普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

胡卫群 石小平 陈菊珍 胡 琴 编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

胡卫群　石小平　陈菊珍　胡　琴　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十二五”规划教材. 全书共六章，内容包括线性方程组与矩阵，矩阵的运算，方阵的行列式，线性方程组解的理论，方阵的特征值、特征向量和对角化，以及二次型. 一些较难的重要定理或内容证明，放在相关章节的附录中，每章后面都配备了适量习题，有利于读者更好地理解数学概念和应用数学知识解决实际问题.

本书可作为普通高校非数学类专业“线性代数”课程的教材，也可供自学者和科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/胡卫群，石小平，陈菊珍，胡琴编. —北京：科学出版社，2013
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-038381-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①胡… ②石… ③陈… ④胡… Ⅲ. ①线性代数
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 189963 号

责任编辑：相 凌 唐保军／责任校对：胡小洁
责任印制：徐晓晨／封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2013 年 9 月第 一 版　开本：720 × 1000 B5
2014 年 7 月第二次印刷　印张：11 1/2
字数：232 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

线性代数是处理有限维线性问题的代数分支, 由于线性问题广泛存在, 非线性问题在一定条件下可化成线性问题来处理, 因此线性代数的理论与方法越来越广泛地应用于科学研究各个领域和各行各业及数学的很多分支, 尤其是在计算机普及应用的今天, 线性代数的知识与理论的重要性也越来越被普遍认识.

本书围绕线性代数的核心内容, 并紧扣教育部数学与统计学教学指导委员会编制的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》及全国硕士研究生入学统一考试大纲的要求, 在内容上保持理论体系的完整性, 在表达上以通俗易懂为原则, 在内容编排上借鉴了国内外同类优秀教材的编写思路与处理方法, 力求与中学数学自然接轨、代数与几何相互融合, 注重数学概念的实际背景与几何直观的引入, 同时也注意到内容的拓展延伸, 尝试数学应用能力的培养. 一些较难的重要定理或内容的证明, 放在相关章节的附录中, 以便读者参看.

全书共 6 章. 第 1 章从中学生熟悉的求解线性方程组的高斯消元法入手, 给出线性方程组与矩阵的对应关系, 把线性方程组消元法求解过程转化为矩阵初等变换. 矩阵在求解线性方程组时非常方便, 在自然科学、工程技术和国民经济等许多领域中的实际问题都可以用矩阵概念来描述, 且可以用相关的矩阵理论与方法去解决. 因此矩阵已经成为线性代数的主要研究对象之一.

第 2 章介绍矩阵的运算, 包括加法、数乘、乘法、转置、分块及求逆, 并给出它们的简单应用.

行列式是线性代数又一个重要的研究对象, 在线性代数和后续课程以及工程技术的很多领域, 有诸多问题往往要应用行列式这个数学工具. 第 3 章在介绍二阶、三阶行列式的基础上, 把行列式的概念推广到一般的 n 阶行列式, 给出计算行列式的方法, 利用 n 阶行列式的运算性质进一步讨论了方阵可逆的条件, 并给出一类线性方程组的公式解.

第 4 章讨论了向量组的线性相关性, 利用矩阵的秩给出线性方程组有解、无解的判别条件, 并在有解的情况下给出解的结构.

第 5 章讨论方阵的特征值和特征向量, 利用特征值和特征向量给出方阵相似对角化的条件. 特别对实对称矩阵给出正交对角化的方法.

第 6 章讨论了一般数域上的二次型, 介绍了化二次型为标准形的两种方法——合同变换与配方法, 并进一步讨论了实二次型的标准形与规范形.

本书在编写过程中得到南京林业大学代数教研室全体老师的热情支持, 并给出

了不少改进意见, 在此表示衷心的感谢.

由于本教材与传统教材体系有所不同, 加之编者水平与经验所限, 肯定存在错漏或考虑不当之处, 真诚地恳请读者多提宝贵意见, 以便我们进一步改进完善.

编　者

2013 年 7 月

目　录

第 1 章　线性方程组与矩阵

1.1　引　　言

在中学解析几何中已经讨论过两条直线的位置关系、二次曲线的求解问题, 这些问题事实上最终归结为二元、三元一次方程组的求解问题. 首先看两个例子.

