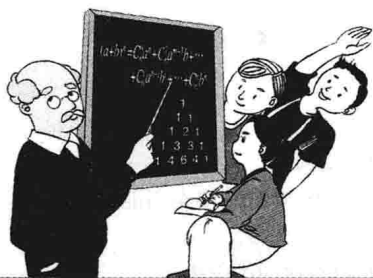


数林外传 系列
跟大学名师学中学数学

平面几何100题

◎ 单 增 著

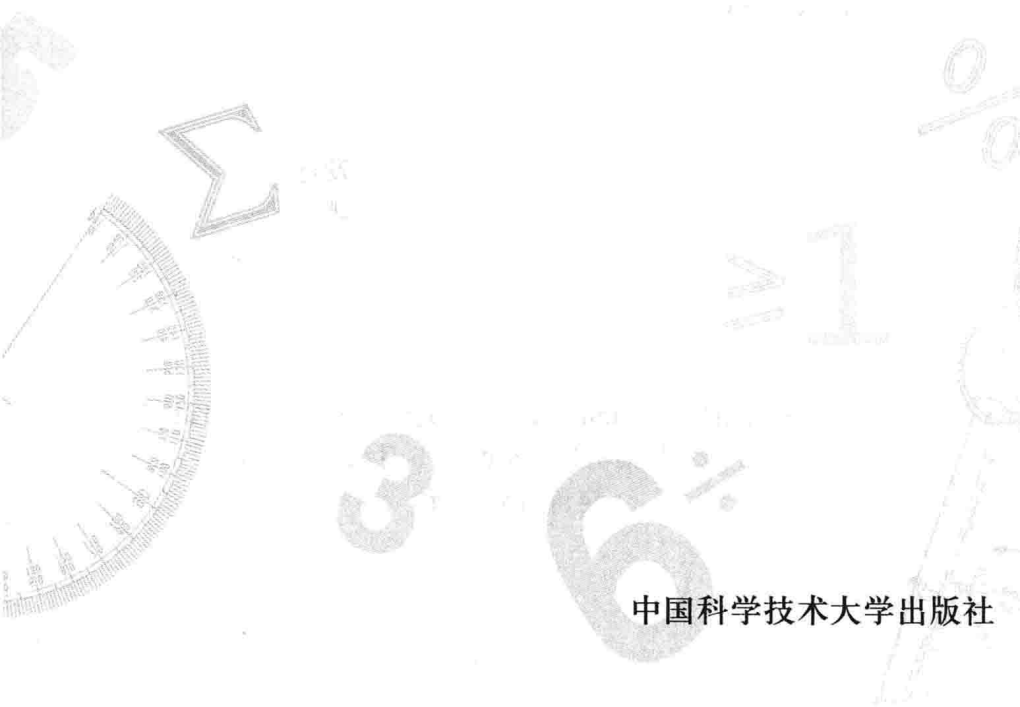
中国科学技术大学出版社



数林外传 系列
跟大学名师学中学数学

平面几何100题

◎ 单 增 著



中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书由 100 道平面几何的问题及其解答组成.

希望读者能够欣赏书中提供的问题与解法,同时希望本书能够激起大家学习平面几何乃至学习数学的兴趣.

本书适合中学数学教师和对平面几何感兴趣的中学生.

图书在版编目(CIP)数据

平面几何 100 题/单 樽 著.—合肥:中国科学技术大学出版社,
2015.5

ISBN 978-7-312-03662-0

I. 平… II. 单… III. 平面几何 IV. O123.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 078674 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号,230026

