行波"的波速正比于它的高度. 1844 年, 他在给英国科学促进协会的报告中, 生动描述了一个水箱实验, 以重现这个大波幅的水波, 同时也描述了如何产生两个这样的波的方法. 但是, Scott Russell 的实验只能持续一小段时间, 因此不可能发现孤立子完整的相互作用性质, 而且在当时既没有非线性发展方程来描述这类波的传播, 也没有足够的分析方法来预测它们的相互作用性质.

1895 年, 两位荷兰数学家 Korteweg 和 de Vries 得到了一个非线性波方程, 现在就称为 Korteweg-de Vries 方程 (KdV 方程), 它的标准形式是

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0. \tag{1}$$

它描述了矩形运河中长波的运动, 并通过一个简单的行波解从理论上肯定了 60 年前 Scott Russell 在联合运河中看到的孤立波. 但是, 通常人们不太了解的是, 早在 1877 年 Boussinesq 在专著《流动水的理论》(*Essai sur la Théorie des Eaux Courantes*) 中已经建立了现在所称的 Korteweg-de Vries 方程. 更早些, Boussinesq 在 1871 年的两篇文章中已出现了描述矩形运河中水波运动的方程组, 它等价于 KdV 方程.

1960 年, Gardner 和 Morikawa 在研究磁流体波的传播时再次发现了 KdV 方程, 进而发现它是固体、液体和气体的各种理论中描述大振幅波的一个标准模型.

1965 年, 著名的 Fermi-Pasta-Ulam 问题中再现 KdV 方程标志着现代孤立子理论的诞生. 在 Kruskal 和 Zabusky 先驱性的研究中, 从带有三次项的非简谐格点模型的连续极限得到了 KdV 方程, 他们通过计算表明, 在这个非线性模型中存在的孤立波在相互作用后仍保持它们的波幅和速度, 为此他们创造了一个名词 *soliton* (孤立子) 来表示这种最初由 Scott Russell 在流体中发现的波. 然而, 当时并不知道如何得到解的解析表达式以分析这种相互作用.

另一方面, 一种描述孤立子相互作用的普遍性方法起源于 Bäcklund 在十九世纪给出的一种变换, 当时他用这种变换来生成伪球曲面, 即具有负常 Gauss 曲率 $K=-1/\rho^2$ 的曲面. 对这类曲面的研究至少开始于 Edmond Bour 在 1862 年的工作, 他从渐近坐标表示的伪球曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组出发导出了著名的 sine-Gordon 方程

$$\omega_{uv}=\frac{1}{\rho^2}\sin\omega. \tag{2}$$

随后, sine-Gordon 方程被 Bonnet 于 1867 年、Enneper 于 1868 年分别用类似的方法独立得到.

1879 年, Bianchi 用他的变换给出了伪球曲面的纯几何构造. 1882 年, Bäcklund 给出了他著名的变换 $\mathbf{B}_\sigma$, 由该变换可以通过递推方法构造一系列伪球曲面. 1883 年, Lie 给出了分解 $\mathbf{B}=\mathbf{L}_\sigma^{-1}\mathbf{B}_{\pi/2}\mathbf{L}_\sigma$, 它表明 Bäcklund 变换 $\mathbf{B}_\sigma$ 可用不依赖参数的 Bianchi 变换 $\mathbf{B}_{\pi/2}$ 通过 Lie 变换 $\mathbf{L}_\sigma$ 的共轭得到, 从而 Lie 变换的作用是在最初的 Bianchi 变换中加入关键的参数 $\sigma$.

1892 年, 在《伪球曲面的 Bäcklund 变换》(*Sulla Trasformazione di Bäcklund perle Superficie Pseudosferiche*) 一文中, Bianchi 给出了一个重要的性质, 即 Bäcklund 变换具有可换性 $\mathbf{B}_{\sigma_2}\mathbf{B}_{\sigma_1}=\mathbf{B}_{\sigma_1}\mathbf{B}_{\sigma_2}$, 由此即可导出非线性叠加原理. Bianchi 的可换性定理在物理上的重要性直到 1953 年 Seeger 等将它应用于晶体位错的研究时才显示出来. 根据 Frenkel 和 Kontorova 于 1938 年建立的晶体位错理论, 他们所称的特征运动可从经典可换性定理得到. 现在所称的带扭结型位错的呼吸子的相互作用性质既可从可换性定理分析得到, 也可从图像上看到. 1965 年在对 KdV 方程的数值计算中发现的孤立子的典型特征, 包括在相互作用中保持速度和形状不变以及相移的存在, 对于 sine-Gordon 方程来说, 在 Bianchi 的上述文章中都已用可换性定理得到.

