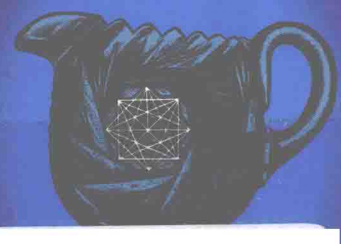
500 Higher Mathematics

500个德国工科大学生必做的高数习题

Exercises for German Engineering Students

◎ [德]罗德 著

◎《500个德国工科大学生必做的高数习题》编译组 编译



尝得春秋，披览不倦。凡大家之手迹，古典之珍品，
莫不采撷其华实，探涉其源流，钩篡枢要而编节之，改岁钥而成书。

香港凤凰卫视评论员梁文道先生说：我们常把经典和畅销书对立起来，
觉得后者虽能红极一时，终究是过眼云烟；而前者面世初时光华内敛，却能长明不息。
写书出书，当以铸经典为职志。

在罗马的贵族家庭会聘请启蒙师傅来带孩子们背诵、阅读和理解经典。
教师们的任务不是兜售自己的知识，而是忠实地教会孩子们读通经典。

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

500 Higher Mathematics Exercises for German Engineering Students

500个德国工科大学生必做的高数习题

◎ [德]罗德 著

◎ 《500个德国工科大学生必做的高数习题》编译组 编译

尝得春秋，披览不倦。凡大家之手迹，古典之珍品，
莫不采摭其华实，探涉其源流，钩纂枢要而编节之，改岁钥而成书。

香港凤凰卫视评论员梁文道先生说：我们常把经典和畅销书对立起来，
觉得后者虽能红极一时，终究是过眼云烟；而前者面世初时光华内敛，却能长明不息。
写书出书，当以铸经典为职志。

在罗马的贵族家庭会聘请启蒙师傅来带孩子们背诵、阅读和理解经典。
教师们的任务不是兜售自己的知识，而是忠实地教会孩子们读通经典。

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书收集了约500个德国工科大学生必做的高数习题，每道习题都给出了解答。这些优秀的题目几乎涵盖了大学高等数学所有重要的知识点。本书系统清晰，叙述严谨，可激发读者对高等数学的学习兴趣，提高数学水平。

本书适合大学学生，教师及高等数学爱好者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

500个德国工科大学生必做的高数习题/(德)罗德著;《500个德国工科大学生必做的高数习题》编译组编译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.6
ISBN 978-7-5603-5336-4

Ⅰ.①5… Ⅱ.①罗… ②5… Ⅲ.①高等数学—高等学校—习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第080601号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘春雷
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 10.25 总字数 165千字
版　　次 2015年6月第1版 2015年6月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5336-4
定　　价 28.00元

目　录

1

数、变量与函数

☞ 与函数有关的基础问题

这节内容包括：轨迹问题；函数的建立及函数值的计算；反函数；绝对值的计算；方程的图解；整有理函数；内插公式；分式有理函数、代数函数及超越函数图形的描绘；从 n 推到$n+1$ 法（即数学归纳法）.

❶ 试将活塞曲柄头到飞轮圆心的距离 $OK=s$ 表示为曲柄角ψ（图 1）的函数. 为此，引入长度比 $OC:CK=r:l=\lambda$. 当曲柄角取什么值时，柄头恰在静止点 A 与 B 的中间？曲柄角取什么值时，推杆 CK 与飞轮相切？

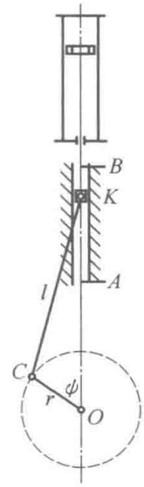


图 1

〔解〕 由正弦定理，在$\triangle OKC$ 中，若令$\angle OKC=\theta$，则有 $\sin\theta=\lambda\sin\psi$ 及 $\dfrac{s}{l}=\dfrac{\sin(\theta+\psi)}{\sin\psi}$. 对于 $\sin(\theta+\psi)$ 应用和角公式，就得到

$$s=l(\lambda\cos\psi+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi})$$

在静止点 A 与 B 处，线段 s 的长为 $l-r$ 与 $l+r$. 因此当柄头在 A 与 B 的中间时 $s=l$，这时

$$\lambda\cos\psi+\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}=1$$

所以 $\psi=\arccos\dfrac{1}{2}\lambda$.

