普通高等教育创新型人才培养规划教材

# 代数学

DAISHU XUE

吕新民 编著

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育创新型人才培养规划教材

# 代 数 学

吕新民 编著

北京航空航天大学出版社

## 内 容 简 介

本书是作者在长期承担本科生“近世代数”与研究生“代数学”课程教学的基础上，参考国内外大量相关教材并结合该课程的教学要求编写而成的。内容有：群(包括群的基本理论与有限群的Sylow定理)、环(包括环的基本理论与交换环的局部化)、域(包括域的扩张理论与有限域的结构理论)和模(模的基本理论)四种基本代数。

本书可作为高等学校理科和工科本科生“近世代数”课程(32～48学时)的教材(选学部分内容)，理科硕士学位研究生“代数学”课程(48学时)的教材(全用)及工科部分博士学位研究生“代数学”课程(48学时)的教材(选学部分内容)，也可供有关专业的学者参考使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

代数学 / 吕新民编著. --北京：北京航空航天大学出版社，2015.5

ISBN 978-7-5124-1794-6

Ⅰ.①代… Ⅱ.①吕… Ⅲ.①代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第107577号

**版权所有，侵权必究。**

**代 数 学**

吕新民 编著

责任编辑 刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026

读者信箱：goodtextbook@126.com 邮购电话：(010)82316936

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本：710×1 000 1/16 印张：10 字数：213千字

2015年7月第1版 2015年7月第1次印刷 印数：2 500册

ISBN 978-7-5124-1794-6 定价：25.00元

---

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题，请与本社发行部联系调换。联系电话：(010)82317024

# 前　言

“代数学”既是大学理科专业本科生的重要基础课之一，也是理科专业硕士学位研究生的重要基础课之一；同时，它还是某些工科专业博士学位研究生的公共基础课程之一。无论是从“代数学”的研究内容上看，还是从“代数学”研究问题的方法上看，这一学科对其他学科的影响日益突显，因此，对这一学科的教学应高度重视。本书是作者在长期承担本科生“近世代数”与研究生“代数学”课程教学的基础上，参考国内外大量相关教材并结合该课程的教学要求编写而成的。

本书共 6 章，可大致分为 5 个部分：

第 1 部分，即第 1 章内容。它是全书的基础，在以后各章节中都要用到。这一章主要介绍集合与映射、关系与分类、良序公理与 Zorn 引理以及运算与代数系。

第 2 部分，即第 2 章与第 3 章内容。这一部分主要介绍群的基本理论与有限群的 Sylow 定理，具体包括群的定义、子群与同态、陪集与指数、正规性与同态基本定理、置换群以及在有限群的结构理论研究中起决定作用的 Sylow 三大定理。

第 3 部分，即第 4 章内容。这一章主要介绍环的基本理论与交换环的局部化，具体包括环的定义、理想与同态、素理想与极大理想、交换环的局部化、主理想整环与欧氏整环以及唯一分解整环。

第 4 部分，即第 5 章内容。这一章主要介绍域的基本理论，具体包括域的扩张、单扩域、代数扩域、多项式的分裂域以及有限域的结构理论。

第 5 部分，即第 6 章内容。这一章主要介绍模的基本理论，包括模的定义、子模与同态、正合列、直积与直和以及自由模与向量空间。

本书取材广泛，在教学中可分别针对大学理科专业本科生的教学要求、理科专业硕士学位研究生的教学要求及某些工科专业博士学位研究

生的教学要求作不同取舍。

（1）对理科专业本科生32学时必修课而言，建议讲授第1章、第2章、第4章（前3节）及第5章（前4节）内容。

（2）对理科专业硕士学位研究生48学时专业基础课而言，建议讲授全部内容。重点讲授第3章、第4章及第6章内容。

（3）对某些工科专业博士学位研究生48学时公共基础课而言，重点讲授第2章、第4章、第5章、第6章内容；同时，增加相关专业代数学应用知识的专题讲座。

本书是作者近20年来在江西理工大学、南京理工大学为硕士学位研究生及博士学位研究生讲授“代数学”课程所用讲稿的基础上修改而成的。由于作者水平有限，不妥之处在所难免，敬请同行不吝指正。