1958 年, Skyrme 从描述粒子相互作用的非线性理论出发导出了高维的 sine-Gordon 方程, 1965 年, Josephson 在对超导的隧道效应的开创性研究 (后来因此获得诺贝尔奖) 中也得到了同样的方程. 1967 年, Lamb 在分析超短光脉冲的传输时得到了经典的 sine-Gordon 方程, 他借助于 Seeger 等早期的工作, 用 Bäcklund 变换与可换性定理得到了双孤立子解的解析表达式. 随后在 1971 年, 他用可换性定理

分析了 $2N\pi$ 光脉冲到 $N$ 个稳定的 $2\pi$ 脉冲的分裂. 这个分裂现象的实验在 1970 年已由 Gibbs 和 Slusher 完成, 他们在铷蒸气中将一个 $6\pi$ 脉冲分裂成了三个 $2\pi$ 脉冲. 同年, Scott 将可换性定理用于长 Josephson 结的研究.

1973 年, Wahlquist 和 Estabrook 发现, KdV 方程和 sine-Gordon 方程一样, 也具有保持方程不变的 Bäcklund 型的变换, 同时也具有可换性定理. 用可换性定理可产生多孤立子解, 从而可用解析方法得到 Zabusky 和 Kruskal 在对 KdV 方程的数值研究中得到的孤立子的相互作用性质.

1974 年, Lamb 用 Clairin 于 1910 年建立的古典方法构造了非线性 Schrödinger 方程 (NLS)

$$\mathrm{i}q_t + q_{xx} + \nu q^2|q| = 0 \tag{3}$$

的 Bäcklund 变换及其非线性叠加原理. NLS 方程在光纤中有着重要的应用. 该方程好像最初是由 Kelley 和 Talanov 分别于 1965 年在研究非线性 Kerr 介质中光束的自聚焦现象时建立的. 1968 年, Zakharov 在研究深水重力波时导出了 NLS 方程. 1971 年, Hasimoto 在研究孤立细涡丝的流体动力学时近似得到了此方程. NLS 方程也可从几何中导出, 它同 $\mathbb{R}^3$ 中不可伸长曲线的运动相关. 可积方程同不可伸长曲线的空间运动的联系自然导致了我们对孤立子几何理论的研究.

1974 年, 人们已熟悉典型方程 (1)–(3) 的 Bäcklund 变换, 同年美国国家自然科学基金会在 Vanderbilt 大学举行会议来评估 Bäcklund 变换的研究现状及其潜在的作用. 1973 年, 著名的 ZS-AKNS 谱问题由 Ablowitz 等建立, 许多可用反散射方法求解的 1+1 维非线性发展方程都可归结为 ZS-AKNS 系统的相容性条件. H. H. Chen 借助于 ZS-AKNS 系统用漂亮的方法导出了 (1)–(3) 的自 Bäcklund 变换.

ZX-AKNS 系统的线性结构导致了另一类起源于十九世纪的变换 ——Darboux 变换在孤立子理论中的应用. Darboux 变换开始于 1882 年 Darboux 对 Sturm-Liouville 问题的研究. 然而, 这是 Moutard 在 1878 年将线性双曲型方程约化为标准形式时所建立的变换的特殊情形. 1955 年, Crum 对 Sturm-Liouville 问题建立了递推的 Darboux 变换. 1975 年, Wadati 等用 Crum 变换生成了与 ZX-AKNS 系统相关的可积方程的多孤立子解. 从几何上来看, 这些递推的 Darboux 变换对应于经典曲面论中的 Lery 序列, 见 Eisenhart 的《曲面的变换》(*Transformations of Surfaces*).

