中学数学专题丛书

叶尧城 主编

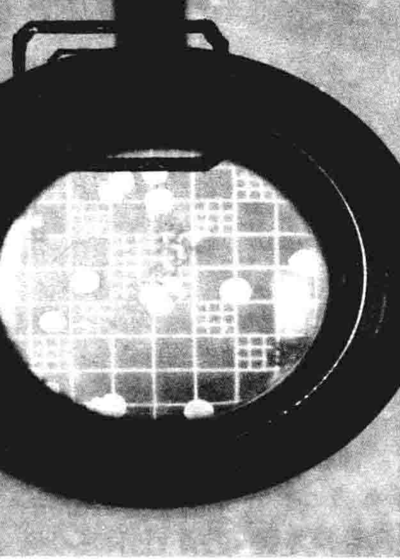
程金辉 编著

直线 平面 简单几何体

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU

湖北教育出版社

18



中学数学专题丛书

叶尧城 主编

直线 平面 简单几何体

程金辉 编著

18

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

直线·平面·简单几何体/程金辉编著 .—武汉:湖北教育出版社,2002

(中学数学专题丛书/叶尧城主编)

ISBN 7-5351-3174-3

Ⅰ.直… Ⅱ.程… Ⅲ.几何课-中学-教学参考资料 Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 095565 号

出版 发行:湖北教育出版社　　武汉市青年路 277 号
网 址:http://www.hbedup.com　　邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:文字六〇三厂印刷　　(441021·湖北襄樊盛丰路 45 号)
开 本:787mm×1092mm 1/32　　6.5 印张
版 次:2002 年 4 月第 1 版　　2002 年 4 月第 1 次印刷
字 数:124 千字　　印数:1—5 000

ISBN 7-5351-3174-3/G·2579　　定价:8.50 元

总　序

随着素质教育的深入推进，需要我们在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁，以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建？改革教材成为了人们选择的突破口！当前，国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用，新教材在“为所有的学生打好共同基础”上将有所作为。然而，我国幅员辽阔，地区间的教育水平的差异大，个体间学习水平的差异大。如何真正地体现“以学生发展为本”，发展学生的个性特长，让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高，还需要通过特定的教学过程来完成，其中应有好的素材和高质量的课外读物(而非散见于市面上的“检测题”、“同步练习”、“习题集”等)。因此，我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物，以专题讲座的形式，帮助学生了解知识的发生、发展过程，学会分析、解决问题的思想方法，深化、拓宽相关知识。

有鉴于此，我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有 18 个小册子，各册相对独立又相互联系，小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触，介绍一点数

学史料，有助于学生吸收各种不同的数学经验，理解各种不同的数学思想观点，体会数学的人文价值；着力反映知识的纵横联系，并以范例的形式予以说明；精选典型例题，揭示重难点，说明重在何处，难在哪里，如何理解，着重分析解题思路，阐释思想方法；选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题，引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题，供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生，可系统阅读，也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲，该套丛书具有如下特点：

1. **帮助学生夯实基础**。通过知识精讲、典例剖析、归纳小结，落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力**。精选思想性强的综合题，启迪学生的思维，开阔学生的思路，落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用**。精选密切联系生活实际和社会实践的应用题，促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新**。精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题，培养学生的探究能力。

5. **引导学生走向成功**。选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型，有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩，走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试，难免出现这样或那样的疏漏和不足，敬请读者提出批评和建议，以便再版时修改，使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002年1月

引　言

在人类赖以生存的地球这个三维空间里，无处不存在几何问题．人类为了自身的生存和发展，需要认识她生活所在的三维空间．在日常生活、生产实践和科学研究中，人们需要了解自身和各种物体以及各种物体之间的相互位置关系，各种物体的形状和大小，各种物体在运动中所经过的路径，需要确定方向，测量距离，计算面积和容积等．逐步形成了点、线、面、体等几何图形的概念，认识了角度、长度、面积、体积等几何量的本质，掌握了求这些几何量的计算方法，从而逐步建立起一门科学体系——几何学．由此可见，几何学研究的对象就是从现实世界中抽象出来的各种几何图形．而它们又同我们的日常生活息息相关．

在初中，我们已研究过同一平面内的平面图形的形状、大小和位置关系以及平面图形的画法与计算．在实际问题中，只知道这些知识是远远不够的，例如土木建筑、机器制造、航空测量等，都需要进一步研究空间图形问题．

空间图形是由空间的点、线、面所构成，平面图形是空间图形的一部分．本书将在平面几何知识的基础上，给大家介绍空间元素的位置关系、性质、计算以及它们的应用．

目录

第一章 直线与平面

一、平面及其基本性质

1. 平面

我们在日常生活中常见的地面、黑板面、平静的水面等，都给我们以平面的形象.几何里所说的平面就是从这样的一些物体抽象出来的.应该注意的是，几何里的平面是无限延展的.