例 1.1　解下列二元一次方程组, 并在直角坐标系中画出它们的图形:

$$(1)\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2 \end{cases};\qquad (2)\begin{cases} x-y=0 \\ x-y=1 \end{cases};\qquad (3)\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-2y=0 \end{cases}.$$

解　(1) 此方程组有唯一的解 $(1,1)$, 即当 $x=1, y=1$ 时, 方程组中两个等式均成立. 其几何意义为, xOy 平面上两条直线相交, 交点的坐标就是方程组 (1) 的唯一解 $(1,1)$, 如图 1-1 所示.

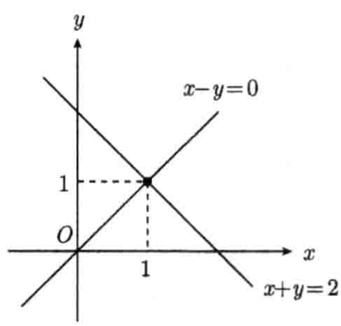

图 1-1

(2) 容易验证此方程组没有解, 即两个方程的解集不含公共元素. 所以方程组 (2) 代表两条平行 (不重合) 的直线, 如图 1-2 所示.

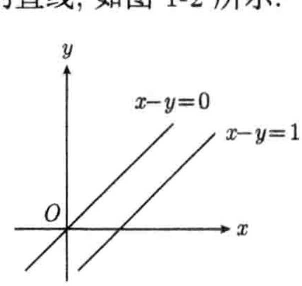

图 1-2

(3) 此方程组中第二个方程是第一个方程的 2 倍, 从而两个方程的解集相同. 第一个方程变形为 $x = y$ 得全部解为 (t, t), 其中 t 为任意实数. 在平面直角坐标系中其图形为两条重合的直线, 即该直线上所有点的坐标对应此方程组的全部解, 如图 1-3 所示. □

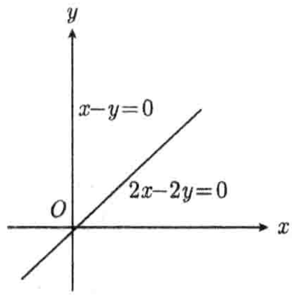

图 1-3

例 1.2　在平面直角坐标系中, 已知一条抛物线的方程为 $y = ax^2 + bx + c$, 经过已知三个点 $P_1(1,1), P_2(2,3), P_3(3,7)$, 求该抛物线的方程.

解　求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的方程就是求 a, b, c 的值. 将三个已知点的坐标代入方程得

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 7 \end{cases}$$

此即求解三元一次方程组的问题, 利用消元代入法求得 $a = 1, b = -1, c = 1$. 于是, 所求方程为 $y = x^2 - x + 1$. □

在工程技术和科学研究的各个领域中, 大量的问题常常归结为 $n(\geqslant 3)$ 元的线性方程组的求解问题 (例如, 工程技术中的计算问题, 经济管理中的规划、决策问题, 统计分析中的回归模型与求解问题等, 都要用到线性方程组). 而矩阵的方法则是解决这些问题的有效方法.

本章引入一般的线性方程组、矩阵及矩阵初等变换等概念, 利用矩阵的初等变换给出求解线性方程组的一般方法.

1.2　线性方程组

1.2.1　线性方程组的相关概念

定义 1.1　n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的如下形式的方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1-1}$$

称为 n 元一次方程, 也称 n**元线性方程**, 其中一次项系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和常数项 b 都是已知数.

设 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 n 个数, 如果将 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 代入方程 (1-1) 能使方程变为等式, 即 $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = b$ 成立. 则这一有序数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 称为方程 (1-1) 的一个解. 数组中的第 i 个数 c_i(即 x_i 的取值) 称为解的第 i 个分量, $i = 1, 2, \cdots, n$.