本书得到南京理工大学研究生教育优秀工程项目的资助；写作过程中得到南京理工大学理学院的领导、教务处的领导以及研究生院的领导的大力支持和帮助，在此深表谢意。

吕新民

2015年5月于南京



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 目　录

# 第 1 章　预备知识

本章简要介绍代数学研究所需要的一些基础知识，主要包括集合与映射、关系与分类、良序公理与 Zorn 引理及运算与代数系.

## 1.1　集合与映射

集合是代数学研究的主体，而运算是代数学研究的核心. 要弄清什么是代数，就必须首先弄清什么是集合. 要弄清什么是运算，就必须弄清反映集合与集合之间关系的映射.

### 1.1.1　集　合

数学中研究的对象，如代数中的数、向量、矩阵，几何中的点、直线、平面等，我们统称为元素. 一个集合就是由若干个元素所构成的集体. 对于一个给定的集合，集合中的元素必须是确定的，元素之间是互异的，而元素的排列顺序可以是任意的.

集合一般用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示，元素用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示. 若 $a$ 是集合 $A$ 中的一个元素，则我们说，$a$ 属于 $A$，记作 $a\in A$；否则我们说，$a$ 不属于 $A$，记作 $a\notin A$. 没有元素的集合叫做空集，空集通常记作 $\varnothing$.

若集合 $A$ 中的每个元素都属于集合 $B$，则我们说，$A$ 是 $B$ 的子集，记作 $A\subseteq B$；否则我们说，$A$ 不是 $B$ 的子集，记作 $A\not\subseteq B$. 若集合 $A$ 是集合 $B$ 的子集，而且 $B$ 中至少有一个元素不属于 $A$，则我们说，$A$ 是 $B$ 的真子集，记作 $A\subset B$. 特别地，空集是任何一个集合的子集. 若集合 $A$ 和集合 $B$ 所包含的元素完全一样，则我们说，$A$ 等于 $B$，记作 $A=B$. 显然，$A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$.

集合中的运算主要包括三种：交、并及差. 设 $A$ 与 $B$ 是两个集合，则

(1) $A$ 与 $B$ 的交：记作 $A\cap B$，且定义 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

(2) $A$ 与 $B$ 的并：记作 $A\cup B$，且定义 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(3) $A$ 与 $B$ 的差：记作 $A-B$，且定义 $A-B=\{x\mid x\in A$ 但 $x\notin B\}$.

直接验证易知：

$A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cap B=A$ 当且仅当 $A\cup B=B$.

由定义，还可直接验证这些运算满足以下运算规律.

**定理 1.1**　设 $A,B,C$ 是三个集合，则

(1) 幂等律：$A\cap A=A$，$A\cup A=A$.

(2) 交换律：$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$.

(3) 结合律：$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

(4) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(5) 泛界：$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$.

(6) 模律：若 $A\subseteq C$，则 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$.

(7) 吸收律：$A\cap(A\cup B)=A\cup(A\cap B)=A$.

(8) De Morgan 律：$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$，$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

事实上，集合的交与并运算可以推广到任意多个集合上去，即若 $I$ 是一个非空集合，以 $I$ 作下标集，即对于每个 $i\in I$，$A_i$ 均表示一个集合，定义

(1) 无限交：$\bigcap\limits_{i\in I}A_i=\{x\mid x\in A_i$，对于每个 $i\in I\}$.

(2) 无限并：$\bigcup\limits_{i\in I}A_i=\{x\mid x\in A_i$，对于某个 $i\in I\}$.