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\psi$，即 $\psi=\operatorname{arccot}\lambda$ 时，推杆与飞轮相切.

❷ 有一个身高为 a 的人，在离路灯杆 b 处沿一直线以等速 c 在路灯下行走，设

路灯的高为 h，问他头的影子沿怎样的曲线移动(图 2)？

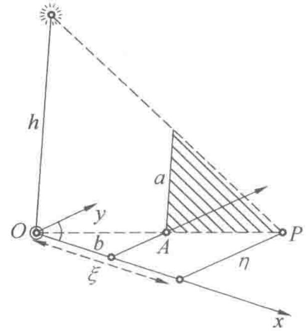


图 2

〔解〕 设这个人所走路线是过点 A 且垂直于 x 轴的直线，点 P 是头的影子，$t=0$ 为这人在 x 轴上的时刻. 于是

$$AP=\frac{a}{h-a}\cdot OA,\eta=\frac{hct}{h-a},\xi=\frac{b\eta}{ct} \text{ 即 } \xi=\frac{bh}{h-a}$$

所以头的影子沿一条平行于这个人行进方向的直线移动.

❸ (第 2 题的推广) 如果这个人沿曲线 $y=f(x)$ 行进，则头的影子所描画的曲线方程如何？

〔解〕 由图 2 得关系式

$$y=\frac{h-a}{h}\eta,x=\frac{h-a}{h}\xi$$

所以曲线方程是 $$\eta=\frac{h}{h-a}f\left(\frac{h-a}{h}\xi\right)$$

就是说，头的影子所描画的曲线是给定曲线适当改变比例尺后所得的结果. 这也可以用纯粹几何方法来说明.

❹ 在半径为 r，中心在原点处的圆上作一切线，与坐标轴交于点 A 与点 B 处. 然后通过点 A 与 B 作平行于坐标轴的直线交于点 P. 当切线的位置改变时，问点 P 的轨迹如何？作出草图！

〔解〕 设 ξ,η 是所求轨迹的流动坐标，x,y 是切点的坐标，切线在坐标轴上的截距，也就是点 P 的坐标，即 $\xi=\frac{r^2}{x}$ 及 $\eta=\frac{r^2}{y}$，于是轨迹的方程是

$$\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}=\frac{1}{r^2} \text{ 或 } \eta=\pm\frac{r\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}} \text{(图 3)}$$

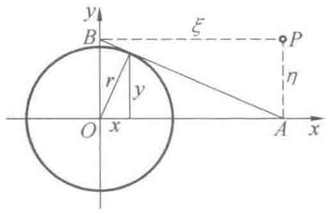


图 3

❺ 从一个孔口 A 沿水平方向以定速 c 喷出水流；水流的中线近似于参数为 $p=\dfrac{c^2}{g}$ 的抛物线. 一个水轮（半径为 R）装置：它的中心 M 在水流与轮缘相触点 B 的垂直下方. 设从孔口到轮线的垂直距离 m 是已知的，问水轮中心位于何处（图 4）？

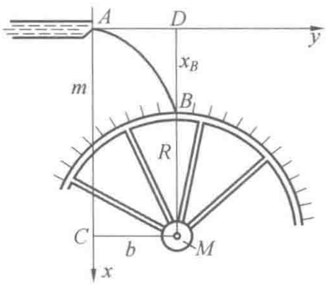


图 4

〔解〕 点 B 的坐标是 $x_B=\dfrac{b^2}{2p}$，$y_B=b$. 数值 b 可以由 $AC=DM$，即由 $m+\sqrt{R^2-b^2}=R+x_B$ 算得

$$b^2=2p(\sqrt{(p+R)^2-2pm}-(p+R-m))$$

点 M 的坐标是

$$x_M=m-p+\sqrt{(p+R)^2-2pm}\,,y_M=b$$

❻ 试将球的表面积 O 表示为它的体积 V 的函数. 作图！

〔解〕 $O^3=36\pi V^2$. 以 (O,V) 为坐标的点的曲线是一个半立方抛物线（作图略）.

❼ 在一个内轴径为 R 的轴承里，有 n 个大小相同的滚珠，相邻两个滚珠之间

的距离是 σ. 问滚珠的半径 ρ 是多少(图 5)?