具有同样 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的若干个线性方程构成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1-2}$$

称为 n**元线性方程组**, 这里 $a_{ij}, b_k(i, k = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$ 为已知数. 如果一有序数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是方程组 (1-2) 中所有方程的解, 也就是说, 将 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 代入方程组 (1-2) 的每一个方程, 能使所有这些方程都变为等式, 就称这一有序数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 为这个方程组的解. 方程组所有解构成的集合称为 (1-2) 的**解集**. 如果方程组有解就称方程组是**相容**的, 否则称方程组**不相容**.

当方程组 (1-2) 中 $b_k = 0(k = 1, \cdots, m)$ 时, 即得

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1-3}$$

称 (1-3) 为**齐次线性方程组**. 如果方程组 (1-2) 中 $b_k(k = 1, \cdots, m)$ 不全为零, 则称 (1-2) 为**非齐次线性方程组**. (1-3) 也称为 (1-2) 的**对应齐次线性方程组**或**导出齐次线性方程组**.

显然 $(0, 0, \cdots, 0)$ 是齐次线性方程组 (1-3) 的解, 称为 (1-3) 的**零解**或**平凡解**, 因此齐次线性方程组总是相容的.

1.2.2 线性方程组的同解变换

中学时已经学过用高斯消元法求解二元一次、三元一次方程组 (也称为二元、三元线性方程组), 这里首先看两个简单的例子, 并从这些例子的求解过程得到一些启发.

例 1.3 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$$

解　第一个方程的 (-1) 倍加到第二个方程, 就得到 $x_2 = 1$. 再用 $x_2 = 1$ 代入第一个方程, 得 $x_1 = -2$, 即求得有序数对 $(x_1, x_2) = (-2, 1)$ 是该方程组的唯一解. □

例 1.4　求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$$

解　第三个方程乘以 $\dfrac{1}{3}$, 得到

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

再将上面第一个方程的 (-2) 倍加到第二个方程, 第一个方程的 (-1) 倍加到第三个方程, 即得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad\quad 4x_2 - x_3 = 2 \\ \qquad\quad 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

这时方程组中第二、三个方程是含有变量 x_2, x_3 的方程组, 变量已经从三个减少到两个, 由二元一次方程组的解法, 可以求出 x_2, x_3 的值. 或者继续进行消元变换, 将第三个方程的 (-2) 倍加到第二个方程, 再把第二、第三两个方程的次序互换, 即得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad\quad 2x_2 - x_3 = 4 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = -6 \end{cases}$$

这样, 把第三个方程 $x_3 = -6$ 回代入第二个方程中, 解出 $x_2 = -1$, 再把 $x_2 = -1, x_3 = -6$ 回代入第一个方程中, 就可以解出 $x_1 = 9$, 即求得有序数组 $(x_1, x_2, x_3) = (9, -1, -6)$ 为方程组的唯一解. □

从上述的消元法求解过程可以看出，其目的是为了使原方程组通过变换尽可能地减少变量的个数 (如例 1.4 中变量从三个减少到两个, 再减少到一个), 然后再利用回代的方法求出线性方程组的解. 这种求解的方法, 称为高斯消元法.

综合上述求解过程, 我们对方程组作了如下三种变换:

(1) 换位变换: 互换两个方程的位置 (对调第 i, 第 j 两个方程, 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$).

(2) 倍乘变换: 用一个非零的数同乘某一个方程的等号两端 (第 i 个方程乘以 k, 记为 $r_i \times k$).

(3) 消去变换: 把一个方程的等号两端同乘以 k 倍, 分别加到另一个方程的等号两端 (第 j 个方程两端乘以 k 加到第 i 个方程的两端, 记为 $r_i + kr_j$).

在具体的例子中可以用更直观的记号来表示以上三种变换.

定义 1.2 以上三种变换 (换位变换, 倍乘变换, 消去变换) 称为**方程组的初等变换**. 把不改变线性方程组解的变换称为**同解变换**, 同解的方程组也称为**等价的方程组**.

命题 1.1 线性方程组的初等变换是同解变换.