相应地，对于多个集合（可以是有限多个，也可以是无限多个）的交、并与差运算，有以下运算律：若 $A$ 是一个集合，$\{B_i\mid i\in I\}$ 是一族集合，则有

(1) 交对并满足无限分配律：$A\cap(\bigcup\limits_{i\in I}B_i)=\bigcup\limits_{i\in I}(A\cap B_i)$.

(2) 并对交满足无限分配律：$A\cup(\bigcap\limits_{i\in I}B_i)=\bigcap\limits_{i\in I}(A\cup B_i)$.

(3) 广义 De Morgan 律：$A-(\bigcup\limits_{i\in I}B_i)=\bigcap\limits_{i\in I}(A-B_i)$，$A-(\bigcap\limits_{i\in I}B_i)=\bigcup\limits_{i\in I}(A-B_i)$.

**例 1.1** 设 $A,B,C$ 是三个集合.

(1) 若 $A\cap C=B\cap C$，问：是否 $A=B$？把 $\cap$ 改成 $\cup$ 时又如何呢？

(2) 若 $A\cap C=B\cap C$，$A\cup C=B\cup C$，问：是否 $A=B$？为什么？

**解：** (1) 若 $A\cap C=B\cap C$，或 $A\cup C=B\cup C$，则 $A=B$ 均未必成立. 如取 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=\{2,3\}$，显然，$A\cap C=B\cap C$，但 $A\neq B$. 又如，取 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=\{1,4\}$，显然，$A\cup C=B\cup C$，但 $A\neq B$.

(2) 若 $A\cap C=B\cap C$，$A\cup C=B\cup C$，则 $A=B$ 成立. 这是因为 $A=A\cup(A\cap C)=A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)=(B\cup A)\cap(B\cup C)=B\cup(A\cap C)=B\cup(B\cap C)=B$.

从给定的集合出发，构造新的集合，是代数学研究中经常使用的一种方法. 这里我们不妨先给出两种方式.

(1) 幂集：已知一个集合 $A$，由 $A$ 的所有子集所构成的集合称为 $A$ 的幂集，记作 $P(A)$ 或 $2^A$，即

$$P(A) \quad 或 \quad 2^A=\{B\mid B\subseteq A\}.$$

(2) 卡氏(Cartesian)积：已知 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n$ 个集合，称

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n\}$$

为集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的卡氏积.

在本书中经常用到的几个集，常用下述记号表示：$\mathbb{N}$ 表示自然数集，$\mathbb{Z}$ 表示整数集（$\mathbb{Z}^+$ 表示正整数集），$\mathbb{Q}$ 表示有理数集（$\mathbb{Q}^*$ 表示非零有理数集，$\mathbb{Q}^+$ 表示正有理数



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

集)，$\mathbb{R}$ 表示实数集($\mathbb{R}^*$ 表示非零实数集，$\mathbb{R}^+$ 表示正实数集)，而$\mathbb{C}$ 表示复数集($\mathbb{C}^*$ 表示非零复数集).

### 1.1.2　映　射

集合是现实生活中诸多事物的一个抽象的反映. 事实上，事物之间存在着千丝万缕的联系. 如何反映它们之间的这些联系呢？从数学的角度可以抽象为某种法则，这种法则即是下面介绍的映射.

**定义 1.1**　设 $A$ 与 $B$ 是两个集合，如果对于每个 $a\in A$，依照某种法则 $f$，总存在一个确定的 $b\in B$ 与之对应，则称 $f$ 是从 $A$ 到 $B$ 的一个映射，记作 $f: A\to B$. 同时，记 $\mathrm{Im}\ f=\{f(a)\mid a\in A\}$，称 $\mathrm{Im}\ f$ 为 $A$ 在 $f$ 下的像集，或简称 $f$ 的像. 除此以外，

(1) 称映射 $f$ 是一个单射，如果 $a_1, a_2\in A$，且 $a_1\neq a_2$，则 $f(a_1)\neq f(a_2)$. 等价地，如果 $f(a_1)=f(a_2)$，则 $a_1=a_2$.

