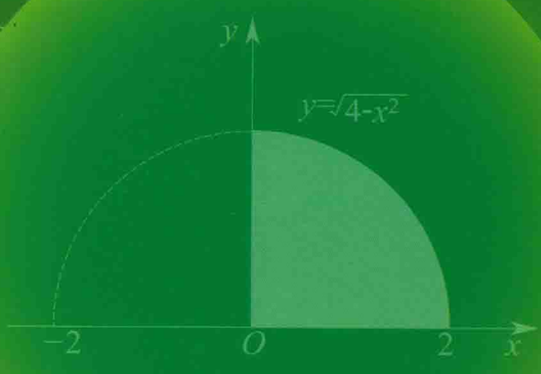
高职高专“十二五”规划教材

高等数学

林峰 马俊 主编



化学工业出版社

高职高专“十二五”规划教材

高 等 数 学

林　峰　马　俊　主编
张立群　吕睿星
王　彬　裴　琳　参编

化学工业出版社
·北京·

《高等数学》是在编者多年的教学实践基础上，根据高等职业教育对数学的基本要求编写而成的. 书中引入了建模案例，渗透了数学史的知识，而且设置了上机实验内容.

《高等数学》内容分为函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、无穷级数、上机实验八章，书末还附有常用初等数学公式和常用积分公式以及习题与单元测试部分参考答案.

《高等数学》力求能够激发高职学生学习数学的兴趣、强化学生应用数学的能力、培养学生运用数学软件解决实际问题中的数学计算能力. 本书内容丰富，难易程度适中，适合高职各专业高等数学课程作为教材使用.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/林峰，马俊主编. —北京：化学工业出版社，2015.8

高职高专“十二五”规划教材

ISBN 978-7-122-24697-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①林…②马… Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 167600 号

责任编辑：唐旭华　郝英华　　　　装帧设计：张　辉

责任校对：边　涛

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　装：三河市万龙印装有限公司

710mm×1000mm　1/16　印张 $12\frac{1}{2}$　字数 262 千字　2015 年 9 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：26.00 元

版权所有　违者必究

前言

高等数学是以微积分为主体内容的一门数学课程，内容包括极限、微分学、积分学和无穷级数等．微积分由牛顿和莱布尼茨于17世纪后期创立，到19世纪基本完善. 微积分是在代数学、三角学、几何学的基础上建立起来的，分为微分学和积分学两部分．微分学研究的是变化率的理论，以及导数的计算；积分学研究面积、体积等无限求和问题，以及积分运算．

世间万物无时无刻不在运动、变化，数学就是研究、表达其中的数量关系的科学．微积分更是针对运动变化而产生的数学分支．它用无限逼近的思想解决了变速运动在一点处瞬时速度定义，任意弯曲的一条曲线在一点处的切线定义，速度的变化率的计算，复杂图形的面积、体积的计算等问题．微积分解决复杂问题的思路是无限细分、局部近似．例如在变速直线运动求位移时，将起始时刻到终止时刻之间分割成若干段，每一段都看成匀速直线运动，各段位移求和即为所求位移的近似值. 分割得越细，近似程度越高．再利用极限这一工具，就可以得到位移的精确值. 这种思想方法早在3世纪中期我国数学家刘徽的割圆术中就有使用，直到微积分完善后才从定性描述发展成为可以定量计算的严密理论和算法．

微积分在物理学、生物学、工程学、经济学各个领域都有广泛的应用. 例如，飞机、汽车的外形设计、参数优化，汽车悬挂系统、飞机飞行控制系统的研究都离不开微积分．

本书主要针对高职学生，介绍一元函数微积分、微分方程、无穷级数的基本概念、基本理论和基本计算．并以数学实验的形式利用 Maple 软件加深学生对课程内容的理解，增强计算能力以及解决实际问题的能力.

编　者

2015年6月

目录

第 1 章　函数的极限与连续　1

第 2 章　导数与微分　22

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章　函数的极限与连续

极限是研究变量的变化趋势的基本工具，极限理论是微积分的理论基础，极限的思想方法是研究函数的一种最基本方法．连续函数是高等数学主要讨论的函数类型. 本章将重点介绍函数的极限、极限的运算以及函数的连续性等基本概念和性质.