当人们在适当的位置观察桌面、黑板面等物体时，感到它们都很像平行四边形.因此，在立体几何中，通常用平行四边形来表示平面(图 1-1).若表示水平放置的平面，通常把平行四边形的锐角画成45°，横边画成等于邻边的两倍.如果有几个平面相交在一起，应把一个平面被其他平面遮住的部分的线段画成虚线或不画(图 1-2).

表示一个平面，通常用一个希腊字母 α、β、γ 来表示，也可以用平行四边形对角线的两端点的字母来表示，如图 1-1 中平面 AC.当几个平面相交在一起时，应当用不同的字母表示不同的平面.如图 1-2 中平面 α，平面 β.

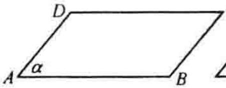


图 1－1

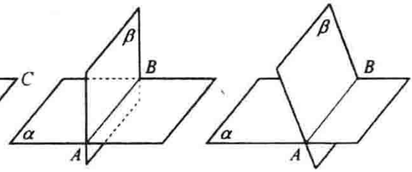


图 1－2

2. 平面的基本性质

研究空间图形的性质和研究平面图形的性质一样，也是依据一些公理作为推理的基础．立体几何中，作为逻辑推理的基础就是平面的三条基本性质(三条公理)．

公理 1 如果一条直线上的两个点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内(图 1－3)．

这时，我们就说直线在平面内，或者说平面经过直线．否则，就说直线在平面外．

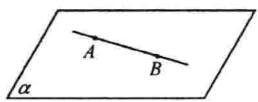


图 1－3

我们常常需要用公理 1 来判断直线是否在一个平面内．在生产实际中，也常常利用它来检查所加工的“面”是否“平”，这时，只需用一根直尺放在“面”上，看看直尺的边缘是否与“面”完全重合．

另外，我们还常常借助集合的符号来表示点、线、面的位置关系，点 A 在直线 a 上，记作 $A\in a$；点 A 在直线 a 外，记作 $A\notin a$；点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；点 A 在平面 α 外，记作 $A\notin\alpha$；直线 a 在平面 α 内，记作 $a\subset\alpha$；直线 a 在平面 α 外，记作 $a\not\subset\alpha$．

公理 2 如果两个平面[①]有一个公共点,那么它们还有其他公共点,且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.

如图 1-4,平面 α、β 有一个公共点 A,就一定还有其他的公共点(如 B、C),这些点都在过点 A 的直线 BC 上.这时,我们就说平面 α 与 β 相交,记为 $\alpha \cap \beta = BC$.

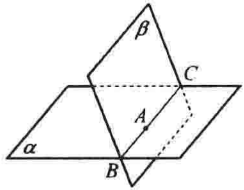


图 1-4

公理 2 常常用来确定两平面的交线,或用来证明空间的点共线等问题.

公理 3 经过不在同一直线上的三点,有且只有一个平面(图 1-5).

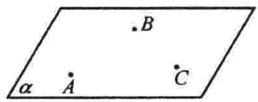


图 1-5

这时我们也说,不在同一直线上的三点确定一个平面.由点 A、B、C 确定的平面,可记为平面 ABC.

公理 3 在日常生活中的应用很广.如一扇门用两个合页和一把锁就可以固定了,照相机、测量仪的支撑架做成三支脚就稳定了等.

根据公理 3,我们可以得到下面的推论.

推论 1 经过一条直线和这条直线外一点,有且只有一个平面(图 1-6(1)).

---

① 在本章中,没有特别说明的"两个平面",均指不重合的两个平面.

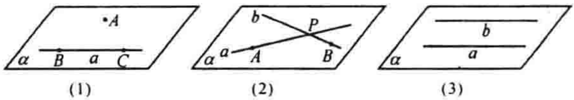


图 1-6

已知:直线 a 和 a 外一点 A(图 1-6(1)).

求证:直线 a 和点 A 可以确定一个平面.

证明:在直线 a 上任取两点 B、C,于是点 A、B、C 三点不共线,根据公理 3,经过 A、B、C 三点有一个平面 α.又因为 $B\in a$,$C\in a$,$B\in\alpha$,$C\in\alpha$,所以由公理 1 可知 $a\subset\alpha$,即平面 α 是经过直线 a 和点 A 的平面.

