工业和信息化部“十二五”规划专著

随机偏微分方程有限元方法

Finite Element Methods for Stochastic Partial Differential Equations

杨小远 张英晗 李晓翠 著

中国工信出版集团
電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

工业和信息化部“十二五”规划专著

随机偏微分方程有限元方法

杨小远　张英晗　李晓翠　著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书系统介绍了随机抛物型、双曲型和椭圆型方程的有限元分析方法，全书共 6 章。第 1 章是预备知识，包括 Banach 空间和 Hilbert 空间中的几类有界线性算子、Sobolev 空间基本理论、算子半群、有限元方法的基础理论，以及无穷维随机积分的基本概念和性质；第 2 章介绍随机抛物型方程的有限元分析方法，其中包括确定性抛物方程有限元方法理论分析、自伴算和非自伴算子随机抛物方程的有限元分析方法；第 3 章对经典的随机 Navier-Stokes 方程进行有限元分析和后验误差估计，重点介绍了后验误差估计方法；第 4 章以分别带有 Q-Wiener 过程噪声项和带有 Brownian 片噪声项的两类随机弹性方程为例，介绍双曲型随机偏微分方程的有限元理论分析方法；第 5 章以随机 Poisson 方程和随机 Stokes 方程为例，介绍椭圆型随机偏微分方程的有限元理论分析方法；第 6 章介绍随机积分微分方程有限元理论分析方法。

本书可以作为高等学校应用数学和计算数学专业的高年级本科生、研究生、教师以及相关的科技工作者阅读、参考。

图书在版编目（CIP）数据

随机偏微分方程有限元方法 / 杨小远，张英晗，李晓翠著. —北京：电子工业出版社，2015.5

ISBN 978-7-121-26008-7

Ⅰ. ①随… Ⅱ. ①杨… ②张… ③李… Ⅲ. ①偏微分方程—有限元法—研究 Ⅳ. ①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 097117 号

责任编辑：竺南直
印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司
装　　订：三河市鑫金马印装有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：16.5　字数：422 千字
版　　次：2015 年 5 月第 1 版
印　　次：2015 年 5 月第 1 次印刷
定　　价：48.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　　言

偏微分方程是反映有关未知变量偏导数之间制约关系的等式，许多领域中的数学模型都可以用偏微分方程来描述，很多重要的物理、力学等学科的基本方程本身就是偏微分方程。经典微分方程在过去几个世纪为人类认识自然规律、改造自然和自然和谐发展提供了有力的科学工具，如在人口问题、传染病理学和金融学中的应用等。但是随着科学的发展和对自然现象规律的进一步认识，原有经典微分方程已不能很好解释自然界中的一些偶发随机现象和小概率事件。

20 世纪中叶以来兴起的随机微分方程是数学中一个非常活跃的、引人瞩目的领域，国际上许多著名的数学家投入到这一领域的研究并获得了辉煌的成果。得益于随机国王中的牛顿定律，即 Itǒ随机分析思想以及由此发展的随机微分方程理论的帮助，人们对于自然界无处不在的随机现象有了越来越深刻的理解。由于随机偏微分方程能够很好的描述自然界中千变万化的各种自然现象，因此被广泛地应用于系统科学、工程控制、物理学、生物学和金融经济等领域。

由于随机偏微分方程的复杂性及其解并不是一个函数，而是一个随机过程，因此要形象地、直观地揭示随机方程所蕴含的信息，就需要求解随机偏微分方程的数值解。近些年来，随机偏微分方程数值解的问题已经引起了广泛的关注。由于求解各种特定类型问题的需要，促进了研究者对各种数值方法的探索，其中最有效的数值方法之一就是有限元方法。近几年来，作者对三类典型随机偏微分方程（抛物型随机方程、双曲型随机方程和椭圆型随机方程）的有限元分析方法做了系统研究，并且得到了一系列有意义的成果，本书对这些研究成果做了全面介绍。为了保持完整性和系统性，我们还对随机微分方程有限元方法领域中其他同行的最新研究成果等方面的资料进行了收集和整理，在书中进行了介绍，全书共分 6 章。