1.1　极限

1.1.1　数列的极限

【引例 1-1】　战国时期《庄子》一书中有一段至理名言"一尺之棰，日取其半，万世不竭"．此句可诠释为：一尺长的木棒，第一天截取它的$\frac{1}{2}$，第二天截取第一天余下的$\frac{1}{2}$，第三天截取第二天余下的$\frac{1}{2}$，……如此天天这样截取下去，木棒永远也截取不完．如果将每天剩下的木棒长度写出来就有

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots.$$

可以看出，无论 n 有多大，$\frac{1}{2^n}$永远都不会等于 0. 但当 n 无限增大时，$\frac{1}{2^n}$无限地趋近于 0. 这就是数列的极限．

【引例 1-2】　观察数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$，从图 1-1 可知，当 n 无限增大时，表示数列 $\{x_n\}$ 的项的点从 $x=0$ 的右侧无限趋近于点 $x=0$，即数列的通项 $x=\frac{1}{n}$无限趋近于常数 0.

【引例 1-3】　观察数列 $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$，从图 1-2 可知，当项数 n 无限增大时，表示数列 $\{x_n\}$ 的项的点从 $x=1$ 两侧无限趋近于点$x=1$，即

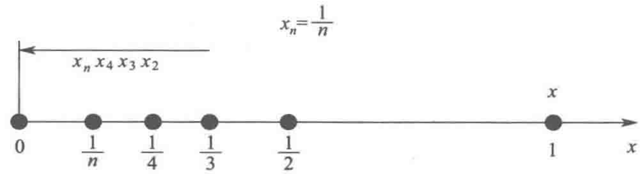


图 1-1

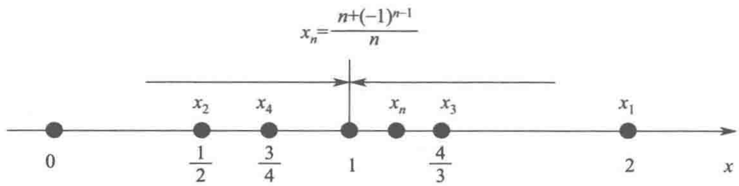


图 1-2

通项 $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$ 无限趋近于常数 1.

【引例 1-4】 观察数列 $1,2,4,8,\cdots,2^{n-1},\cdots$，当 n 无限增大时，数列的通项 $x_n=2^{n-1}$ 无限增大，不能趋近于任何一个常数．

下面给出数列极限的定义．

定义 1-1 对于数列 $\{x_n\}$，若当 n 无限增大时，数列的通项 x_n 无限接近于一个确定的常数 A，则称当 $n\to\infty$ 时，A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，

$$\text{记为} \lim_{n\to\infty} x_n=A \text{ 或 } x_n\to A \quad (n\to\infty).$$

若数列 $\{x_n\}$ 没有极限，则称该数列是发散的．

【例 1-1】 观察下列数列的变化趋势，指出它们的极限．

① $1,\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{4}{3},\ \cdots,\ \dfrac{3n-1}{2n},\ \cdots$；② $2,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{4}{3},\ \cdots,\ \dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n},\ \cdots$；

③ $-1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots$.

解 ① 因 $x_n=\dfrac{3n-1}{2n}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2n}$，当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于 $\dfrac{3}{2}$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n}=\frac{3}{2}，\text{即数列}\left\{\frac{3n-1}{2n}\right\}\text{收敛}.$$

② 因 $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1+\dfrac{(-1)^n}{n}$，当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于 1. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n}=1，\text{即数列}\left\{\frac{n+(-1)^n}{n}\right\}\text{收敛}.$$

③ 因当 n 为偶数形式无限增大时，$x_n=(-1)^n$ 趋近于常数 1；当 n 为偶数形式无限增大时，$x_n=(-1)^n$ 趋近于常数 -1. 所以当 n 无限增大时，$x_n=(-1)^n$ 不能趋近于一个确定的常数，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在．

【例 1-2】 求常数列 $\{-2\}$ 的极限．

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

解　这个数列 $\{-2\}$ 的各项都是 -2，故 $\lim\limits_{n\to\infty}(-2)=-2$.

一般地，任何一个常数列的极限就是这个常数本身，即

$$\lim_{n\to\infty}C=C \quad (C\text{ 为常数}).$$

1.1.2　函数的极限

(1) 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

"$x\to\infty$" 表示 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大，x 既可取正值也可取负值. 若 x 取正值且无限增大，记作 $x\to+\infty$；若 x 取负值且其绝对值 $|x|$ 无限增大，记作 $x\to-\infty$.

函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的值无限趋近于 0. 即

当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}\to 0$.

定义 1-2　如果当 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大（$x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad \text{或} \quad \text{当 } x\to\infty \text{ 时，} f(x)\to A.$$

一般地说，如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=C$，则称直线 $y=C$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线.