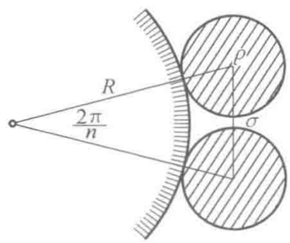


图 5

〔解〕 $\rho=\dfrac{R\sin\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{\sigma}{2}}{1-\sin\dfrac{\pi}{n}}$, $n>2$. 如果 $\sigma=0$,轴承的滚珠就相切.

❽ 在绝热情况下,当压力改变时,气体按定律 $p\cdot v^{1.414}=C$(p 表示压力,v 表示体积) 而膨胀. 试绘出当 $C=100$ 时相应的"复热"曲线.

〔解〕 为了计算出曲线上的点,取对数,并从 $\lg p=2-1.414\lg v$ 算出 p. 在双分对数纸上,这是一条直线.

❾ 设 $\alpha<\beta<\gamma<\delta$,则 x 取哪些值时,才有:

(1) $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\geqslant 0$;

(2) $\dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-\gamma)(x-\delta)}\geqslant 0$?

〔解〕 各括号里的式子的正负号列表(表 1) 如下

表 1

	$x<\alpha$	$x=\alpha$	$\alpha<x<\beta$	$x=\beta$	$\beta<x<\gamma$	$x=\gamma$	$\gamma<x<\delta$	$x=\delta$	$x>\delta$
$x-\alpha$	$-$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-\beta$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-\gamma$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$x-\delta$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$		$+$

这两个函数当 $x<\alpha$, $\beta<x<\gamma$, $x>\delta$ 时取正值. 前一个函数当 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$, $x=\delta$ 时等于零,可是第二个函数仅在 $x=\alpha$ 与 $x=\beta$ 处等于零. 它在 $x=\gamma$ 与 $x=\delta$ 处有极点. 图 6 中的阴影区域是函数曲线通过的部分.

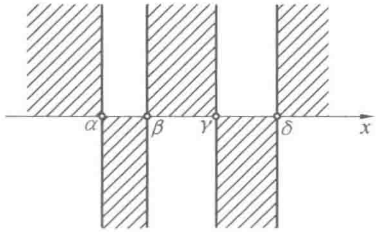


图 6

⑩ 适合 $|x|+|y|=1$ 的所有点(x,y) 构成什么几何图形?

〔解〕 在四个象限中,这个方程表示成直线

$$x+y=1,\ -x+y=1,\ -x-y=1 \text{ 与 } x-y=1$$

且有 $|x|\leqslant 1$, $|-y|\leqslant 1$,于是点(x,y) 的全体构成一个正方形的四条边,它的顶点在坐标轴上且与原点的距离为 1.

⑪ 试绘图:(1) $y^2=1-|x|$;(2) $|x\cdot y|=1$.

〔解〕 (1) 当 $x>0$ 时, $y^2=1-x$;当 $x<0$ 时, $y^2=1+x$. 这是两条抛物线弧,它们在$(0,\pm 1)$ 处相交,且对称于 x 轴.

(2) 因为方程也可以写成形式 $xy=\pm 1$,曲线是两条等轴双曲线,它们的渐近线是两坐标轴.

⑫ 试绘图: $y=|x-a|+\frac{1}{2}|x-b|$ $(a<b)$.

〔解〕 曲线是由三条直线段所组成的折线,角点在 $x=a$, $y=\frac{1}{2}(b-a)$ 与 $x=b$, $y=b-a$ 处. 三个部分的方程是:当 $x>b$ 时, $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}(2a+b)$;当 $a<x<b$ 时, $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(2a-b)$;而当 $x<a$ 时, $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}(2a+b)$. 它的构造可以从图形(图 7) 中看到.

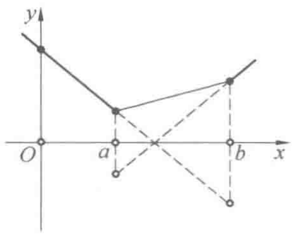


图 7

⓭ 试确定下列函数的反函数：

(1) $y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{\frac{1}{4}x^2-1}$；

(2) $y=\frac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$；

(3) $y=\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}}$；

(4) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$；

(5) $y=\sqrt[5]{\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2-p^5}}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}x-\sqrt{\frac{1}{4}x^2-p^5}}$.