证明 因为用换位变换、倍乘变换、消去变换所得到的新方程组，可以用同类型的变换变为原方程组. 设 (A) 为原方程组, (B) 为变换后的方程组, 容易验证:

$$
\begin{aligned}
&\text{若(A)} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \text{(B)}, \quad \text{则(B)} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \text{(A)};\\
&\text{若(A)} \xrightarrow{r_i \times k} \text{(B)}, \quad \text{则(B)} \xrightarrow{r_i \times \frac{1}{k}} \text{(A)};\\
&\text{若(A)} \xrightarrow{r_i + kr_j} \text{(B)}, \quad \text{则(B)} \xrightarrow{r_i - kr_j} \text{(A)}.
\end{aligned}
$$

因此方程组的初等变换是同解变换. □

例 1.5 求解线性方程组

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1\\
x_1 - x_2 - x_3 = 2\\
3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0
\end{cases}
$$

解 求解过程如下:

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1\\
x_1 - x_2 - x_3 = 2\\
3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0
\end{cases}
\xrightarrow[\text{换位变换}]{r_1 \leftrightarrow r_2}
\begin{cases}
x_1 - x_2 - x_3 = 2 \qquad \times(-2)\ \times(-3)\\
2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1\\
3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0
\end{cases}
$$

$$
\xrightarrow[\text{消去变换}]{\substack{r_2 - 2r_1\\ r_3 - 3r_1}}
\begin{cases}
x_1 - x_2 - x_3 = 2\\
x_2 - x_3 = -3 \qquad \times(-5)\\
5x_2 - 2x_3 = -6
\end{cases}
\xrightarrow[\text{消去变换}]{r_3 - 5r_2}
\begin{cases}
x_1 - x_2 - x_3 = 2\\
x_2 - x_3 = -3\\
3x_3 = 9 \qquad \times 1/3
\end{cases}
$$

$$\xrightarrow[\text{倍乘变换}]{r_3\times\frac{1}{3}}\left\{\begin{array}{rl} x_1-x_2-x_3=2 & \\ x_2-x_3=-3 & \\ x_3=3 & \times 1 \end{array}\right. \xrightarrow[\text{消去变换}]{r_2+r_3}\left\{\begin{array}{rll} x_1-x_2-x_3=2 & & \\ x_2 \quad =0 & \times 1 & \\ x_3=3 & & \times 1 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[\text{消去变换}]{\substack{r_1+r_2\\ r_1+r_3}}\left\{\begin{array}{l} x_1=5 \\ x_2=0 \\ x_3=3 \end{array}\right.$$

因为以上所有初等变换都是同解变换, 故 $\left\{\begin{array}{l} x_1=5 \\ x_2=0 \\ x_3=3 \end{array}\right.$ 就是原方程组的解. □

从以上例子可以看出, 线性方程组的解都是由方程组的系数和常数项经过加、减、乘、除四则运算得到的. 如果原方程组的系数都是实数, 由于实数集合对加、减、乘、除四则运算封闭 (即对任意实数 a, b, 则 $a+b, a-b, ab, a\div b(b\neq 0)$ 也为实数), 方程组的唯一解的分量都是实数. 同样, 有理数集合对加、减、乘、除运算也封闭, 因此有理系数线性方程组的唯一解的分量也都是有理数. 为了更准确地描述以上事实, 给出如下定义

定义 1.3 设 $\mathbb{F}$ 是包含 0 和 1 的复数集合的子集, 并且对加、减、乘、除运算封闭 (除法时除数不为 0), 则称 $\mathbb{F}$ 是一个数域.

例如, 复数集合 $\mathbb{C}$、实数集合 $\mathbb{R}$、有理数集合 $\mathbb{Q}$ 对数的通常运算都构成数域, 分别把它们称为复数域, 实数域和有理数域.

按照这个术语, 如果线性方程组的系数都属于某个数域 $\mathbb{F}$, 并且这个方程组有唯一解时, 则解的分量也都属于数域 $\mathbb{F}$.

特别指出：本书中涉及数的运算均指在某个数域 $\mathbb{F}$ 中进行.