1976 年, Lund 和 Regge 在研究后来以他们命名的孤立子系统时, 有了一个重要的发现, 即 sine-Gordon 方程对应的 ZS-AKNS 系统就是伪球曲面的 Gauss-Weingarten 方程组的 $2\times 2$ 矩阵表示. 同年 Pohlmeyer 独立发现了这个联系.

于是, 到 1976 年, 起源于曲面微分几何中的 Bäcklund 变换与 Darboux 变换同孤立子理论的关系已经非常清楚了. 本书的目的是将这些问题联系在一起, 不但要

介绍它们在历史上的联系, 也要介绍它们在现代的发展. 本书是 Rogers 和 Shadwick 1982 年的专著的进一步发展, 该书用非几何方式介绍了 Bäcklund 变换及其在孤立子理论和连续介质力学中的应用. 本书中的几何观点在很大程度上受到了 Antoni Sym 于 1981 年出版的《孤立子理论就是曲面论》(*Soliton Theory is Surface Theory*) 的启发.

第 1 章介绍了经典 Bäcklund 变换及其变化形式同现代孤立子理论的联系. 首先利用渐近坐标下双曲曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组导出了 Bianchi 所给出的经典非线性方程组, 在伪球曲面的特殊情形就得到著名的 sine-Gordon 方程. 1.2 节介绍了伪球曲面的几何构造以及 sine-Gordon 方程的自 Bäcklund 变换的导出. 1.3 节中, 通过 Bäcklund 变换导出了 Bianchi 的可换性定理, 并且给出了一个交换格, 由此可用纯代数方法得到多孤立子解. 1.4 节构造了 sine-Gordon 方程的单孤立子解和双孤立子解对应的伪球曲面. 静态单孤立子解对应于伪球面, 非静态单孤立子解对应于 Dini 曲面, 即由曳物线通过同时旋转和平移而得到的螺旋面. 进而用可换性定理得到了双孤立子解, 并由此得到了对应于呼吸子 (关于空间局域并关于时间周期的解) 的伪球曲面. 1.5 节中, 直接得到了平行于伪球曲面的曲面的 Bäcklund 变换, 这使得经典 Bäcklund 变换的作用扩展到了经典 Weingarten 曲面. 本章的最后部分研究一类重要的与孤立子相关的曲面 ——Bianchi 曲面, 它由方程组

$$
\begin{gathered}
a_v + \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a - \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b\cos\omega = 0,\\
b_u + \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b - \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a\cos\omega = 0,\\
\omega_{uv} + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_u}{\rho}\frac{b}{a}\sin\omega\right)_u + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_v}{\rho}\frac{a}{b}\sin\omega\right)_v - ab\sin\omega = 0,\\
\rho_{uv} = 0
\end{gathered}
\tag{4}
$$

确定, 其中 $\mathcal{K} = -1/\rho^2$ 是 Gauss 曲率, $u, v$ 是渐近坐标. 1890 年, Bianchi 给出了这类双曲曲面的纯几何构造. 约束 $\rho_{uv} = 0$ 于一百年之后被 Levi 和 Sym (1990) 在研究一类具有可积的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程组的双曲曲面时重新用到, 他们的方法是对双曲曲面的 Gauss-Weingarten 方程组的 $2 \times 2$ 矩阵表示通过 Lie 群方法引入一个谱参数. 1.6 节用球表示证明了 Bianchi 方程组 (4) 事实上等价于广义的非线性 $\sigma$ 模型

$$
\begin{gathered}
(\rho N N_u)_v + (\rho N N_v)_u = 0, \quad N^2 = \mathbb{1}, \quad N^\dagger = N,\\
\rho_{uv} = 0.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

于是, 非线性 $\sigma$ 模型这一现代孤立子理论中的重要系统也可以来源于经典微分几

何. 方程组 (5) 的一个向量形式隐含在 Bianchi 的工作中.

Bianchi 方程组的一个椭圆形式导致了广义相对论中著名的 Ernst 方程

$$\mathcal{E}_{z\bar{z}}+\frac{1}{2}\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho}\mathcal{E}_z+\frac{1}{2}\frac{\rho_z}{\rho}\mathcal{E}_{\bar{z}}=\frac{\mathcal{E}_z\mathcal{E}_{\bar{z}}}{\Re(\mathcal{E})},\quad \rho_{z\bar{z}}=0. \tag{6}$$

最后, 用几何方法得到了联系两个双曲曲面的 Bäcklund 变换, 并在 Bianchi 方程组的特殊条件下得到相应的变换. 对于退化的种子 Bianchi 曲面, 用 Bäcklund 变换产生了单孤立子 Bianchi 曲面.