第 1 章介绍随机偏微分方程有限元分析所需要的预备知识，包括 Banach 空间和 Hilbert 空间中的几类有界线性算子、Sobolev 空间基本理论、算子半群、有限元方法的基础理论，以及无穷维随机积分的基本概念和性质；第 2 章介绍抛物型随机偏微分方

程的有限元分析方法，其中包括确定性抛物方程有限元方法理论分析、自伴算子随机抛物方程的有限元分析方法和非自伴算子随机抛物方程的有限元分析方法；第 3 章对经典的随机 Navier-Stokes 方程进行有限元分析和后验误差估计，并重点介绍了后验误差估计；第 4 章以分别带有 Q-Wiener 过程噪声项和带有 Brownian 片噪声项的两类随机弹性方程为例，介绍双曲型随机偏微分方程的有限元理论分析方法；第 5 章以随机 Poisson 方程和随机 Stokes 方程为例，介绍椭圆型随机偏微分方程的有限元理论分析方法；第 6 章介绍随机积分微分方程有限元理论分析方法。

希望本书的出版能够帮助对随机偏微分方程有限元方法这一领域感兴趣的读者基本掌握该领域的基础研究方法、快速了解该领域中的最新研究成果，为较早地进入国际前沿打好基础，从而促进我国在这一领域的研究上得到更好的发展。

在本书的编写过程中，中国科学院数学与系统科学研究院研究员严宁宁老师和北京计算科学研究中心研究员明炬老师曾经提出过许多宝贵意见，对此我们表示衷心的感谢。感谢国家自然科学基金（61271010）和北京市自然科学基金（4152029）所给予的支持。感谢电子工业出版社的大力支持和编辑们的辛勤劳动。由于作者水平有限，书中不妥之处、甚至错误在所难免，恳请专家及读者惠予赐教。

作　者

2015 年 4 月于北京

目　　录

第1章　基础知识

本章介绍Banach空间和Hilbert空间中的几类有界线性算子、Sobolev空间基本理论、算子半群、有限元方法的基础理论以及无穷维随机积分的基本概念和性质, 这些内容是随机微分方程有限元分析的基础.

1.1　Banach空间和Hilbert空间上的有界线性算子

本节简要介绍Banach空间和Hilbert空间上有界线性算子的概念和性质, 其中核算子和Hilbert-Schmidt算子是着重介绍的两类有界线性算子, 这两类算子在随机积分的定义中起着重要作用.

1.1.1　度量空间

定义 1.1.1 设X是一个非空集合, ρ是X上的双变量实值函数, 满足非负性、对称性和三角不等式, 即

(1) 对任意$x, y \in X$, $\rho(x,y) \geqslant 0$, 且$\rho(x,y)=0$当且仅当$x=y$;

(2) 对任意$x, y \in X$, $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) 对任意$x, y, z \in X$, $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z)$.

则称ρ为X上的一个距离, X为距离空间, 记作(X,ρ).

如果距离空间(X,ρ)中的点列$\{x_n\}$满足$\rho(x_n,x_m) \to 0\ (n,m \to \infty)$, 则称$\{x_n\}$是$X$中的Cauchy列(或基本列). 若$X$中任意基本列都在$X$中收敛, 则称$(X,\rho)$是完备的距离空间.

设A是距离空间(X,ρ)的子集, 如果A中的任意点列在X中有一个收敛子列, 则称A是列紧的. 若这个子列还收敛到A中的点, 则称A是自列紧的. 如果空间X是列紧的, 那么称X为列紧空间. 列紧空间必定是完备的空间.

设M是(X,ρ)中的一个子集, $\varepsilon>0$, $N \subset M$. 如果对任意的$x \in M$都存在$y \in N$, 使得$\rho(x,y)<\varepsilon$, 则称N是M的一个ε-网. 如果N是一个有穷集合, 称N为M的一个有穷ε-网. 如果对$\forall \varepsilon>0$, 都存在M的有穷ε-网, 则称集合M是完全有界的. 可以证明, 完备距离空间(X,ρ)中的集合M是列紧的, 当且仅当M是完全有界的.