〔解〕 (1) $y=x+\frac{1}{x}$；

(2) 与(3) 交换变量 x 与 y，再在这两题中先作$\frac{1-x}{1+x}$. 于是容易得到

$$y=-\frac{x}{(1+x)^2} \text{ 与 } y=\frac{3x+x^3}{1+3x^2}$$

(4) 交换变量后，令两个根式为 a 与 b. 应用二项式定理，得 $x^3=a^3+b^3+3abx$ 及 $y=\frac{1}{2}(3x+x^3)$.

(5) 相应地应用二项式定理，就得到 $x^5=y+5px(a^2+b^2-p)+10p^2x$，又因为 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$，得到 $y=x^5-5px^3+5p^2x$.

⓮ 试求抛物线 $y=x^2-4$ 与其反函数图形的交点. 绘图！

〔解〕 $x_1=y_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{17})$，$x_2=y_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{17})$，$x_3=y_4=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})$，

$x_4 = y_3 = -\frac{1}{2}(1-\sqrt{13})$（绘图略）.

⑮ 试用图解法解方程 $4x^3-7x+3=0$.

〔解〕 求出曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=\frac{7x}{4}-\frac{3}{4}$ 的交点的横坐标. 得：$x_1=1, x_2=\frac{1}{2}$，$x_3=-\frac{3}{2}$.

⑯ 试用图解法求 $x^4-x-1=0$ 的实数解.

〔解〕 求出曲线 $y=x^4$ 与直线 $y=x+1$ 的交点的横坐标. 得 $x_1=-0.724$，$x_2=1.221$.

⑰ 试用图解法解方程 $10^x=x^{10}$.

〔解〕 如果 $x>0$，取对数得 $x=10\lg x$；如果 $x<0$，就先令 $x=-|x|$. 求直线 $y=\pm\frac{x}{10}$ 与曲线 $y=\lg x$ 的交点，得到方程的三个解：$x_1=10, x_2=1.373, x_3=-0.827$（图 8）.

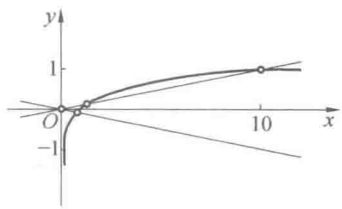


图 8

⑱ (1) 试用两条平行弦把半径为 r 的半圆分成三个面积相等的部分（图 9）.

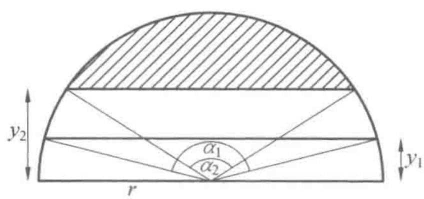


图 9

〔解〕 按图 9 中的记号，扇形(α_1) − 三角形$(\alpha_1)=\frac{2}{3}$半圆，即有 $\alpha_1-\sin\alpha_1=$

$\dfrac{2\pi}{3}$,相应地有 $\alpha_2-\sin\alpha_2=\dfrac{\pi}{3}$. 取曲线 $y=\sin x$ 与 $y=x-\dfrac{2\pi}{3}$ 及 $y=x-\dfrac{\pi}{3}$ 的交点,就得到 $\alpha_1=2.60$(弧度)$=149°$,$\alpha_2=1.97$(弧度)$=112.9°$. 于是这两个弦离中心的距离是 $y_1=0.267\ 2r$ 与 $y_2=0.552\ 6r$.

⓲ (2) 如果把半圆分成 n 条,那么就要解 $n-1$ 个方程

$$\alpha_\lambda-\sin\alpha_\lambda=\pi\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\quad(\lambda=1,\cdots,n-1)$$

$y_\lambda=r\cos\dfrac{1}{2}\alpha_\lambda$ 就是第 λ 条弦离中心的距离.

⓳ 试作一标尺,使我们从其分点上的数字可以读出该分点将给定的线段 AB 分成什么比例.

〔解〕 设线段 AB 的长等于 s. 如果分线段 AB 成比例 λ,那么靠近点 B 的部分线段的长等于 $\dfrac{s}{1+\lambda}$. 如果 $\lambda>0$,分点就在 A 与 B 之间,如果 $\lambda<0$,分点就在线段 AB 之外(图 10).

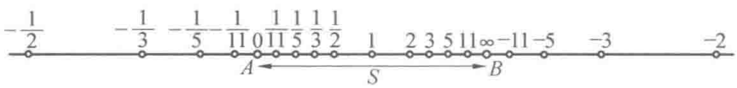


图 10

⓴ 试作函数 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ 的标尺.