<http://press.ustc.edu.cn>

合肥学苑印务有限公司印刷

全国新华书店经销

开本:880 mm×1230 mm 1/32 印张:5.75 字数:171 千

2015 年 5 月第 1 版 2015 年 5 月第 1 次印刷

定价:15.00 元

目 录

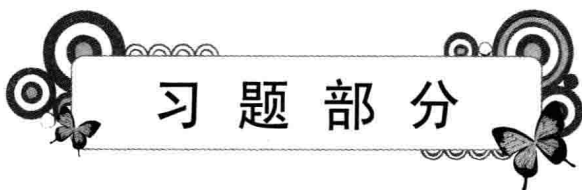
一 计算题	(3, 45)*
1. 特殊的四边形	(3, 45)
2. 恢复原状	(3, 45)
3. 五块面积	(4, 46)
4. 八边形面积	(4, 48)
5. 图形分解	(4, 49)
6. 两个等腰三角形	(5, 50)
7. 构成三角形	(5, 51)
8. 30° 的角	(5, 52)
9. 依然故我	(6, 54)
10. 梯形的底角	(6, 54)
11. 摩天大楼	(6, 55)
12. 勾三股四	(7, 57)
13. 线段的比(一)	(7, 58)
14. 线段的比(二)	(7, 59)
15. 利用方程	(8, 60)
16. 计算勿繁	(8, 61)
17. 代数运算	(8, 62)
18. 面积与周长(一)	(9, 64)
19. 一个最大值	(9, 65)
20. 哈佛赛题	(9, 66)
21. 六边形面积	(10, 68)

* 括号中的两个页码分别对应该标题在习题部分和解答部分的位置,下同。

二 证明题(一)	(11, 70)
22. 一道初中赛题	(11, 70)
23. 山上梯田	(11, 73)
24. 两块拼版	(12, 74)
25. 四点共线	(12, 75)
26. 余弦定理	(12, 76)
27. 内外二心	(13, 77)
28. 北大招生题	(13, 78)
29. 圆心在圆上	(13, 79)
30. 圆内接四边形	(14, 81)
31. 对称	(14, 82)
32. 公共弦	(15, 83)
33. 圆的切线	(15, 84)
34. 切线与割线	(15, 85)
35. 角的相等	(16, 86)
36. 三等分点	(16, 88)
37. 何来 4 倍	(16, 89)
38. 与外公切线平行	(17, 90)
39. 更一般些	(17, 92)
40. 姜霁恒的问题	(17, 93)
41. 共圆的点	(18, 95)
42. 三个圆	(18, 97)
三 非常规的几何问题	(19, 100)
43. 整数知识	(19, 100)
44. 条件够吗?	(19, 100)
45. 滚动的圆(一)	(19, 101)
46. 滚动的圆(二)	(20, 103)
47. 滚动的圆(三)	(20, 104)
48. 面积与周长(二)	(20, 106)
49. 面积与周长(三)	(21, 107)

50. 小圆盖大圆	(21,108)
51. 滚动的圆(四)	(21,110)
52. 怪兽难亲	(21,112)
四 证明题(二)	(22,114)
53. 高中赛题	(22,114)
54. 到处有相似	(22,115)
55. 你们共圆,我们也共圆	(23,116)
56. 中点、平行	(23,118)
57. 几何意义	(24,119)
58. 两圆同心	(24,121)
59. 倒数之和	(24,123)
60. 逐步倒溯	(25,125)
61. 两处射影	(25,126)
62. 平分线段	(26,127)
63. 寻找相似形	(26,129)
64. 两角之差	(27,130)
65. 绕过障碍	(27,132)
66. 冬令营试题	(28,133)
67. 又见中点	(28,135)
五 更多的知识,更多的问题	(29,137)
68. 角平分线的性质	(29,137)
69. 分点公式	(29,137)
70. 和为 1	(30,138)
71. 相交何处	(30,139)
72. 截线定理	(31,140)
73. Ceva 定理	(31,142)
74. 角元形式	(32,143)
75. Gergonne 点	(32,144)
76. 等角共轭点	(33,145)
77. 又一个三线共点	(33,145)