第 2 章讨论如何从曲线和曲面的运动导出孤立子曲面. 2.1 节从具有常曲率或常挠率的不可伸长曲线的运动中导出了 sine-Gordon 方程. 在常挠率情形, 曲线扫出一个伪球曲面. 2.2 节中, 应用 $so(3)$ 与 $su(2)$ 的同构, 从 $3\times 3$ Gauss-Weingarten 表示出发得到了 sine-Gordon 方程的 AKNS 谱问题. 2.3 节讨论了与 sine-Gordon 方程相容的孤立子方程所相应的伪球曲面的运动, 其中一种运动与非简谐格点模型的连续极限相联系, 而此模型联系于重要的变形 KdV 方程 (mKdV 方程)

$$\omega_t+\omega_{xxx}+6\omega^2\omega_x=0. \tag{7}$$

mKdV 方程与 KdV 方程通过 Miura 变换相联系, 它同 KdV 方程一样, 在物理中有重要的应用, 例如描述等离子体物理中的 Alfvén 波的传播.

另一类伪球曲面的重要运动是纯法向运动, 它产生一类由 Weingarten 和 Bianchi 研究过的系统, 该系统可在 Eisenhart 的书《曲线和曲面的微分几何》(*A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*) 中找到, 它与曲面的三元正交系统相联系, 其中一族是伪球面. 该系统的形式为

$$\begin{aligned}
&\theta_{xyt}-\theta_x\theta_{yt}\cot\theta+\theta_y\theta_{xt}\tan\theta=0,\\
&\left(\frac{\theta_{xt}}{\cos\theta}\right)_x-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\sin\theta\right)_t-\frac{\theta_y\theta_{yt}}{\sin\theta}=0,\\
&\left(\frac{\theta_{yt}}{\sin\theta}\right)_y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\cos\theta\right)_t+\frac{\theta_x\theta_{xt}}{\cos\theta}=0,\\
&\theta_{xx}-\theta_{yy}=\frac{1}{\rho^2}\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned} \tag{8}$$

对连续格点模型和上述系统, Bäcklund 变换可以通过作用在 AKNS 系统上的规范变换得到. 在该章最后的 2.4 节, 用零挠率的不可伸长曲线的运动得到了 mKdV 方程, 然后研究了孤立子 Dini 曲面的运动并构造了曲面的三元正交 Weingarten 系统.

第 3 章研究经典Tzitzeica 曲面. 如同伪球曲面, Tzitzeica 曲面也与孤立子有着密切的联系. 二十世纪初, 罗马尼亚几何学家Tzitzeica 发现了一类曲面, 它们同下

列重要的双曲型方程

$$(\ln h)_{\alpha\beta} = h - h^{-2} \tag{9}$$

相联系, 七十年后人们又发现它们与孤立子有着联系. Tzitzeica 对与此方程相联系的曲面的研究导出了仿射几何中的一个重要概念 —— 仿射球, 它由 Tzitzeica 方程 (9) 所描述.

在 3.1 节中, 引入了一类由 Tzitzeica 条件 $\mathcal{K} = -c^2 d^4$, $c =$ 常数 所决定的曲面 $\Sigma$, 这里 $d$ 是 $\Sigma$ 上一点的切平面到原点的距离. Tzitzeica 方程的线性表示首先由 Tzitzeica 给出, 随后德国几何学家 Jonas 在 1953 年重新得到了这个线性表示并用其对偶从方程 (9) 导出了另一个重要的方程 —— 仿射球方程

$$\left(\frac{R_u}{R^2 v^2}\right)_u = \left(\frac{RR_v}{v^2}\right)_v. \tag{10}$$

这个方程后来又从一类具有三参数的本构方程的各向异性气体动力学方程组的Lagrange 描述中被重新导出. 在 3.2 节中, 用几何方法导出了一族 Tzitzeica 曲面的 Bäcklund 变换, 并阐述了它同 1878 年产生的经典 Moutard 变换的联系. 然后, 通过将 Bäcklund 变换作用于 Tzitzeica 方程的平凡解 $h = 1$ 上得到了旋转对称的仿射球, 进而构造了方程 (9) 的单孤立子和双孤立子解所对应的 Tzitzeica 曲面, 特别给出了对应于呼吸子解的 Tzitzeica 曲面.