(2) 称映射 $f$ 是一个满射，如果对于任意的 $b\in B$，则存在 $a\in A$，使得 $b=f(a)$. 等价地，$\mathrm{Im}\ f=B$.

(3) 称映射 $f$ 是一个双射，如果 $f$ 既是一个单射，也是一个满射.

为了更好地理解上述定义，我们来考察下列一些具体的例子.

**例 1.2**　定义 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ 如下：$f\left(\dfrac{m}{n}\right)=m+n$，这里 $m,n\in\mathbb{Z}$ 且 $n\neq 0$，则 $f$ 不是$\mathbb{Q}$到$\mathbb{Q}$ 的映射. 因为$\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{4}$，但 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\neq f\left(\dfrac{2}{4}\right)$.

注：当原像中的元素表示法不唯一时，需要验证：当 $x_1=x_2$ 时，$f(x_1)=f(x_2)$. 以确保映射的合理性.

**例 1.3**　(1) 定义 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ 如下：$f(x)=2^x$，这里 $x\in\mathbb{Q}$，则 $f$ 是从$\mathbb{Q}$ 到$\mathbb{Q}$ 的一个单射，但不是满射，因为零和负数都没有原像.

(2) 定义 $f:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ 如下：$f(x,y)=x$，这里 $(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$，则 $f$ 是从$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ 到$\mathbb{Q}$ 的一个满射，但不是单射. 因为 $(1,2)\neq(1,3)$，但 $f(1,2)=f(1,3)$.

(3) 对于任意一个集合 $A$，定义 $f:A\to A$ 如下：$f(x)=x$，这里 $x\in A$，则 $f$ 是从 $A$ 到 $A$ 的一个双射. 通常，称这个映射为 $A$ 上的恒等映射，记做 $1_A$.

下面将建立一个映射是单射、满射及双射的判定条件.

**定理 1.2**　设 $A$ 与 $B$ 是两个集合，$f: A\to B$ 是一个映射，则

(1) $f$ 是一个单射当且仅当存在映射 $g: B\to A$，使得 $gf=1_A$.

(2) $f$ 是一个满射当且仅当存在映射 $h: B\to A$，使得 $fh=1_B$.

(3) $f$ 是一个双射当且仅当存在映射 $g: B\to A$，使得 $gf=1_A$，$fg=1_B$.

**证明**：(1) 必要性. 若 $f$ 是单射，则对于每个 $b\in\mathrm{Im}\ f$，均存在唯一的 $a\in A$，使得 $b=f(a)$. 取定 $a_0\in A$，定义 $g: B\to A$ 如下：

$$g(b)=\begin{cases} a, & 当\ f(a)=b. \\ a_0 & 当\ b\notin \mathrm{Im}\ f. \end{cases}$$

直接验证易知 $g$ 是 $B$ 到 $A$ 的一个映射，且 $gf=1_A$.

充分性. 令 $a_1, a_2\in A$，且 $f(a_1)=f(a_2)$，则 $gf(a_1)=gf(a_2)$，从而

$$a_1 = 1_A(a_1) = gf(a_1) = gf(a_2) = 1_A(a_2) = a_2.$$

故 $f$ 是单射.

(2) 必要性. 若 $f$ 是满射，则对于每个 $b\in B$，$b$ 的原像 $f^{-1}(b)$ 非空，即 $\varnothing\neq f^{-1}(b)\subseteq A$. 因此，对于每个 $b\in B$，选取 $a_b\in f^{-1}(b)\subseteq A$. 定义 $h$：$B\to A$ 如下：

$$h(b) = a_b.$$

则 $h$ 是 $B$ 到 $A$ 的一个映射，且 $fh=1_B$.

充分性. 对于任意的 $b\in B$，则 $h(b)\in A$，故 $b=1_B(b)=f(h(b))$，即 $f$ 是满射.

(3) 利用(1)和(2)的结论可得.

通常，称满足条件(1)的映射 $f$ 是左可逆的，称满足条件(2)的映射 $f$ 是右可逆的，称满足条件(3)的映射 $f$ 是可逆的.