78. 外角平分线	(33,146)
79. 完全四边形	(33,147)
80. 以一当二	(34,148)
81. 又是角平分线	(34,149)
82. Simson 线	(35,150)
83. 谬证一例	(35,151)
84. 根轴	(36,151)
85. 重要之点	(36,152)
86. 合二而一	(37,155)
87. 一道题的纯几何证明	(37,156)
88. 充分必要	(37,157)
89. 笨办法? 好办法?	(38,159)
90. 换了包装	(38,163)
91. 旧瓶新酒	(39,165)
六 轨迹与作图	(40,166)
92. 最少用几次圆规	(40,166)
93. 作方程的根	(40,167)
94. 作三角形	(41,168)
95. 等幂轴(根轴)	(41,170)
96. 一个轨迹	(41,171)
97. Apollonius 圆	(41,173)
98. 对称的点	(42,175)
99. 在那遥远的地方	(42,176)
100. 不用圆规行吗?	(42,177)



习题部分

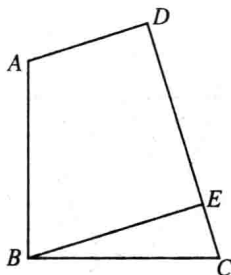
一 计 算 题

长度、角度、面积等,都是平面几何中计算的内容.

为了方便计算,常常需要变更图形的形状或位置.分解与拼合也是常用的方法.

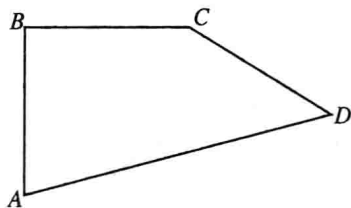
1. 特殊的四边形

四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = BC$. 已知 $S_{ABCD} = 16$, 求点 B 到 CD 的距离 BE .



2. 恢复原状

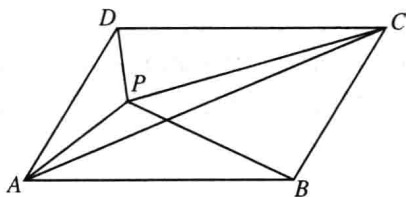
在四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = CD$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BCD = 150^\circ$. 求 $\angle BAD$.



这个图形其实是从一个很标准的图形中切出来的.

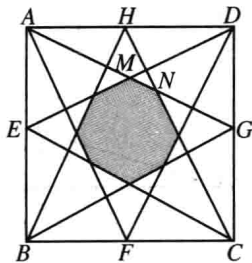
3. 五块面积

图中 P 为平行四边形内的一点. 已知 $S_{\triangle PAB} = 10$, $S_{\triangle PAD} = 6$. $S_{\triangle PAC}$ 能否求出? 如果能, 它的值是多少?



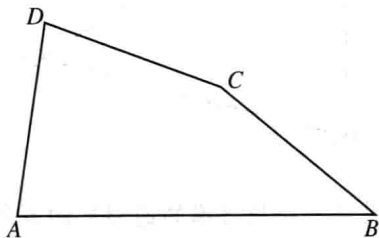
4. 八边形面积

如图, 一个边长为 1 的正方形 $ABCD$, 将顶点与边的中点 (E, F, G, H) 相连, 得一个八边形(阴影部分). 求这个八边形的面积.



5. 图形分解

在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AD = BC = CD$, $\angle ADC = 80^\circ$, $\angle BCD = 160^\circ$. 求 $\angle BAD$.



这个图形能分解成比较规则的图形吗?

6. 两个等腰三角形

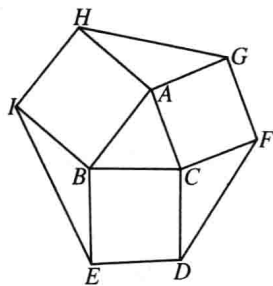
两个等腰三角形,一个顶角为 α ,腰为 a ,底为 b ;另一个底角为 α ,腰为 b ,底为 a .求 α 及 $\frac{a}{b}$.

显然 $a = b$ 时, $\alpha = 60^\circ$, $\frac{a}{b} = 1$.但还有其他可能.