Tzitzeica 方程包含在另一个更早被研究的经典系统中, 这个孤立子系统就是二维 Toda 格模型

$$(\ln h_n)_{uv} = -h_{n+1} + 2h_n - h_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

在 Darboux 于 1887 出版的专著中出现的这个非线性微分差分方程, 将近一个世纪以后在现代孤立子理论中被重新发现. 在 Darboux 的工作中, 此方程是通过 Laplace-Darboux 变换的迭代得到的, 而 Laplace-Darboux 变换同现代 Moutard 变换一样, 起源于将线性双曲型方程约化到标准形式的递推过程. 它们在经典曲面微分几何中的共轭网理论中有着有趣的应用. Laplace-Darboux 变换的这个性质在 Eisenhart 的《曲面的变换》(*Transformations of Surfaces*) 中有详细的介绍. 在 3.3 节中介绍了 Laplace-Darboux 变换及其相关的不变性, 并用 Laplace-Darboux 变换导出了 Toda 格方程 (11), Tzitzeica 方程是一个特殊的周期 Toda 方程. 进一步, 给出了一般的二维 Toda 格模型的一个变换, 并且它保持周期性. 此外, 重复应用 Laplace-Darboux 变换可产生一系列曲面, 其上的参数曲线构成共轭网.

在第 4 章中我们集中讨论 NLS 方程 (3). 在十九世纪, 它并没有被几何学家重视, 虽然它有一个简单的几何起源, 即空间中一条不可伸长曲线以速度 $\boldsymbol{v} = \kappa\boldsymbol{b}$ 的运动, 其中 $\kappa$ 是曲线的曲率, $\boldsymbol{b}$ 是它的从法向量. 4.1 节中, 用几何方法导出了 NLS 方

程, 给出了对应于单孤立子和呼吸子的孤立子曲面及其几何性质, 同时给出了 NLS 方程与 Heisenberg 自旋方程

$$\boldsymbol{S}_t = \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}_{ss}, \quad \boldsymbol{S}^2 = 1 \tag{12}$$

的联系, 这里 $t$ 是时间, $s$ 是弧长. 4.2 节中, 用几何方法导出了一个与 NLS 方程相联系的孤立子系统 ——Pohlmeyer-Lund-Regge 模型

$$\begin{gathered}\theta_{\xi\xi} - \theta_{\eta\eta} - \epsilon^2 \cos\theta \sin\theta + (\phi_\xi^2 - \phi_\eta^2) \cos\theta \operatorname{cosec}^3\theta = 0, \\ (\phi_\xi \cot^2\theta)_\xi = (\phi_\eta \cot^2\theta)_\eta,\end{gathered} \tag{13}$$

该方程组起源于对相对论性涡丝的研究, 它还与锐线自感应透明 (SIT) 方程组

$$\begin{aligned}\chi_{tx} &= \sin\chi + \nu_t\nu_x \tan\chi, \\ \nu_{tx} &= -\nu_x\chi_t \cot\chi - \nu_t\chi_x(\cos\chi \sin\chi)^{-1}\end{aligned} \tag{14}$$

相关, 而后者源于未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组

$$\begin{gathered}E_x = P, \quad P_t = EN, \\ N_t = -\frac{1}{2}(\bar{E}P + E\bar{P}), \quad N^2 + P\bar{P} = 1.\end{gathered} \tag{15}$$