M, N是距离空间(X,ρ)的两个子集且$M \subset N$, 若对任意$x \in N$, 都有M中点列$\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 使得当$n \to +\infty$时, $\rho(x_n,x) \to 0$, 则称M在N中稠密. 若距离空间X有可数的稠密子集, 则称X是可分的距离空间. 完全有界的距离空间是可分的.

设X是一个集合, $\mathcal{T}$是X的一个子集族, 如果$\{X,\emptyset\} \subset \mathcal{T}$并且$\mathcal{T}$关于有限交运算和任意并运算是封闭的, 则称$\mathcal{T}$是$X$的一个拓扑. 如果$\mathcal{T}$是集合$X$的一个拓扑, 则$(X,\mathcal{T})$称为拓扑空间, $\mathcal{T}$的每一个元素都叫做拓扑空间$(X,\mathcal{T})$中的一个开集. 根据拓扑的定义, 距离空间(X,ρ)中

的球形领域$\{B(x,r)=\{y\in X,\rho(x,y)<r\}:x\in X,r>0\}$是$X$的拓扑. 拓扑空间$X$中的集合$M$称为是紧的, 如果$X$中覆盖$M$的每个开集族都可以找到有限个开集覆盖集合$M$. 距离空间中的集合$M$是紧的当且仅当$M$是自列紧的.

设(M,ρ)是一个紧的距离空间, 令$C(M)$表示$M\to\mathbb{R}$的连续映射全体. 定义

$$d(u,v)=\max_{x\in M}|u(x)-v(x)|,\quad \forall u,v\in C(M).$$

则$(C(M),d)$是一个完备的距离空间. 设F是$C(M)$的子集, 如果存在常数$M_1>0$, 使得对任意的$x\in M,\phi\in F$, 都有$|\phi(x)|\leqslant M_1$, 则称F是一致有界的. 如果$\forall\varepsilon>0$, 存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得

$$|\phi(x)-\phi(y)|<\varepsilon,\quad \forall x,y\in M,\rho(x,y)<\delta,\forall\phi\in F,$$

则称F是等度连续的. 距离空间$(C(M),d)$中的紧集有如下特征, 此即著名的Arzela-Ascoli定理, 其证明可参考文献[1].

定理 1.1.1 (Arzela-Ascoli定理) $C(M)$的子集F是列紧集的充分必要条件是F是一致有界且等度连续的函数族.

设(X,ρ)为一个距离空间, $T:X\to X$是一个映射. 如果存在$x_0\in X$, 使得$x_0=Tx_0$, 则称x_0为T的一个不动点. 如果存在$0<\alpha<1$, 使得$\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)(\forall x,y\in X)$, 则称$T$是一个压缩映射.

定理 1.1.2 (压缩映射原理) 设(X,ρ)是一个完备的距离空间, $T:X\to X$是一个压缩映射, 则T在X上存在唯一的不动点.

证明 任取一点$x_0\in X$, 构造X中序列

$$x_{n+1}=Tx_n,\ n=0,1,2,\cdots,$$

则有

$$\rho(x_{n+1},x_n)=\rho(Tx_n,Tx_{n-1})\leqslant\alpha\rho(x_n,x_{n-1})\leqslant\cdots\leqslant\alpha^n\rho(x_1,x_0).$$

从而对任意的$p\in\mathbb{N}$,

$$\rho(x_{n+p},x_n)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\rho(x_{n+i},x_{n+i-1})\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0)\to 0\ \ (n\to\infty).$$

由此, $\{x_n\}$是X中的一个Cauchy列, 由(X,ρ)的完备性, $\{x_n\}$有极限, 记为x^*. 从$x_{n+1}=Tx_n$两边取极限(因T连续), 得

$$x^*=Tx^*,$$

即x^*为一个不动点.

如果x^{**}也是一个不动点, 则

$$|x^*-x^{**}|=|Tx^*-Tx^{**}|\leqslant\alpha|x^*-x^{**}|,$$

由此推出$x^*=x^{**}$, 所以不动点是唯一的. ¶

定义 1.1.2 设X是数域$\mathbb{K}$ (实数域或者复数域) 上的线性空间, $\|\cdot\|$是X上的一个实值函数, 满足非负性、正齐次性和三角不等式, 即

(1) 对任意$x \in X$, $\|x\| \geqslant 0$且$\|x\| = 0$当且仅当$x = 0$;

(2) 对任意$x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

(3) 对任意$x, y \in X$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

则称$\|\cdot\|$为X上的范数, X为数域$\mathbb{K}$上的线性赋范空间. 完备的线性赋范空间称为Banach空间.