**例 1.4** 设 $S=\{1,2,3\}$，$i_1,i_2,i_3$ 是 1,2,3 的一个置换. 定义 $\sigma:S\to S$ 如下：

$$1\to i_1,\quad 2\to i_2,\quad 3\to i_3.$$

显然，$\sigma$ 是从 $S$ 到 $S$ 的双射. 通常，记作 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ i_1 & i_2 & i_3\end{pmatrix}$，且称 $\sigma$ 是 $S$ 上的变换. $S$ 上的变换共有 $3!=6$ 个元素，具体写出如下：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},$$

$$\sigma_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\quad \sigma_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\quad \sigma_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

注：若 $S$ 是一个有限集，$\sigma:S\to S$ 是一个映射，则 $\sigma$ 是单射当且仅当 $\sigma$ 是满射.

### 1.1.3 集合的基数(或势)

有了映射这个概念以后，现在可以关注一个集合所含元素的个数问题. 基数(或势)是用以表达一个集合所含元素个数的概念，集合 $A$ 的基数通常记作 $|A|$. 这个概念对于有限集合来说是相当清楚的，即是通常意义下的含义. 例如，集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 包含 4 个元素，则 $|A|=4$. 然而，对于无限集而言，就单独一个集合谈元素的个数问题是一个模糊的概念. 为此引入以下定义.

**定义 1.2** 设 $A$ 与 $B$ 是两个集合，称 $A$ 与 $B$ 是等势的，记作 $|A|=|B|$，如果存在一个双射 $f:A\to B$.

对于集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，我们以 $n$ 记其基数，即 $|A|=n$，且称 $A$ 是一个有限集. 我们约定空集 $\varnothing$ 的基数为 0，自然地，空集也是有限集. 凡不是有限集的集合统称为无限集. 在无限集中，与自然数集 $\mathbb{N}$ 等势的集被称为是可数集，可数集的基数一般用符号 $\aleph_0$（读作"阿列夫零"）表示，即 $|\mathbb{N}|=\aleph_0$.

**定理 1.3** 一个集合 $A$ 是无限集当且仅当存在 $A$ 的一个真子集 $B$，使得 $|A|=|B|$.

**证明**：必要性. 因为 $A$ 是无限集，取 $a_1 \in A$，则 $A_1 = A - \{a_1\}$ 仍然是一个无限集. 又取 $a_2 \in A_1$，因为 $A_1$ 是无限集，则 $A_2 = A_1 - \{a_2\}$ 也是一个无限集. 如此下去，可得 $A$ 的一个可数子集

$$M = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

令 $C = A - M$，则 $C \cap M = \varnothing$，且 $C \cup M = A$. 现考虑 $A$ 的一个真子集

$$B = \{a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\} \cup C.$$

定义 $\varphi: A \to B$ 如下：

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_{i+1}, & \text{当 } x = a_i. \\ x, & \text{当 } x \in C. \end{cases}$$

显然，$\varphi$ 是从 $A$ 到 $B$ 的一个双射. 故 $|A| = |B|$.

充分性. 若 $A$ 是有限集，显然，$A \neq \varnothing$. 令 $|A| = n$，则 $A$ 的任何真子集所含元素的个数 $< n$，从而不存在 $A$ 的真子集与 $A$ 等势.

由定理 1.3，易得下列推论.

**推论 1.1**　一个集合 $A$ 是有限集当且仅当 $A$ 与它的任何一个真子集均不等势.

**例 1.5**　设 $A = [a, b]$ 和 $B = [c, d]$ 是两个区间 $(a < b,\ c < d)$. 问：$|A| = |B|$？为什么？

**解**：对于任意的 $x \in A$，定义 $\varphi: A \to B$ 如下：

$$x \to \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c,$$

则 $\varphi$ 是从 $A$ 到 $B$ 的映射. 又对于任意的 $y \in B$，定义 $\psi: B \to A$ 如下：

$$y \to \frac{b - a}{d - c}(y - c) + a,$$

则 $\psi$ 是从 $B$ 到 $A$ 的映射. 直接验证知

$$\psi\varphi = 1_A, \quad \varphi\psi = 1_B.$$

故 $\varphi$ 是从 $A$ 到 $B$ 的双射，从而 $|A| = |B|$.