7. 构成三角形

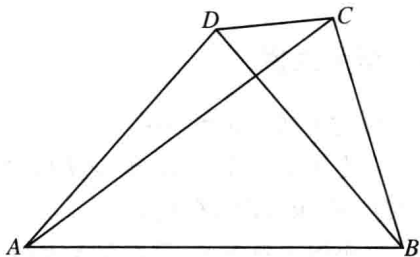
在 $\triangle ABC$ 的三边上向外作正方形 $BCDE$, $ACFG$, $BAHI$. 连 DF , GH , IE .

求证: DF , GH , IE 这三条线段可以构成三角形. 并指出这个三角形与 $\triangle ABC$ 的面积有何关系.



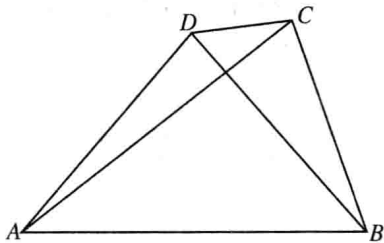
8. 30° 的角

在四边形 $ABCD$ 中, $\angle DAC = 12^\circ$, $\angle CAB = 36^\circ$, $\angle ABD = 48^\circ$, $\angle DBC = 24^\circ$. 求 $\angle ACD$.



9. 依然故我

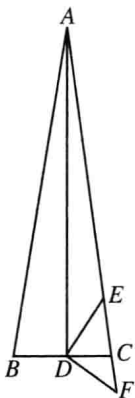
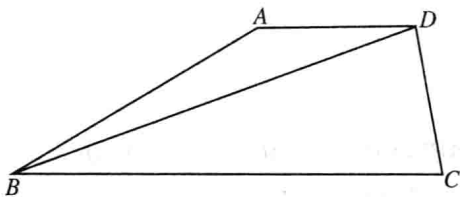
在四边形 $ABCD$ 中, $AB = AC$, $DA = DB$, $\angle ADB + \angle CAB = 120^\circ$. 求 $\angle ACD$.



这道题可以与上一道题比较一下.

10. 梯形的底角

下图的梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = DC$, $BD = BC$, $\angle DBC = 20^\circ$. 求 $\angle ABC$.



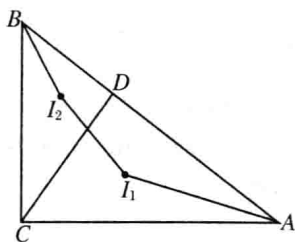
11. 摩天大楼

D 为等腰三角形 ABC 底边 BC 的中点, E, F 分别在 AC 及其延长线上. 已知: $\angle EDF = 90^\circ$, $ED = DF = 1$, $AD = 5$. 求线段 BC 的长.

这个图形瘦而长, 像座摩天大楼.

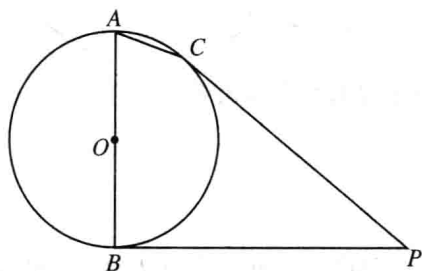
12. 勾三股四

直角三角形 ABC 中, $AC = 4$, $BC = 3$, CD 是斜边上的高. I_1, I_2 分别是 $\triangle ADC$, $\triangle BDC$ 的内心. 求 I_1, I_2 .



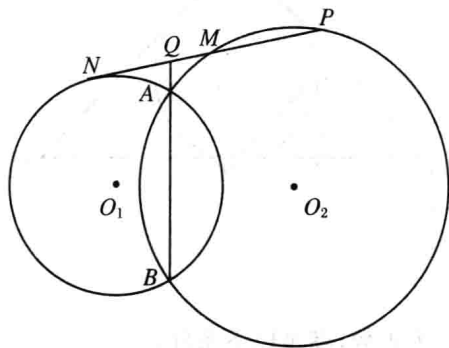
13. 线段的比(一)

已知: 点 C 在以 AB 为直径的 $\odot O$ 上, 过 B, C 作 $\odot O$ 的切线, 交于点 P . 连 AC . 又知 $OP = \frac{9}{2} AC$. 求 $\frac{PB}{AC}$.