设在线性空间X上给定了两个范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$, 如果存在常数$C_1, C_2 > 0$, 使得

$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1, \quad \forall x \in X,$$

则称范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$为等价范数. 如果只研究X中的收敛性而不考虑距离本身的大小, 那么可以认为等价的范数决定同一种收敛性.

设X是一个线性空间, $E \subset X$, 称E为一个凸集, 如果

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in E, \quad \forall x, y \in E, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

在非线性泛函分析不动点理论中, 有一个著名的不动点定理, 即如下Schauder不动点定理, 其证明可见参考文献[2].

定理 1.1.3 设C是赋范线性空间空间X中的一个闭凸子集, $T : C \to C$连续且$T(C)$列紧, 则T在C上至少有一个不动点.

设E是赋范线性空间X的一个子集, 称映射$T : E \to X$是紧的, 如果T是连续映射并且映E中的有界集为X中的列紧集. 由Schauder不动点定理, 设C是X中的一个闭凸子集, $T : C \to C$是紧的, 则T在C上至少有一个不动点.

定义 1.1.3 设X是复数域$\mathbb{C}$上的线性空间, $(\cdot,\cdot)$是$X \times X$到$\mathbb{C}$上的二元函数, 对$\forall x, y, z \in X$以及$\alpha \in \mathbb{C}$, 满足:

(1) $(x, x) \geqslant 0$, 且$(x, x) = 0$当且仅当$x = 0$;

(2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

(3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

(4) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

则称$(\cdot,\cdot)$为X上的内积, 称X为具有内积$(\cdot,\cdot)$的内积空间. 完备的内积空间称为Hilbert空间.

设X为一个内积空间, 则X按范数$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$构成一个赋范线性空间, 并且有Cauchy-Schwartz不等式

$$|(x,y)| \leqslant \|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in X,$$

其中等号成立当且仅当x与y线性相关.

M, N是内积空间X中两个非空子集, 如果

$$(x,y) = 0, \quad \forall x \in M, y \in N,$$

则称M和N是正交的, 记做$M \perp N$. 称集合$\{x \in X | x \perp M\}$为M的正交补, 记做$M^{\perp}$. 设X是一个Hilbert空间, M是X上的一个闭线性子空间, 则对任意的$x \in X$, 存在唯一的正交分解:

$$x = y + z, \quad y \in M, z \in M^{\perp}.$$

由x的正交分解确定的y称为x在M上的正交投影.

设X为一个Hilbert空间, $S = \{e_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$是$X$中的正交规范集, 即

$$(e_\lambda, e_\mu) = 0, \ \|e_\lambda\| = 1, \quad \forall \lambda, \mu \in \Lambda, \lambda \neq \mu,$$

则如下三个条件等价:

(1) S构成X的一个基, 即$x = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} (x, e_\lambda) e_\lambda, \forall x \in X$.

(2) S是完备的, 即$S^{\perp} = \{0\}$.

(3) Parseval等式成立, 即$\|x\|^2 = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} |(x, e_\lambda)|^2, \forall x \in X$.

对于Hilbert空间中的闭凸子集, 成立如下的最佳逼近定理, 其证明可见参考文献[1].

定理 1.1.4 设C是Hilbert空间H中的一个闭凸子集, 则对任意的$y \in H$, 存在唯一的$x_0 \in C$, 使得$\|y - x_0\| = \inf\limits_{x \in C} \|x - y\|$.