## 习题 1 - 1

1. 设 $A, B$ 是两个集合. 证明：$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.
2. 设 $A, B$ 是两个集合，且 $|A| = m$，$|B| = n$. 求集合 $A \times B$ 的幂集 $P(A \times B)$ 所含元素的个数.
3. 设 $A, B$ 是两个有限集合，且 $|A| = |B|$. 证明：从 $A$ 到 $B$ 的映射 $f$ 是单射当且仅当 $f$ 是满射.
4. 设 $A$ 是有限集，且 $|A| = n$. 证明：从 $A$ 到 $A$ 的双射共有 $n!$ 个.
5. 设 $A$ 是一个无限集. 证明：$|A| \geqslant \aleph_0$.

## 1.2 关系与分类

在对一个集合进行研究的过程中，我们总希望把具有一定关系的元素放在一起，这样对集合形成了一个所谓的分类，而每一个类中的元素具有相同的关系，为我们进一步研究集合的性质提供了便利.

### 1.2.1 关 系

设 $A$ 是一个集合，称 $A\times A$ 的任何一个子集 $\rho$ 是 $A$ 上的一个二元关系. 若 $(a,b)\in\rho$，则我们说，$a$ 与 $b$ 具有关系 $\rho$，记作 $a\,\rho\,b$；否则，称 $a$ 与 $b$ 不具有关系 $\rho$，记作 $a\,\bar{\rho}\,b$. 在所有的二元关系中，有一种关系被称之为等价关系，它在今后讨论问题时是非常重要的. 为此引入以下定义.

**定义 1.3** 称一个集合 $A$ 上的二元关系 $\rho$ 为等价关系，如果对于任意的 $a,b,c\in A$，满足

(1) 自反性：$a\,\rho\,a$；

(2) 对称性：$a\,\rho\,b\Rightarrow b\,\rho\,a$；

(3) 传递性：$a\,\rho\,b,b\,\rho\,c\Rightarrow a\,\rho\,c$.

如果 $\rho$ 是集合 $A$ 上的一个等价关系，则我们通常将 $\rho$ 记作"$\sim$". 相应地，将 $a\rho b$ 记作 $a\sim b$.

**例 1.6** 在 $\mathbb{Z}$ 中定义一个二元关系 $\rho$ 如下：对于任意的 $m,n\in\mathbb{Z}$，

$$m\,\rho\,n \text{ 当且仅当 } m\mid n.$$

因为 $\rho$ 不满足对称性，所以它不是 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系.

**例 1.7** 在 $\mathbb{Q}$ 中定义一个二元关系 $\rho$ 如下：对于任意的 $\frac{n}{m},\frac{q}{p}\in\mathbb{Q}$，

$$\frac{n}{m}\rho\,\frac{q}{p} \text{ 当且仅当 } mq=np,$$

则 $\rho$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的等价关系.

**例 1.8** 设 $A$ 是任意集合，显然

$$E=\{(a,a)\mid a\in A\} \text{ 与 } A\times A$$

是 $A$ 上的两个等价关系，且对于 $A$ 上的任一等价关系"$\sim$"，均满足 $E\subseteq\sim\subseteq A\times A$.