在此方程组中, $E$ 表示电场强度的慢变振幅, $P = e^{i\nu}\sin\chi$ 表示极化强度的慢变振幅, $N = \cos\chi$ 表示原子反转率. 未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组又同受激 Raman 散射方程组 (SRS)

$$A_{1X} = -SA_2, \quad A_{2X} = \bar{S}A_1, \quad S_T = A_1\bar{A}_2 \tag{16}$$

相联系, 这里 $A_1, A_2$ 分别是泵浦波和 Stokes 波的电场强度的振幅. 通过 NLS 方程与未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组的联系, 我们得到了 SIT 方程组和 SRS 方程组与 NLS 方程的联系, 进而通过 NLS 方程的 AKNS 表示的特征函数对的适当时间演化导出了方程组 (15). 用几何语言来说, 这个未泵浦 Maxwell-Bloch 方程组可从 Hasimoto 曲面的某种运动得到, 就像 mKdV 方程或 Weingarten 方程组可从伪球曲面的某种运动得到一样. 4.3 节中, 用另一几何方法再次得到 NLS 方程, 该方法源于 Marris 和 Passman 在 1969 年对一类流体运动的动力学分析. 在此表示下, 通过生成 Hasimoto 曲面得到了 NLS 方程的自 Bäcklund 变换, 进而得到了 "烟圈" 型的关于空间周期的解.

第 5 章研究另一类与孤立子有关的经典曲面 —— 等温曲面. 这类曲面可能是 Lamé 在 1837 年研究热传导问题时引入的. 1867 年, Bonnet 研究了一类重要的特

殊等温曲面. 这些 Bonnet 曲面具有非平凡的等距族, 它们保持主曲率 $\kappa_1$ 和 $\kappa_2$ 不变, 从而保持 Gauss 曲率 $\mathcal{K}=\kappa_1\kappa_2$ 和平均曲率 $\mathcal{M}=(\kappa_1+\kappa_2)/2$ 不变. 5.1 节中, 建立了用曲率线坐标表示的等温曲面的 Gauss-Mainardi-Codazzi 方程

$$\begin{gathered}\theta_{xx}+\theta_{yy}+\kappa_1\kappa_2 e^{2\theta}=0,\\ \kappa_{1x}+(\kappa_1-\kappa_2)\theta_x=0,\qquad \kappa_{2y}+(\kappa_2-\kappa_1)\theta_y=0,\end{gathered}\tag{17}$$

同时给出了它的一个约化

$$\left(\frac{z_{xy}}{z}\right)_{xx}+\left(\frac{z_{xy}}{z}\right)_{yy}+(z^2)_{xy}=0,\tag{18}$$

这是一个四阶非线性方程, 最初由 Calapso 在 1903 年得到.

5.2 节中引入了 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中等温曲面的概念, 并将经典等温方程组 (17) 推广到一个新的可积系统. 5.3 节中构造了一个向量 Calapso 方程组及其 Lax 对. 此 Calapso 方程组推广了表示 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中等温曲面的方程 (18). 静态 Davey-Stewartson II方程与之相联系, 从而可用来描述 $\mathbb{R}^4$ 中的等温曲面, 类似地, 静态 Davey-Stewartson III 方程可用来描述 Minkowski 空间 $\mathbb{M}^4$ 中的等温曲面. 5.4 节讨论孤立子理论中很重要的共轭网变换的经典结果, 给出共轭网方程在所谓的基本变换下的不变性, 而基本变换可分解为一个梳状变换和两个径向变换的复合. 在 5.5 节中说明, $\mathbb{R}^3$ 中这个经典结果事实上在任何维数中都成立, 曲率线网的 Ribaucour 变换这一经典概念也作了相应的推广. 利用这些结论可得到 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中等温曲面的 Bäcklund 变换. 5.6 中构造了 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中共轭网的基本变换的可换性定理, 并给出了各种几何应用, 进而建立了 Bianchi 四边形的平面性、共圆性及常交比性. 5.7 节中, 对一个与 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中等温曲面相联系的向量 Calapso 方程组, 得到了它的 Bäcklund 变换及其可换性定理. 5.8 节中用 Darboux-Ribaucour 变换和 Moutard 变换构造了经典等温方程组和 Calapso 方程的显式解, 得到了单孤立子等温曲面、Calapso 方程的团块解以及 Dupin 四次圆纹曲面型的可积曲面, 并由此给出, zoomeron 方程的局域解可通过 Lie 点对称与重要的 Davey-Stewartson III 方程的 dromion 解相联系.