1.1.2 线性算子与线性泛函

设$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$是复(或实)数域$\mathbb{K}$上的两个线性赋范空间, $D \subset X$是X的线性子空间, T是D到Y的映射, D称为T的定义域, 记作$D(T)$. $R(T) = \{Tx | \forall x \in D\}$称为$T$的值域. 如果对任意$x, y \in D(T)$及$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 有

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y,$$

则称T是一个线性算子. 如果

$$x_n \in D(T), x_0 \in D(T), x_n \to x_0 \Rightarrow T x_n \to T x_0,$$

则称线性算子T在$x_0 \in D(T)$处是连续的. 对于线性算子T, 它在$D(T)$内处处连续和在$D(T)$内的一点处连续是等价的. 如果存在常数$M > 0$, 使得

$$\|Tx\|_Y \leqslant M \|x\|_X, \quad \forall x \in X,$$

则称线性算子T是X到Y的有界线性算子. 对于线性算子T, 它的有界性和连续性是等价的.

用$\mathcal{L}(X,Y)$表示X到Y的有界线性算子全体. 定义线性运算

$$(\alpha_1 T_1+\alpha_2 T_2)(x)=\alpha_1 T_1 x+\alpha_2 T_2 x,\quad \forall x\in X,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K},T_1,T_2\in\mathcal{L}(X,Y),$$

则$\mathcal{L}(X,Y)$在上述运算下构成一个线性空间. 定义$T\in\mathcal{L}(X,Y)$的范数

$$\|T\|=\sup_{x\in X,x\neq 0}\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X},$$

则当Y是Banach空间时, $\mathcal{L}(X,Y)$按范数$\|T\|$构成一个Banach空间. 当$X=Y$时, 记$\mathcal{L}(X,Y)=\mathcal{L}(X)$.

特别当f是赋范线性空间X到数域$\mathbb{K}$的线性算子时, 称f是X上的线性泛函. 若f是X到数域$\mathbb{K}$的有界线性算子, 则称f为X上的有界线性泛函. X上有界线性泛函全体记作X^*, 称为X的共轭空间或对偶空间. $x^*\in X^*$在$x\in X$上的作用称为对偶积, 记做(x,x^*)或者$x^*(x)$.

对于Hilbert空间上的有界线性泛函, 有如下著名的Riesz定理, 其证明可见参考文献[1].

定理 1.1.5 f是Hilbert空间X上的一个连续线性泛函, 则必定存在唯一的$y_f\in X$, 使得

$$f(x)=(x,y_f),\quad \forall x\in X,$$

并且$\|f\|=\|y_f\|$.

设T是$D(T)\subset X\to Y$的线性算子, 如果$x_n\in D(T),x_n\to x$, 以及$Tx_n\to y$就能推出$x\in D(T)$, 而且$y=Tx$, 则称T是一个闭算子.

Banach空间中有四个著名的基本定理, 分别为Hahn-Banach泛函延拓定理, 一致有界定理, 逆算子定理和闭图像定理. 这些定理的证明可见参考文献[1], 下面不加证明地加以引用.

定理 1.1.6 Banach空间基本定理:

(1) (Hahn-Banach泛函延拓定理) 设f是赋范线性空间X的子空间Z上的连续线性泛函, 则必存在X上连续线性泛函$\tilde{f}$, 使得

$$\tilde{f}(x)=f(x),\forall x\in Z,\ \text{并且}\ \|\tilde{f}\|_X=\|f\|_Z,$$

即$\tilde{f}$是f的保范延拓.

(2) (一致有界定理) 设X,Y是Banach空间, $W\subset\mathcal{L}(X,Y)$是X到Y的有界线性算子的集合, 对任意的$x\in X$, 都有$\sup\limits_{A\in W}\|Ax\|<\infty$, 则存在常数$M$, 使得对任意的$A\in W$, $\|A\|\leqslant M$.

(3) (逆算子定理) 设X,Y是Banach空间, $T\in\mathcal{L}(X,Y)$既是单射又是满射, 则$T^{-1}\in\mathcal{L}(Y,X)$.

(4) (闭图像定理) 设X,Y是Banach空间, $T:X\to Y$是闭线性算子, 并且$D(T)$是X中的闭集, 则T是连续的.