由定义可知，当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 的极限是 0，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

有时只需研究 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数的变化趋势.

定义 1-3　如果当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad (\text{或当 } x\to+\infty \text{ 时，} f(x)\to A).$$

如果当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad (\text{或当 } x\to-\infty \text{ 时，} f(x)\to A).$$

由上述极限的定义，不难得出下面结论.

定理 1-1　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

【例 1-3】　求下列极限.

① $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$；　　② $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x}{x^2}$.

解　① $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$.

② $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}2+\dfrac{1}{x}=2$.

(2) 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 1-4　设函数 $f(x)$ 在 x 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x)(x_0,\delta)$ 内有定义，如果当

x 无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad 当\ x \to x_0\ 时，f(x) \to A.$$

注 在上述的定义中，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 是否存在与 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义无关.

【例 1-4】 求下列极限.

① $\lim\limits_{x \to x_0} C$（$C$ 为常数）； ② $\lim\limits_{x \to 1}(2x+1)$； ③ $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$.

解 ① $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0} C=C$.

② $\lim\limits_{x \to 1}(2x+1)=3$.

③ $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{(x+5)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x \to 2}(x+5)=7$.

(3) 当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的单侧极限

我们讨论当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限，其中 x 以任意方式趋近于 x_0，但有时只需或只能讨论 x 从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0（记为 $x \to x_0^-$）或从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0（记为 $x \to x_0^+$）时，函数的变化趋势.

定义 1-5 如果当 $x \to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0^-)=A.$$

如果当 $x \to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0^+)=A.$$

左极限和右极限都称为单侧极限.

定理 1-2 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0^+)=f(x_0^-)=A$.

这通常用于求分段函数在分界点处的极限。

【例 1-5】 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0, \end{cases}$ 当 $x \to 0$ 时的极限是否存在.

解 作出这个分段函数的图形（图 1-3），由图 1-3 可知，

左极限为 $f(0^-)=\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)=$

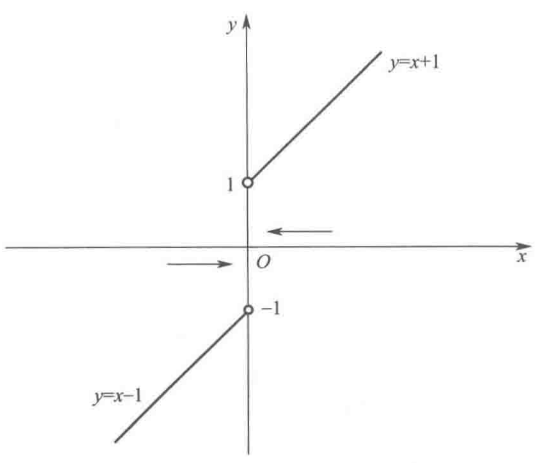


图 1-3

$\lim\limits_{x\to0^-}(x-1)=-1$，

右极限为 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$，

由定理 1-2 可知 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

1.1.3 无穷大量与无穷小量

(1) 无穷小量

定义 1-6 如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为 0，那么称函数 $f(x)$ 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量，简称无穷小.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$，$\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{x^2}=0$，所以当 $x\to0$ 时，x^2，$\sin x$，$\sqrt[3]{x^2}$ 均是无穷小量.

因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，$\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)=0$，所以当 $x\to1$ 时，$x-1$，x^2-1 均是无穷小量.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$，所以当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{x-1}$ 均是无穷小量.

注 ① 一个函数 $f(x)$ 是无穷小，必须指明自变量的变化趋势.

② 不要把一个绝对值很小很小的常数说成是无穷小.

③ 常数“0”是无穷小，但无穷小不一定是 0.

无穷小具有如下性质定理.

定理 1-3 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}\right)=0$.

但应该注意到无限个无穷小的和不一定是无穷小. 例如

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+n)}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2n}\right)=\frac{1}{2}.$$

定理 1-4 有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

例如，$x\to0$ 时，x^2，$\tan x$ 都是无穷小，所以 $x^2\tan x$ 也是无穷小.

定理 1-5 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

【例 1-6】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\arctan x$.

解 因 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to0$，而 $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\arctan x=0$.

【例 1-7】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 因 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to0$，而 $|\sin x|\leqslant1$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

（2）无穷大量

定义 1-7 如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时的无穷大量，简称无穷大，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \quad (\text{或} \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty).$$

注：① 一个函数 $f(x)$ 是无穷大，必须指明自变量的变化趋势.

② 不要把一个绝对值很大很大的常数说成是无穷大.