第 6 章介绍了用 $su(2)$ 线性表示构造孤立子曲面时关键的 Sym-Tafel 公式. 6.1 节中, 用 Sym-Tafel 公式从 sine-Gordon 方程的 AKNS 表示构造了伪球曲面, 然后更一般地研究了 $r=-\bar{q}$ 的 AKNS 梯队, 即 NLS 梯队

$$\begin{pmatrix} q\\ -\bar{q}\end{pmatrix}_t=\mathrm{i}A_NL^N\begin{pmatrix} q\\ \bar{q}\end{pmatrix},\quad L=\mathrm{i}\begin{pmatrix}-\partial_x-\dfrac{1}{2}q\partial_x^{-1}\bar{q} & \dfrac{1}{2}q\partial_x^{-1}q\\ -\dfrac{1}{2}\bar{q}\partial_x^{-1}\bar{q} & \partial_x+\dfrac{1}{2}\bar{q}\partial_x^{-1}q\end{pmatrix},\tag{19}$$

这里 $L$ 是递推算子, $A_N$ 是常数. 然后我们说明, 高阶 NLS 梯队与标准的 NLS 方程相容. 从几何观点来看, 它们与 Hasimoto 曲面的运动相联系.

6.2 节中, 我们将看到, 与 NLS 梯队 (19) 相联系的孤立子曲面的位置向量满足一个可积系统 —— 势 NLS 特征函数梯队. 对 (19) 式的 AKNS 表示应用一个规范变换产生 NLS 特征函数梯队. 进一步用一个 Miura 型变换给出了 NLS 梯队与相应的特征函数梯队之间的联系的几何解释. 6.3 节中引入了反向变换的概念, 并用于生成圈孤立子方程

$$X_T = \pm\left(\frac{X_Z}{\sqrt{1+X_Z^2}}\right)_{ZZ}, \tag{20}$$

它同 mKdV 方程通过反向变换和规范变换的组合相联系. 然后, 给出了复 NLS 梯队的圈孤立子解, 它们与孤立子曲面的产生自然联系在一起. 6.4 节中, 讨论了 Dym 方程

$$\rho_t = \rho^{-1}(\rho^{-1})_{xxx} \tag{21}$$

或更一般的 Dym 梯队

$$\rho_t = \rho^{-1}(-D^3 rIr)^n \rho\rho_x, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{22}$$

在反向变换下的不变性, 这里 $D\phi = \phi_x$, $I\phi := \int_x^\infty \phi(\sigma, t)\mathrm{d}\sigma$, $r = \rho^{-1}$. 这个反向变换, 加上适当的 Galileo 变换, 可导出 KdV 梯队

$$u_t = K^n u_x, \quad n = 1, 2, \cdots, \quad K = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 4u + 2u_x\int_x^\infty \mathrm{d}x \tag{23}$$

的自 Bäcklund 变换的空间部分. 由此 Bäcklund 变换出发导出了势 KdV 方程的可换性定理, 与之相关的有数值分析中的非线性外插 $\epsilon$ 算法. 接着用曲线的平面运动以纯几何方式导出了 mKdV 梯队. 6.5 节中, 再次用生成 NLS 方程的几何方法, 分别用常曲率和常挠率的不可伸长曲线的从法向运动以自然的几何方法导出了 Dym 方程和 sine-Gordon 方程的可积推广. 推广的 Dym 方程是

$$\tau_b = \left[\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\tau^{1/2}}\right)_{ss} - \tau^{3/2} + \kappa\left(\frac{1}{\tau^{1/2}}\right)\right]_s, \tag{24}$$

它由具有常曲率 $\kappa$ 的不可伸长曲线的运动生成, 运动速度是 $\boldsymbol{v} = \tau^{-1/2}\boldsymbol{b}$. 另一方面, 具有常挠率 $\tau \neq 0$ 的不可伸长曲线的运动给出推广的 sine-Gordon 方程组

$$\begin{aligned} \omega_{sb} - \tau(\cos\omega\tanh\phi)_b &= \sin\omega\cosh\phi, \\ \phi_s &= \tau\sin\omega, \end{aligned} \tag{25}$$

其中 $\theta_s = \kappa$, $\theta_b = \tau^{-1}\sinh\phi$. 这时, 曲线的速度是 $\boldsymbol{v} = -(\theta_b/2\tau)\boldsymbol{b}$. 由反向变换下的不变性得知, 与每个推广的 Dym 方程相联系的孤立子曲面, 都存在平行对偶孤立

子曲面. 对推广的 Dym 方程和 sine-Gordon 方程组, 构造了它们的自 Bäcklund 变换, 并用于构造新的孤立子曲面. 最后, 给出了一类变换, 它类似于 Bianchi 对伪球曲面所作的经典变换.