〔解〕 如图 11. 值 $x=1$ 在标尺上是找不到的.

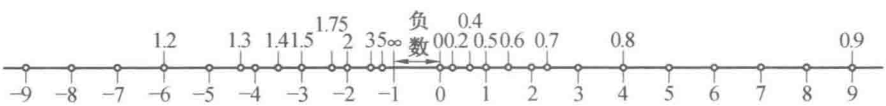


图 11

㉑ 试把具有零点 $x=2$ 与 $x=-1$ 的函数 $y=2x^4-2x^3-3x^2-x-2$ 分解为一次及二次实因式.

〔解〕 $y=(x-2)(x+1)(2x^2+1)$.

㉒ 试解方程$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}=2$.

〔解〕 把方程化成$\frac{4}{x^2-4}=0$,它不为 x 的任何值所满足.

附言 方程$\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}+\frac{cx+d}{\gamma x+\delta}-k=0$ 在两个等式

$$a\gamma+c\alpha=k\alpha\gamma \text{ 与 } a\delta+b\gamma+c\beta+d\alpha=k(\alpha\delta+\beta\gamma)$$

同时成立且适合不等式 $b\delta+d\beta-k\beta\delta\neq 0$ 时无解,因为这时方程左端是一个没有零点的分式有理函数.

㉓ 试解方程 $x+7+5\sqrt{x+1}=0$.

〔解〕 用通常解方程的办法把它变成一个二次方程,它的根是 $x_1=8$, $x_2=3$. 然而,这两个值没有一个是给定方程的解,故给定方程没有解.

附言 第 22 题与第 23 题的方程都不是代数方程;因为一个代数方程是由另一个 x 的整有理函数等于零而形成的. 于是代数的基本定理也就不能应用到像上述的两个方程. 此外在这两个方程左端的函数都是代数函数.

㉔ 高压输电线的形状近似于一个抛物线 $y=\alpha+\beta x+\gamma x^2$. 试按图 12 中的数据求它的方程.

〔解〕 $y=\frac{hx(x-a)}{l(l-a)}$. 按拉格朗日内插公式立刻可以写得这个结果.

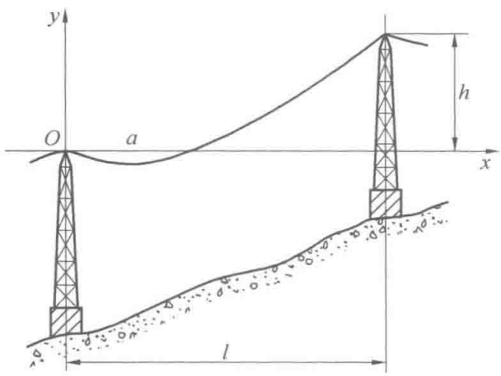


图 12

㉕ 试确定一抛物线状桁架的铅垂杆件及对角线杆件的长度,已知它的跨度为

l 及矢高为 p(图 13).

〔解〕 抛物线的方程是 $y=p-\frac{4px^2}{l^2}$

$$p_1=\frac{3}{4}p, d=\frac{1}{4}\sqrt{16p^2+l^2}, d_1=\frac{1}{4}\sqrt{9p^2+l^2}=d_2$$

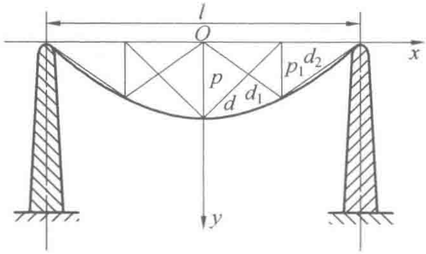


图 13

㉖ 在保罗式桁架(伊萨桥,在德国 Grosshesselohe 附近)上,铅垂杆件的长度由下面的公式来计算

$$h=\frac{4f}{l^2}x(l-x)\left[1+\frac{2f^2}{l^2}\left(1-\frac{2x}{l}\right)^2\right]$$

其中 l 是桥的跨度而 f 是矢高.问图 14 中的桥的杆件长是多少?