设 $A$ 是一个集合，"$\sim$"是 $A$ 上的一个等价关系. 对于任意的 $a\in A$，记

$$\bar{a}=\{\,b\in A\mid b\sim a\},$$

即 $\bar{a}$ 是 $A$ 中所有与 $a$ 等价的元所构成的 $A$ 的一个子集，称 $\bar{a}$ 是元素 $a$ 所在的等价类. 同时，记

$$A/\sim=\{\bar{a}\mid a\in A\},$$

即 $A/\sim$ 是 $A$ 中所有不同的等价类所构成的集合，称 $A/\sim$ 是集合 $A$ 关于等价关系

“$\sim$”的商集. 定义从集合 $A$ 到它的商集 $A/\sim$ 的映射 $\pi: A \to A/\sim$ 如下：

$$\pi(a) = \bar{a}, \qquad \text{这里 } a \in A.$$

显然，$\pi$ 是从 $A$ 到 $A/\sim$ 的一个满射. 通常，称这个映射为自然映射.

一个集合的商集本质上仍然是一个集合，它的元素是由一些等价类所构成的. 在一般情况下，商集中每个等价类均是 $A$ 的一个子集，因此它可以由这个子集中的任何一个元素来表示，从而等价类作为商集中的一个元素在表达形式上往往不是唯一的. 请看下面的例子.

**例 1.9**　在 $\mathbb{Q}$ 上定义等价关系 $\sim$ 如下：对于任意的 $x, y \in \mathbb{Q}$，

$$x \sim y \text{ 当且仅当 } x - y \in \mathbb{Z},$$

则 $\bar{x}$ 是 $\mathbb{Q}$ 中所有与 $x$ 的小数部分相同的有理数所成集，且 $\mathbb{Q}$ 关于等价关系“$\sim$”的商集为

$$\mathbb{Q}/\sim = \{\bar{x} \mid x \in \mathbb{Q}\}.$$

就商集中的元素 $\bar{x}$ 而言，$\bar{x} = \overline{n+x}$，这里 $n \in \mathbb{Z}$，它的表达形式有无穷多种.

### 1.2.2　分　类

对集合进行分类，可以有效地对集合的性质进行研究. 为此先给出下列定义.

**定义 1.4**　设 $A$ 是一个非空集合，$\{A_i \mid i \in I\}$ 是 $A$ 的一个子集族. 若满足

(1) 对于任意的 $i \in I$，$A_i \neq \varnothing$；

(2) 对于任意的 $i, j \in I$，$A_i = A_j$ 或 $A_i \cap A_j = \varnothing$；

(3) $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$，

则称 $\{A_i \mid i \in I\}$ 是 $A$ 的一个分类.

**例 1.10**　考虑整数集 $\mathbb{Z}$，由定义 1.4 易知

$$A_1 = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad A_2 = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad A_3 = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

构成了 $\mathbb{Z}$ 的一个分类. 对于同一个类 $A_i$ 中的任何两个数 $m, n$，均具有如下性质：被 3 除具有相同的余数，称 $m$ 与 $n$ 模 3 同余，记作 $m \equiv n \pmod 3$.

利用一个集合上的等价关系，可以决定集合的一个分类，即有以下定理.

**定理 1.4**　设 $A$ 是一个集合，“$\sim$”是 $A$ 上的一个等价关系，则

(1) 对于任意的 $a \in A$，$\bar{a} \neq \varnothing$；

(2) 对于任意的 $a, b \in A$，$\bar{a} = \bar{b}$ 或 $\bar{a} \cap \bar{b} = \varnothing$；

(3) $A = \bigcup\limits_{a \in A} \bar{a}$.

**证明**：(1) 对于任意的 $a \in A$，因 $a \in \bar{a}$，故 $\bar{a} \neq \varnothing$.

(2) 对于任意的 $a, b \in A$，若 $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \varnothing$，下证 $\bar{a} = \bar{b}$. 任取 $x \in \bar{a}$，则 $x \sim a$. 因为 $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \varnothing$，可取 $c \in \bar{a} \cap \bar{b}$，则 $c \sim a$，且 $c \sim b$. 于是 $a \sim c$，且 $c \sim b$，故由传递性知 $x \sim b$，从而 $x \in \bar{b}$，即 $\bar{a} \subseteq \bar{b}$. 同理可证 $\bar{b} \subseteq \bar{a}$. 故 $\bar{a} = \bar{b}$.