第 7 章中, 给出了 Bäcklund 变换和矩阵 Darboux 变换之间的重要联系. 7.1 节中, 用表示孤立子曲面的位置向量的 Sym-Tafel 公式说明, 最早用来构造伪球曲面的 Bäcklund 变换给出了经典 Darboux 变换的矩阵形式, 而用于构造 NLS 孤立子曲面的 Bäcklund 变换可以类似地表示为 $su(2)$ 表示的矩阵 Darboux 变换. 7.2 节中, 构造了保持 NLS 梯队的 AKNS 表示不变的基本矩阵 Darboux 变换, 然后导出了 NLS 方程及其梯队的自 Bäcklund 变换. 进而建立了这些自 Bäcklund 变换的几何性质, 即它们保持对应点的距离不变, 这个在生成伪球曲面的经典 Bäcklund 变换中显然的常距离性质可以推广到满足 $r=-\bar{q}$ 的 AKNS 梯队所相应的孤立子曲面上. 7.3 节讨论基本矩阵 Darboux 变换的递推, 并建立了关键的可换性性质. 从几何角度来看, 矩阵 Darboux 变换的重复作用产生一系列曲面, 相邻的两个都具有常距离性质. 最后, 通过反复作用矩阵 Darboux 变换生成满足 $r=-\bar{q}$ 的 AKNS 梯队中孤立子方程的可换性定理, 这是 sine-Gordon 方程的经典 Bianchi 可换性定理的推广. 可换性定理在孤立子方程与曲面的可积离散化中的应用是目前热门的研究方向.

第 8 章研究重要的非等谱孤立子系统, 包括经典 Bianchi 方程组 (4) 及其椭圆对应 (6) 的几何性质. 8.1 节中, 用非等谱形式的 Sym-Tafel 公式重新得到了 Bianchi 曲面的位置向量及基本形式. 8.2 节中, 给出了对一大类非等谱 Lax 对成立的推广的基本矩阵 Darboux 变换. 然后, 8.3 节在曲面层次上给出了 Bäcklund 变换的一个距离性质. 8.4 节中, 利用具有全曲率 $\mathcal{K}=-1/\rho^2$ 且满足 $\rho_{uv}=0$ 的 Bianchi 曲面的单位法向量 $\boldsymbol{N}$ 满足的向量方程

$$(\rho \boldsymbol{N}\times \boldsymbol{N}_u)_v+(\rho \boldsymbol{N}\times \boldsymbol{N}_v)_u=\boldsymbol{0}, \tag{26}$$

在适当的参数化下, 给出复方程

$$\mathcal{E}_{uv}+\frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}\mathcal{E}_u+\frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}\mathcal{E}_v=\frac{2\mathcal{E}_u\mathcal{E}_v\bar{\mathcal{E}}}{|\mathcal{E}|^2+1}. \tag{27}$$

它的椭圆类比, 即

$$\xi_{z\bar{z}}+\frac{1}{2}\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho}\xi_z+\frac{1}{2}\frac{\rho_z}{\rho}\xi_{\bar{z}}=\frac{2\xi_z\xi_{\bar{z}}\bar{\xi}}{|\xi|^2-1}, \tag{28}$$

其中 $\rho_{z\bar{z}}=0$, 描述了三维 Minkowski 空间中的 Bianchi 型曲面. 在方程 (28) 中引入 Ernst 势 $\mathcal{E}=(1-\xi)/(1+\xi)$, 就给出广义相对论中的 Ernst 方程 (6). 利用 Ernst 方程的这个重要几何解释, 进而给出了它的 Bäcklund 变换和 Darboux 变换, 它们