设X,Y都是赋范线性空间, $T\in\mathcal{L}(X,Y)$, 算子$T^*:Y^*\to X^*$定义为

$$(T^*f)(x)=f(Tx),\quad (\forall f\in Y^*, x\in X).$$

称T^*为T的Banach共轭算子. 当$X=Y$为一个Hilbert空间时, $A\in\mathcal{L}(X)$, 则算子A的共轭算子定义为

$$(Ax,y)=(x,A^*y),\quad \forall x,y\in X.$$

如果$A=A^*$, 则称A为自共轭算子或自伴算子. 如果对任意的$x\in X$, $(Ax,x)\geqslant 0$, 称A为非负算子, 进一步如果存在常数$\alpha>0$, 使得$(Ax,x)\geqslant\alpha\|x\|^2$, 称$A$为正定算子.

Banach空间X中序列$\{x_n\}$称为是弱收敛的, 如果存在$x\in X$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x),\quad \forall f\in X^*,$$

记做$x_n\rightharpoonup x$, 称x为$\{x_n\}$的弱极限. 利用Hahn-Banach定理, 可以证明弱极限存在必定唯一, 极限若存在则弱极限也存在且二者相等.

设X,Y是Banach空间, $\{T_n\}\subset\mathcal{L}(X,Y), T\in\mathcal{L}(X,Y)$, 则有以下几种收敛性.

(1) 若$\|T_n-T\|\to 0$, 则称T_n一致收敛于T, 记做$T_n\rightrightarrows T$. 称T为$\{T_n\}$的一致极限.

(2) 若$\forall x\in X$, $\|(T_n-T)x\|\to 0$, 则称T_n强收敛于T, 记做$T_n\to T$. 称T为$\{T_n\}$的强极限.

(3) 若$\forall x\in X$, $T_nx\rightharpoonup Tx$, 则称T_n弱收敛于T, 记做$T_n\rightharpoonup T$. 称T为$\{T_n\}$的弱极限.

显然, 一致收敛可推出强收敛, 强收敛可推出弱收敛, 而且每种极限若存在必定是唯一的, 但相反的关系不成立. 下面的定理表明紧算子的一致极限是紧算子.

定理 1.1.7 设紧算子序列$A_n:D\subset X\to Y, n=1,2,\cdots$, 算子$A:D\to Y$. 如果对于$D$中任何有界集$S$, 当$n\to\infty$时, $\|A_nx-Ax\|$都一致趋于零(关于$x\in S$), 那么$A:D\to Y$是紧算子.

证明 先证A连续. 设$x_n\to x_0$, 则$S=\{x_0,x_1,\cdots\}$是D中的有界集. 于是$\forall\varepsilon>0$, 可取k, 使得

$$\|A_kx_n-Ax_n\|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \forall n.$$

由A_k的连续性知存在N, 当$n>N$时, 有

$$\|A_kx_n-A_kx_0\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是当$n>N$时,

$$\begin{aligned}
&\|Ax_n-Ax_0\|\\
\leqslant\ &\|Ax_n-A_kx_n\|+\|A_kx_n-A_kx_0\|+\|A_kx_0-Ax_0\|\\
<\ &\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

故$Ax_n\to Ax_0$. A的连续性得证.

下证A的紧性. 设S是D中任一有界集. $\forall\varepsilon>0$, 由假设条件, 可选取n, 使得对任意的$x\in S$, 都有$\|A_nx-Ax\|<\varepsilon$. 故$A_n(S)$是$A(S)$的一个ε-网. 由于A_n是紧的, 所以$A_n(S)$是列紧集, 因此$A(S)$也是列紧集. ¶

定义 1.1.4 设X是Banach空间, $A : D(A) \subset X \to X$是闭线性算子, 称集合

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$$

为A的预解集, 预解集中的点称为是A的正则点或正则值. $\rho(A)$在$\mathbb{C}$中的补集称为A的谱集, 记做$\sigma(A)$, 谱集中的点称为A的谱点.

谱集中的点又可以分为以下几类.

(1) $(\lambda I - A)^{-1}$不存在, 则λ称为是A的特征值, 这部分λ的集合记做$\sigma_p(A)$, 称为A的点谱.

(2) $(\lambda I - A)^{-1}$存在, 且值域$R(\lambda I - A) = X$, 由逆算子定理, λ是正则值.