（3）无穷小与无穷大的关系

定理 1-6 自变量在同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

【例 1-8】 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}x^2-1=0$，及当 $x\to 1$ 时，x^2-1 是无穷小，因此它的倒数 $\dfrac{1}{x^2-1}$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷大，即

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}=\infty.$$

习题 1.1

1. 观察下列数列当 $n\to\infty$ 时的变化趋势，并写出它们的极限.

（1）$x_n=\dfrac{1}{n}+4$；（2）$x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$；（3）$x_n=\dfrac{n}{3n+1}$；

（4）$x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$；（5）$x_n=n\cdot(-1)^n$；（6）$x_n=\sin n\pi$.

2. 观察并写出下列极限值.

（1）$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$；（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$；（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$；（6）$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$；

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}$；（8）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x$；（9）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$；

（10）$\lim\limits_{x\to 1}\ln x$.

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=$______.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<2,\\ 2x-1, & x\geqslant 2,\end{cases}$ 求：（1）$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$；（2）$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$；（3）$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

5. 求函数 $f(x)=\frac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左极限、右极限，并说明 $f(x)$ 当 $x\to 0$ 时的极限是否存在．

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0,\end{cases}$ 画出函数的图形，求当 $x\to 0$ 时，函数的左、右极限，并判别当 $x\to 0$ 时函数的极限是否存在．

7. 以下各数列中，哪些是无穷小？哪些是无穷大？

(1) $x_n=\frac{1}{2n}$；　(2) $x_n=-n$；

(3) $x_n=\frac{n+(-1)^n}{2}$；　(4) $x_n=\frac{2}{n^2+1}$.

8. 指出在下列条件下，哪些函数是无穷小，哪些函数是无穷大？

(1) $x\to 2$，$y=x^2-3x+2$；(2) $x\to\infty$，$y=\frac{2}{x^2+1}$；(3) $x\to\infty$，$y=4^x$；

(4) $x\to-\infty$，$y=4^x$；　(5) $x\to\pi$，$y=\sin x$；　(6) $x\to-1$，$y=\frac{1}{x+1}$.

9. 计算下列极限．

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin x$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{1+x}{2+x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+x+1)$；　(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3+x^2}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}$.

1.2　极限的运算

本节讨论极限的求法，重点介绍极限的四则运算法则和两个重要极限，同时给出无穷小的比较．

1.2.1　极限的四则运算法则

在下面的讨论中，记号“lim”下面没有标明自变量的变化过程，是指对 $x\to x_0$ 和 $x\to\infty$ 以及单侧极限均成立．

定理 1-7　设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

① $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

② $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB$.

③ $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$　$(B\neq 0)$.

法则①和法则②可以推广到有限多个函数的情形，并有如下推论：

推论 1-1　$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)=CA$（$C$ 为常数）．

推论 1-2　$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$.

利用极限的四则运算法则求解极限，通常分为以下几种类型．

（1）直接运用法则

【例 1-9】 求$\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{4}x+2\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{4}x+2\right)=\lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{4}x+\lim\limits_{x\to 4}2=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 4}x+\lim\limits_{x\to 4}2=\frac{1}{4}\times 4+2=3.$

【例 1-10】 求$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+5}{x^2+7}$.

解 当 $x\to 1$ 时，分母的极限不为 0，则

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+5}{x^2+7}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+7)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}2x+\lim\limits_{x\to 1}5}{\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}7}$$

$$=\frac{(\lim\limits_{x\to 1}x)^2-2\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}5}{(\lim\limits_{x\to 1}x)^2+\lim\limits_{x\to 1}7}=\frac{1-2+5}{1+7}=\frac{1}{2}.$$

（2）$\frac{0}{0}$型，先分解约分，再用四则运算求极限

【例 1-11】 求$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$.

解 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$

（3）$\frac{\infty}{\infty}$型，首先同时除以分子、分母的最高次项，再求极限

【例 1-12】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+1}{5x^3+7x^2-3}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+1}{5x^3+7x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{3+0+0}{5+0-0}=\frac{3}{5}.$

【例 1-13】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+100}{2x^3+x^2-3}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+100}{2x^3+x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{100}{x^3}}{2+\frac{1}{x}-\frac{10}{x^3}}=\frac{3\times 0-2\times 0+100\times 0}{2+0-10\times 0}=\frac{0}{2}=0.$

【例 1-14】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-10}{3x^2-2x+100}$.

解 应用例 1-13 的结果并根据无穷小与无穷大的关系，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-10}{3x^2-2x+100}=\infty.$$

（4）$\infty-\infty$型，先通分或先将分子、分母有理化，再求极限

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com