1.3 矩 阵

1.3.1 矩阵的概念

从 1.2 节对方程组进行初等变换的讨论中可以发现：在解线性方程组的过程中, 实际上只对每个方程中各项的系数和常数项进行了加、减、乘、除运算, 而变量 x_i 只是作为位置标志符并未参与运算. 我们为了突出解方程组中本质的东西, 只写出每个方程的各项系数和常数项, 按照它们原来的相对位置关系上下左右对齐. 这样得到一个矩形数表，我们可以用这个矩形数表来表示这个方程组.

如例 1.4 中的线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$$

的系数和常数项可表示为

$$\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 6 & 15 \end{array}$$

为了表示一个整体, 在矩形数表的两端加上方括号或圆括号 (其中虚线相当于方程组的等号, 用以隔开方程组的系数项和常数项), 把它记为

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 6 & 15 \end{array}\right]$$

容易知道, 方程组和这个矩形数表有着一一对应的关系.

现在给出矩阵的一般定义:

定义 1.4　由 $m \times n$ 个元素 a_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n)$ 排成 m 行 n 列形成的表格

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

称为 m 行 n 列**矩阵**, 也称 $m \times n$ 矩阵. 其横排称为行, 纵排称为列. 通常加圆括号或方括号括起来, 并用大写黑体字母表示它, 记作

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

简记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$, 在不需要特别指明行数列数时也可简记为 $\boldsymbol{A}$ 或 (a_{ij}). 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 a_{ij} 称为矩阵的元素, 其双重脚标表示此元素位于该矩阵的第 i 行第 j 列, 称 i 为 a_{ij} 的行标, j 为 a_{ij} 的列标, 为了需要有时也称 a_{ij} 为 (i, j) 元 $(i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$.

一般来说, 矩阵中的 a_{ij} 可以是任何元素, 但是我们往往把它数字化, 用数来表示. 以数为元素的矩阵也称为数字矩阵.

元素都属于数域 $\mathbb{F}$ 的矩阵称为 $\mathbb{F}$ 上的矩阵. 特别地, 元素都属于实数域的矩阵也称为**实矩阵**.

为方便起见, 我们用 $\boldsymbol{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的 $m\times n$ 矩阵的全体. 即

$$\boldsymbol{M}_{m\times n}(\mathbb{F})=\{\boldsymbol{A}\mid \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}, a_{ij}\in\mathbb{F}\}$$

当 $m=n$ 时, 我们简记为 $\boldsymbol{M}_n(\mathbb{F})$

如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**, 同型矩阵即行数相等、列数也相等的矩阵.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\boldsymbol{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, 并且它们对应的每一个元素都相等, 即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

那么就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$**相等**, 记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$$

称为行矩阵, 或 n 维行向量.

只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}$$

称为列矩阵, 或 m 维列向量.

当 $m=n$ 时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数相同, 称为 n 阶方阵, 简称方阵. 此时 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 可简记为 $\boldsymbol{A}_n$. n 阶方阵中从左上角到右下角的直线称为**主对角线**, $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 为它的主对角线元素.

通常, 将只有一个数 a 组成的一阶方阵 $[a]$ 与数 a 本身同等看待.

设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n(\mathbb{F})$, 如果 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线左下侧元素全为 0, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**上三角矩阵**.

如果主对角线右上侧的元素全为 0, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为**下三角矩阵**.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 既是上三角矩阵, 又是下三角矩阵, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对角矩阵**. 显然对角矩阵除主对角线外其余元素全为零, 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

上面的对角矩阵也可记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

如果 n 阶对角矩阵主对角线上元素全为 1, 则称其为 n 阶**单位矩阵**, 记为 $\boldsymbol{E}_n$ (简记为 $\boldsymbol{E}$), 即

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

所有元素都为零的矩阵称为零矩阵, 记为 $\boldsymbol{O}$. 不同型的零矩阵是不同的, 零矩阵的行数与列数由上下文确定, 或者指明行数列数, 记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

1.3.2 矩阵问题的例子

矩阵的例子无处不在, 可以从身边的例子说起.

例 1.6 某高中 2012 级 5 班 28 名新生的学号为 12501~12528, 其中 12 表示年级序号, 5 表示所在的班级序号, 后两位数字表示学生编号. 因教务管理的需要, 对其上课教室座位进行安排, 可以用矩阵这个工具, 学生坐在不同座位上用其编号