又根据公理 3,经过不共线的三点 A、B、C 的平面只有一个,且经过直线 a 和点 A 的平面必经过点 A、B、C,所以经过直线 a 和点 A 的平面只有一个.即直线 a 与点 A 确定平面 α.

推论 2 经过两条相交直线,有且只有一个平面(图 1-6(2)).

直线 a 与 b 相交于 P 点,记为 $a\cap b=P$.

已知:$a\cap b=P$.

求证:直线 a 和 b 确定一个平面.

证明:分别在直线 a、b 上取不同于点 P 的两点 A、B,于是点 A、B、P 不共线,根据公理 3,经过点 A、B、P 有一个平面 α.因 $A\in a$,$P\in a$,$A\in\alpha$,$P\in\alpha$,根据公理 1,有 $a\subset\alpha$;同理 $b\subset\alpha$,即经过直线 a、b 有一个平面 α.

又有公理 3,经过点 A、B、P 的平面只有一个,且经过直

线 a、b 的平面必经过点 A、B、P，所以经过直线 a、b 的平面只有一个，即直线 a、b 确定一个平面.

推论3 经过两条平行直线，有且只有一个平面(图 1-6(3)).

已知：直线 $a // b$.

求证：直线 a、b 确定一个平面.

证明：因为 $a // b$，根据平行直线的定义知道，直线 a、b 在同一平面 α 内，即经过直线 a、b 有一个平面 α.

在直线 a 上任取一点 A，则 $A \in \alpha$，$A \notin b$，$b \subset \alpha$，根据推论1，经过点 A 和直线 b 的平面只有一个，且经过 a、b 的平面必经过点 A 和直线 b，所以经过直线 a、b 的平面只有一个，即直线 a、b 确定一个平面.

公理3及其三个推论是我们证明空间元素共面的依据.

例1 已知平面 α 外的三点 A、B、C 不在同一直线上，且 $AB \cap \alpha = E$，$BC \cap \alpha = F$，$AC \cap \alpha = G$. 求证：E、F、G 三点共线.

证明：如图 1-7，因点 A、B、C 不共线，根据公理3，点 A、B、C 确定平面 ABC，又 $AB \cap \alpha = E$，根据公理2，平面 ABC 与 α 有过点 E 的交线 a. 又 $\because BC \cap \alpha = F$，$\therefore F \in$ 平面 ABC，且 $F \in \alpha$，$\therefore F \in a$.

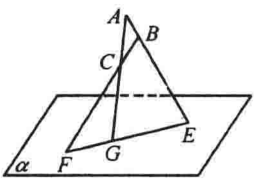


图 1-7

同理，$G \in a$，即 E、F、G 三点共线.

例2 直线 l 与三条平行线 a、b、c 相交于点 A、B、C，求证：直线 l、a、b、c 共面.

证明:如图1-8,因直线 $a // b$,由推论3,直线 a、b 确定平面 α.

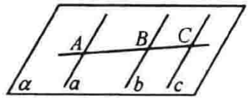


图 1-8

又 $l \cap a = A$,$l \cap b = B$,

$\therefore A \in \alpha$,$B \in \alpha$,$\therefore l \subset \alpha$.

$\because l \cap c = C$,$\therefore C \in \alpha$.

$\because b // c$,由推论3,直线 b、c 确定平面 β.则 $b \subset \beta$,$c \in \beta$,且 $c \notin b$.另一方面,有 $b \subset \alpha$,$c \in \alpha$,根据推论1,经过直线 b 和点 c 的平面有且只有一个.从而平面 α 与平面 β 重合,即直线 l、a、b、c 共面.

习题 1.1

1.(1)一条直线上有两个点在一个面内,这个面是否一定是平面?为什么?

(2)一条直线上所有的点都在一个面内,这个面是否一定是平面?为什么?

2. 两个平面相交,能否有不在一直线上的三个公共点?

3. 求证:三条直线两两相交,但不共面,则这三条直线共点.

4. 空间四边形 $ABCD$ 中,E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 上的点,若 EF 与 GH 相交于点 P,求证:EF、GH、AC 三线共点.

5. 四条直线两两相交,且不共点,求证:这四条直线共面.

阅读材料　截面与空间作图问题

1. 截面

一个平面和几何体的部分面相交,交线所围成的平面图

形叫做平面截几何体的截面.

利用平面的基本性质,可以确定几何体的截面.

例1 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,根据所给条件,确定截面的形状,并作出图形.