(3) $A = \bigcup\limits_{a \in A} \bar{a}$ 是显然的.

事实上,定理 1.4 的逆也是成立的,即有以下定理.

**定理 1.5** 设 $A$ 是一个非空集合,则 $\sim \to A/\sim$ 定义了从 $A$ 上的全部等价关系构成的集合 $E(A)$ 到 $A$ 的所有分类所构成的集合 $Q(A)$ 之间的双射.

**证明:** 若"$\sim$"是集合 $A$ 上的一个等价关系,由定理 1.4 知,$A/\sim$ 构成集合 $A$ 上的一个分类. 定义 $f:E(A)\to Q(A)$ 如下:

$$f(\sim) = A/\sim,$$

则 $f$ 是从 $E(A)$ 到 $Q(A)$ 的一个映射.

反过来,若 $S=\{A_i \mid i\in I\}$ 是 $A$ 的一个分类,在 $A$ 上定义如下关系:对于任意的 $a,b\in A$,

$$a \sim b \text{ 当且仅当存在唯一的 } i \in I, \text{使得 } a,b \in A_i.$$

直接验证易知"$\sim$"是 $A$ 上的一个等价关系. 定义 $g:Q(A)\to E(A)$ 如下:

$$g(S) = \sim.$$

则 $g$ 是从 $Q(A)$ 到 $E(A)$ 的一个映射.

最后验证: $fg=1_{Q(A)}$,且 $gf=1_{E(A)}$. 故由定理 1.2 知,$f$ 是从 $E(A)$ 到 $Q(A)$ 之间的双射.

**例 1.11** 设 $\varphi$ 是从集合 $A$ 到集合 $B$ 的一个映射,在 $A$ 中定义一个二元关系"$\sim$"如下:对于任意的 $a,b\in A$,

$$a \sim b \text{ 当且仅当 } \varphi(a) = \varphi(b).$$

(1) 证明:"$\sim$"是 $A$ 上的一个等价关系.

(2) 若 $\pi$ 是从集合 $A$ 到商集 $A/\sim$ 的自然映射,则存在唯一的从集合 $A/\sim$ 到集合 $B$ 的映射 $\psi$,使得 $\psi\pi=\varphi$.

**证明:** (1) 依据等价关系的定义,直接验证易得.

(2) 先证存在性:定义 $\psi:A/\sim\to B$ 如下:对于任意的 $\bar{a}\in A/\sim$,

$$\psi(\bar{a}) = \varphi(a).$$

若 $\bar{a}=\bar{b}$,则 $a\sim b$,从而 $\varphi(a)=\varphi(b)$,即 $\psi(\bar{a})=\psi(\bar{b})$. 故 $\psi$ 是从集合 $A/\sim$ 到集合 $B$ 的映射,且满足 $\psi\pi=\varphi$.

再证唯一性:假定还存在从集合 $A/\sim$ 到集合 $B$ 的映射 $\psi'$,使得 $\psi'\pi=\varphi$. 任取 $\bar{a}\in A/\sim$,因为

$$\psi'(\bar{a}) = \psi'(\pi(a)) = \psi'\pi(a) = \varphi(a) = \psi\pi(a) = \psi(\bar{a}),$$

从而 $\psi'=\psi$,即满足上述条件的 $\psi$ 是唯一的.

### 1.2.3 同余关系

作为等价关系的特殊情形,我们考虑如下同余关系:设 $n$ 是一个给定的正整数,对于任意的 $a,b\in\mathbb{Z}$,若 $n\mid(a-b)$,则称 $a$ 与 $b$ 模 $n$ 同余,记作 $a\equiv b \pmod n$,即

$$a \equiv b \pmod n \text{ 当且仅当 } n \mid (a-b).$$

显然,同余关系是$\mathbb{Z}$上的一个等价关系. 直接验证有下述结果.



此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com