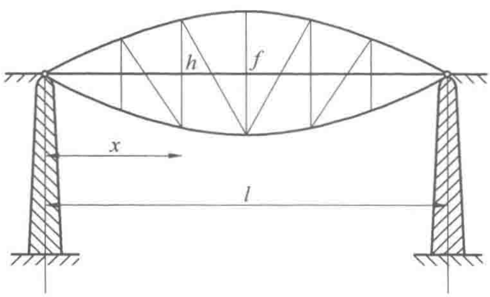


图 14

〔解〕 $x=0, h=0; x=\frac{l}{6}, h=\frac{5f}{9}\left(1+\frac{8f^2}{9l^2}\right); x=\frac{l}{3}, h=\frac{8f}{9}\left(1+\frac{2f^2}{9l^2}\right); x=\frac{l}{2}$, $h=f$.

㉗ 问怎样的三次抛物线通过四点$(-2,3)$,$(-1,2)$,$(0,-1)$,$(1,1)$?

〔解〕 由拉格朗日内插公式得

$$y=3\,\frac{(x+1)(x+0)(x-1)}{(-2+1)(-2+0)(-2-1)}+$$

$$2\,\frac{(x+2)(x-0)(x-1)}{(-1+2)(-1-0)(-1-1)}+\cdots=$$

$$\frac{7}{6}x^3+\frac{5}{2}x^2-\frac{5}{3}x-1$$

㉘ 在 xy 平面上有两个半径都等于 r 的圆，它们的中心在同一条垂线上. 这两个圆叠加起来是什么曲线？

〔解〕 $y=b_1\pm\sqrt{r^2-x^2}+b_2\pm\sqrt{r^2-x^2}$. 如果取同号，就得椭圆

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{(y-b_1-b_2)^2}{(2r)^2}=1$$

如果取异号，就得直线 $y=b_1+b_2$.

㉙ 试确定一最低次数的整函数，它当 $x=\pm1$, $x=\pm2$ 时等于零，而当 $x=0$ 时，函数取得值 1.

〔解〕 $y=\frac{1}{4}(x^2-1)(x^2-4)$.

㉚ 试借助拉格朗日内插公式作一个通过点 $(-1,2)$, $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,0)$ 的三次抛物线.

〔解〕 $y=\frac{1}{6}(x-2)(x^2-4x-9)$.

㉛ 试确定一个至多是 8 次的整函数，它在 $x=0$, $\pm\omega$, $\pm2\omega$ 处等于零；在 $x=\frac{1}{2}\omega$, $-\frac{3}{2}\omega$ 处取得值 $+1$，在 $x=-\frac{1}{2}\omega$, $+\frac{3}{2}\omega$ 处取得值 -1.

〔解〕 利用拉格朗日内插公式，得到

$$g(x)=1\cdot\frac{x(x-\omega)(x+\omega)(x-2\omega)(x+2\omega)(x+\frac{3}{2}\omega)(x+\frac{1}{2}\omega)(x-\frac{3}{2}\omega)}{\left(\frac{1}{2}\omega\right)\left(-\frac{1}{2}\omega\right)\left(\frac{3}{2}\omega\right)\left(-\frac{3}{2}\omega\right)\left(\frac{5}{2}\omega\right)(2\omega)\omega(-\omega)}+$$

$$1\cdot\frac{x(x-\omega)(x+\omega)(x-2\omega)(x+2\omega)(x-\frac{1}{2}\omega)(x+\frac{1}{2}\omega)(x-\frac{3}{2}\omega)}{\left(-\frac{3}{2}\omega\right)\left(-\frac{5}{2}\omega\right)\left(-\frac{1}{2}\omega\right)\left(-\frac{7}{2}\omega\right)\left(\frac{1}{2}\omega\right)(-\omega)(-2\omega)(-3\omega)}-$$

$$1\cdot\frac{x(x-\omega)(x+\omega)(x-2\omega)(x+2\omega)\left(x-\frac{1}{2}\omega\right)\left(x+\frac{3}{2}\omega\right)\left(x-\frac{3}{2}\omega\right)}{\left(-\frac{1}{2}\omega\right)\left(-\frac{3}{2}\omega\right)\left(\frac{1}{2}\omega\right)\left(-\frac{5}{2}\omega\right)\left(\frac{3}{2}\omega\right)(-\omega)\omega(-2\omega)}-$$

$$1\cdot\frac{x(x-\omega)(x+\omega)(x-2\omega)(x+2\omega)\left(x-\frac{1}{2}\omega\right)\left(x+\frac{3}{2}\omega\right)\left(x+\frac{1}{2}\omega\right)}{\left(\frac{3}{2}\omega\right)\left(\frac{1}{2}\omega\right)\left(\frac{5}{2}\omega\right)\left(-\frac{1}{2}\omega\right)\left(\frac{7}{2}\omega\right)\omega(3\omega)(2\omega)}$$