(1)已知截面经过点 B、C_1 和 AD 的中点 E;

(2)已知截面经过 AB、BC 的中点 M、N 及 A_1D_1 的中点 F;

(3)已知截面经过 AB、BC 的中点 M、N 及面 ADD_1A_1 的中心 G.

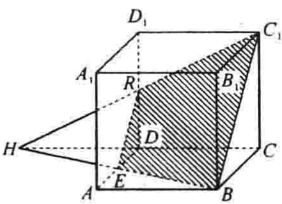


图 1-9

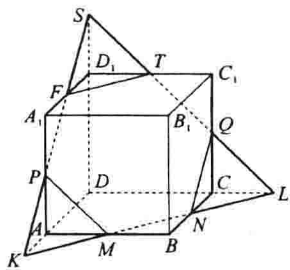


图 1-10

解 (1)截面与侧面 BCC_1B_1 有公共点 B、C_1,所以,截面$\cap$侧面 $BCC_1B_1 = BC_1$.同理,截面$\cap$底面 $ABCD = BE$.延长 BE 并与 CD 的延长线交于 H,连 C_1H 交 DD_1 于 R,连 ER,则等腰梯形 BC_1RE 为满足题设条件的截面(图 1-9).

(2)因截面与底面 $ABCD$ 有公共点 M、N,所以截面$\cap$底面 $ABCD = MN$,设 MN 与 DA、DC 的延长线交于 K、L 点,连 KF 与 A_1A 相交于点 P,与 DD_1 的延长线交于 S,连 SL 与 D_1C_1 交于 T,与 C_1C 交于 Q,连 MP、FT、TQ、QN,则正六边形 $MNQTFP$ 为满足题设条件的截面(图 1-10).

(3)同(2),设直线 MN 与 DA、DC 的延长线交于点 K、L,连 KG 交 AA_1 于 P_1,交 DD_1 与 S_1,连 S_1L 交 CC_1 于 Q_1,连 P_1M,Q_1N,则五边形 $MNQ_1S_1P_1$ 即为满足题设条件的截面(图 1-11).

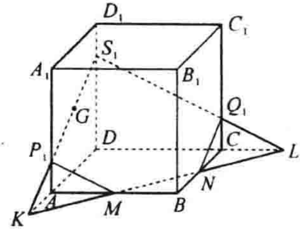


图 1-11

应该注意,求作截面的关键是找出截面与几何体各面的交线,通常是通过某一交线与几何体的棱或棱的延长线来确定截面与几何体其他面的交点,进而确定截面与几何体其他面的交线.

2. 空间作图

空间作图是指按照一定的条件,根据作图公法(公认为最基本的作图方法),把作图过程按照逻辑的层次表达出来.立体几何中,对于空间作图,规定有下面三条作图公法:

(1)如果一个平面符合确定平面的条件(即满足公理 3 或三个推论的条件),那么这个平面就认为是可以作出的;

(2)如果两个平面相交,那么它们的交线就认为是可以作出的;

(3)如果已知空间的一个平面,那么就认为可以在这个平面内完成平面几何中所能完成的一切作图.

因此,空间作图,实际上是有限次地运用三种空间基本作图:

(1)过不在一直线上的三个点(或一直线和直线外一点或两条相交直线或两条平行直线)作一个平面;

(2)作出已知两个相交平面的交线;

(3)在一个已知平面内,用圆规、直尺等作图工具作出平面图形.

空间作图不能像平面作图那样,可以利用圆规和直尺等作图工具在平面内进行作图,而只能用合乎逻辑的论理来阐明作图的步骤,归结为有限次的空间基本作图问题.

例 2 过不在同一平面内的两条直线 a、b 和 a、b 外一点 C,作一条直线,使该直线和这两条直线都相交.

作法:

(1)过直线 a 和点 C 可以作一个平面 α.

(2)过直线 b 和点 C 可以作一个平面 β.

(3)平面 α 与 β 有一公共点 C,它们的交线 l 是可作的.

讨论:因直线 l 与 a 都在平面 α 内,所以当 $l /\!/ a$ 时,本题无解.同理,当 $l /\!/ b$ 时,本题亦无解,只有当 $l \not\parallel a$ 且 $l \not\parallel b$ 时,本题有一解,此时 l 与 a、b 必相交,设交点分别为 A、B(图 1-12),直线 l 即为所求.

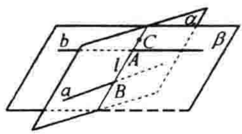


图 1-12

二、空间线面位置关系

1. 空间两条直线的位置关系

在平面内的两条直线[①]的位置关系只有相交与平行两种.

① 本章中没有特别说明的“两条直线”,均指不重合的两条直线.