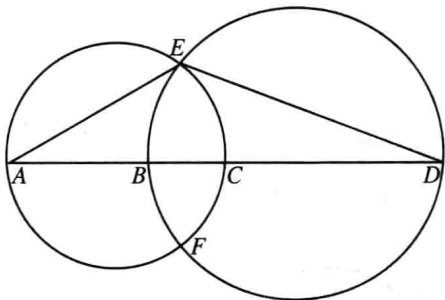
14. 线段的比(二)

过 P 点作 $\odot O_1$ 的切线 PN , 切点为 N . M 是线段 PN 的中点. $\odot O_2$ 过 P, M 两点, 交 $\odot O_1$ 于 A, B . 直线 AB 交 PN 于 Q . 求证: $PM = 3MQ$.



15. 利用方程

A, B, C, D 为一条直线上的顺次四点, 并且 $AB : BC : CD = 2 : 1 : 3$. 分别以 AC, BD 为直径作圆, 两圆相交于点 E, F . 求 $ED : EA$ 的值.

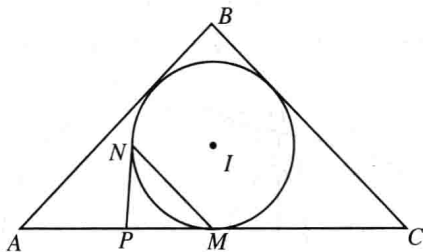


本题可以利用方程来求未知的量.

16. 计算勿繁

$\triangle ABC$ 中, $BA = BC = 5, AC = 7$. $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 切 AC 于点 M . 过 M 作 BC 的平行线, 又交 $\odot I$ 于 N . 过 N 作 $\odot I$ 的切线, 交 AC 于 P . 求 $MN - NP$.

这是一道计算题. 计算应尽量简明.



17. 代数运算

已知: a, b, c 为正数, 满足以下条件:

$$a + b + c = 32; \quad (1)$$

$$\frac{b+c-a}{bc} + \frac{c+a-b}{ca} + \frac{a+b-c}{ab} = \frac{1}{4}. \quad (2)$$

是否存在以 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 为三边长的三角形? 如果存在, 求出这个三角形的最大角.

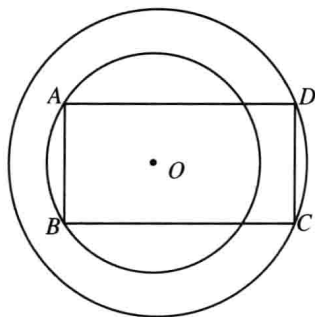
本题虽与三角形有关, 但主要内容是代数运算.

18. 面积与周长(一)

两个直角三角形, 面积与周长都相等. 这两个直角三角形是否全等?

19. 一个最大值

两圆同心, 半径分别为 $2\sqrt{6}$ 与 $4\sqrt{3}$. 矩形 $ABCD$ 的边 AB, CD 分别为两圆的弦. 在这个矩形面积最大时, 它的周长是多少?



20. 哈佛赛题

五边形 $ABCDE$ 满足以下条件:

(i) $\angle CBD + \angle DAE = \angle BAD = 45^\circ, \angle BCD + \angle DEA = 300^\circ.$

(ii) $\frac{BA}{DA} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, CD = \frac{7\sqrt{5}}{3}, DE = \frac{15\sqrt{2}}{4}.$

(iii) $AD^2 \times BC = AB \times AE \times BD.$

求 BD .

本题是 2013 年美国哈佛大学组织的中学生数学竞赛中的一道几何题.

21. 六边形面积

图中 $\triangle A_1 A_3 A_5$ 与 $\triangle A_2 A_4 A_6$ 全等, 并且边对应平行. 如果 $S_{\triangle A_1 B_5 B_6} = 1$, $S_{\triangle A_2 B_6 B_1} = 4$, $S_{\triangle A_3 B_1 B_2} = 9$. 求 $S_{B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6}$.