经过一些变形,由上式可得

$$g(x)=\frac{16x(x^2-\omega^2)(x^2-4\omega^2)}{15\omega^7}\left[\frac{x^2-\frac{1}{4}\omega^2}{7}-\frac{x^2-\frac{9}{4}\omega^2}{3}\right]=$$

$$\frac{64}{21}\frac{x}{\omega}\left(1-\frac{x^2}{\omega^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\omega^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{15\omega^2}\right)$$

$g(x)$ 只有 7 次,且还有另外两个零点:$x=\pm\frac{1}{2}\omega\sqrt{15}$.如果令 $\omega=\pi$,那么函数当 $x=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\pm\frac{1}{2}\pi\sqrt{15}$ 时等于零.当 $x=\frac{\pi}{2},-\frac{3\pi}{2}$ 时,它的值为 $+1$,当 $x=-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ 时,它的值为 -1(图 15).所以在 $x=0$ 的附近,$g(x)$ 近似于函数 $y=\sin x$.

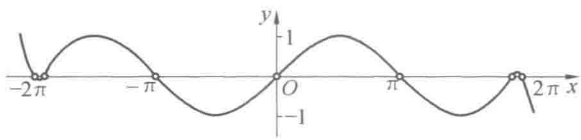


图 15

㉜ 试确定一个最多是三次的整函数 $g(x)$,当 $x=0,1,3,5$ 时,它取得值 $y=0$,0.208,0.84,1.92.问 $g(2)$ 与 $g(4)$ 是多少?何处是函数的其他零点?

〔解〕 $y=0.004x^3+0.020x^2+0.184x$,$g(2)=0.48$,$g(4)=1.312$.不存在其他(实)的零点.

㉝ 扇形中心角 $x(0\leqslant x<2\pi)$ 是多少时,弦才二等分所属扇形的面积?

〔解〕 所考虑的方程是 $\frac{1}{2}x=\sin x$,它的解是 $x=1.895$(弧度)$=108°36'$.

㉞ 试确定函数

$$y=\frac{(x-a)(x-b)}{x-c} \quad (a<b<c)$$

的零点、极点及正负号，以及函数图形的渐近线.

〔解〕 零点 $x=a, x=b$；极点 $x=c$，渐近线 $y=x+c-a-b$(表 2).

表 2

x	$x<a$	a	$a<x<b$	b	$b<x<0$	$x>c$
y	$y<0$	0	$y>0$	0	$y<0$	$y>0$

㉟ 试绘曲线 $y^2=(x-a)^2(x-b)^2(x-c)$ 的草图①，其中 $a<c<b$.

〔解〕 只有当 $x=a$ 及 $x \geqslant c$ 时函数才存在(有实的函数值). $x=a$ 是一个孤立点. $x=c$ 与 $x=b$ 是零点. $x=b, y=0$ 是一个二重点(图 16).

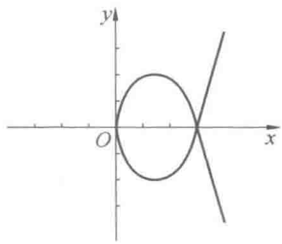


图 16

㊱ 设曲线图形是缺去与坐标轴的交点的单位圆，求它的方程.

〔解〕 当 $x=0, y=\pm 1$ 及 $x=\pm 1, y=0$ 时函数有空隙. 所以方程 $y=\dfrac{x(1-x^2)^{3/2}}{x-x^3}$ 满足本题的条件.

㊲ 试讨论曲线

$$y=f(x)=\frac{1}{2}\eta\left[\frac{x-a}{\xi-a}\left(1-\frac{x-\xi}{|x-\xi|}\right)+\frac{x-b}{\xi-b}\left(1+\frac{x-\xi}{|x-\xi|}\right)\right]$$

如果 $a \leqslant x \leqslant b$ 且 $a<\xi<b$.

〔解〕 (1) $x<\xi, y=\dfrac{\eta}{\xi-a}(x-a)$；

---

① 原题是 $y=(x-a)(x-b)\sqrt{x-c}$. 改了之后，使题目、解答以及草图相一致 —— 译者.