(3) $(\lambda I - A)^{-1}$存在, 且值域$R(\lambda I - A) \neq X$, 但$\overline{R(\lambda I - A)} = X$, 这部分$\lambda$的集合记做$\sigma_c(A)$, 称为$A$的连续谱.

(4) $(\lambda I - A)^{-1}$存在, 且$\overline{R(\lambda I - A)} \neq X$, 这部分$\lambda$的集合记做$\sigma_r(A)$, 称为$A$的剩余谱.

由以上分类, 有

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

设A是有界线性算子, 则A的谱集非空, 并且A的谱半径

$$r_\sigma(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

满足关系$r_\sigma(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

自伴紧算子的谱集有非常重要的性质, 即有下面的定理成立, 其证明可见参考文献[1].

定理 1.1.8 设A是Hilbert空间H上的自伴紧算子, 则

(1) A的非零谱点都是特征值;

(2) A的特征值都是实数, 至多可数个, 只能以零为聚点;

(3) 若H是无穷维的, 则$0 \in \sigma(A)$;

(4) 非零特征值对应的特征子空间是有限维的;

(5) 可分Hilbert空间H上的自伴紧算子A一定具有以特征向量组成的完备正交基.

1.1.3 核算子与Hilbert-Schmit算子

下面给出核算子和Hilbert-Schmit算子的定义, 并介绍其基本性质和结论.

定义 1.1.5 设E和G是两个Banach空间, E^*和G^*分别是它们的对偶空间, $T \in \mathcal{L}(E, G)$, 如果存在两个序列$\{a_j\} \subset G$, $\{\phi_j\} \subset E^*$使得

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\| \cdot \|\phi_j\| < \infty, \tag{1.1.1}$$

并且T可以表示为

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \phi_j(x), \quad \forall x \in E,$$

则称T为E到G的核算子.

E到G的所有核算子在范数

$$\|T\|_1 = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\| \cdot \|\phi_j\| : Tx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \phi_j(x)\right\}$$

下, 构成一个Banach空间, 记为$\mathcal{L}_1(E,G)$, 并且当$E = G$ 时, 记$\mathcal{L}_1(E,E) = \mathcal{L}_1(E)$. 如果$K$也是Banach空间, $T \in \mathcal{L}_1(E,G)$和$S \in \mathcal{L}(G,K)$, 则$ST \in \mathcal{L}_1(E,K)$且$\|ST\|_1 \leqslant \|T\|_1\|S\|$.

设H是一个可分的Hilbert空间, $\{e_j\}$是H的一组完备正交规范基. 如果$T \in \mathcal{L}_1(H,H)$, 则可以定义T的迹:

$$\mathrm{Tr}T = \sum_{j=1}^{\infty} (Te_j, e_j).$$

定理 1.1.9 如果$T \in \mathcal{L}_1(H)$, 则$\mathrm{Tr}T$的值与H的正交基$\{e_k\}$的选取无关.

证明 由核算子的定义, 存在两序列$\{a_j\} \subset H$和$\{\phi_j\} \subset H^*$满足

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \phi_j(x), \quad \forall x \in H,$$

并且式(1.1.1)成立. 由Riesz表示定理1.1.5, 存在一序列$\{b_j\} \subset H$使得$\phi_j(x) = (x, b_j), \forall x \in H$. 则

$$(Te_k, e_k) = \sum_{j=1}^{\infty} (e_k, a_j)(e_k, b_j).$$

进一步有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |(Te_k, e_k)| &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, a_j)(e_k, b_j)| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, a_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, b_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\|\,\|b_j\| < \infty.
\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Te_k, e_k) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} (e_k, a_j)(e_k, b_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j).$$

因此$\mathrm{Tr}T$的定义与$\{e_j\}$的选取是无关的. ¶

进一步, 如果$T \in \mathcal{L}_1(H)$和$S \in \mathcal{L}(H)$, 则有$TS, ST \in \mathcal{L}_1(H)$且下面关系式成立:

$$\mathrm{Tr}TS = \mathrm{Tr}ST \leqslant \|T\|_1\|S\|. \tag{1.1.2}$$

核算子T的迹$\mathrm{Tr}T$与范数$\|T\|_1$有如下关系.