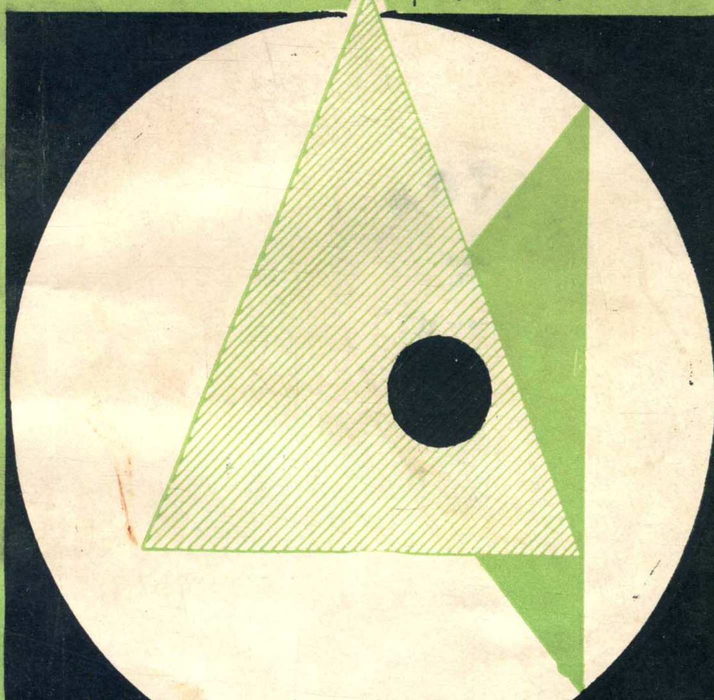
标准化训练与能力培养

高中解析几何

编写组顾问　崔孟明

俞绍康　姚　楷　李坚毅　逯新丽　编

中国环境科学出版社



标准化训练与能力培养

高中解析几何

编写组顾问　崔孟明

俞绍康　姚　楷　李坚毅　逯新丽　编

中国环境科学出版社

1989

内 容 简 介

本书系作者在教与学方面的经验总结。全书共分四章，介绍了直线，圆锥曲线（曲线和方程、圆、二次曲线），坐标变换，参数方程、极坐标等知识，每章都有知识分析与能力要求、解题方法指导、标准化训练题、自学阅读参考等内容。

本书适合高中学生、教师以及广大自学青年阅读。

标准化训练与能力培养

高中解析几何

编写组顾问　崔孟明

俞绍康　姚　楷　李坚毅　逯新丽　编

*

中国环境科学出版社出版

北京崇文区东兴隆街69号

北京印刷一厂印刷

新华书店总店科技发行所发行　　各地新华书店经售

*

1989年12月 第 一 版　　开本　787×1092　1/32

1989年12月 第一次印刷　　印张　7 7/8

印数　1—31 000　　字数　183千字

ISBN 7-80010-575-X/G·196

定价：2.80元

前　言

《标准化训练与教学》和《能力培养与标准化命题》两套教法与学法丛书问世以来，受到了广大读者的欢迎。为了减轻读者的负担，提高学习效率，现将两套丛书合并精简，定名为《标准化训练与能力培养》。

《标准化训练与能力培养》集中了前两套丛书的优点，弥补了它们各自的不足，以更丰富的内容和更高的质量奉献给读者。

《标准化训练与能力培养》突出了知识结构（包括知识的纵的和横的关系等诸方面），并根据知识的规律划分出单元，作出“重点知识分析”，提高“能力要求”。这就从联系和对比等角度指点了基本概念、基本理论、基本计算、基本事实以及它们的一些基本关系，就把住了各段知识的“双基”训练，并指导了学生的学习方法。

这套丛书是依据中、外学者的研究成果，如美国心理学家布鲁姆的认知理论，苏联教育家巴班斯基的最佳教学过程理论，并结合我国教学中的具体情况，把能力要求分为记忆理解、应用、分析综合等能力层次，做到掌握学习，提高能力。

为了把知识结构与训练相结合，本书备有“解题方法指导”，着重指导“解题思路”。这就突出了思维的基本训练，奠定了提高能力的基础，使学生排除“就题论题”，注意培养“双基”运用的基本思路及程序，从而摆脱“题海”的束缚。

这套书根据教学目标管理的原理和“双基”要求，编有

“标准化训练题”,朝着“科学化”、“标准化”的方向改革，其目的是为教师进行教学改革提供必要的参考。这套书指的标准化则是更广义的，它的主要内容是：

1．训练的内容与所学“双基”诸内容具有对应性，可检查基本知识，又检查学生分析问题和解决问题的能力；

2．训练的覆盖面大,涉及到教学的所有主要部分，而且往往带有各部分知识的交叉、综合和对比；

3．训练的难度适当；

4．训练题目的表达语和指导语要标准规范,尽量明确无误；

5．训练的方式、题型较多,包括最佳答案选择题、因果选择题、多解选择题、配伍选择题、组合选择题、比较选择题、填空选择题、是非判断题、程序性选择题以及规范性的填空简答题、计算题、改错题等。有正面、侧面、反面不同角度的训练等等。

相信这种“标准化题”有利于把住基本的教学要求，减轻学生负担，并方便师生教学上的反馈、控制、自我测试，达到提高教学质量的目的。

这套丛书中所列举的“自学阅读参考”,课内外知识结合，扩大了视野，引发了兴趣，为第二课堂提供了教材，为教师研究调动非智力因素提供参考。

这套书由北京景山学校校长、特级教师崔孟明为编写组顾问，编著者大多是第一线有经验的教师，部分是教学研究人员。他们在教学改革中，特别是在落实“双基”和学生训练上有较丰富的实践，有些教师在“知识结构单元”的教法上卓有成效。有些教师在落实“双基”、“培养能力”的训练程序上取得成绩。这套书中有许多标准化训练题就是从他们的训练实践中经过测试和科学比较筛选出来的。他们从实践

中认识到片面追求升学率不但违背教学规律，而且建立在“猜题压题”的不可靠的基础上，平时抓住“双基”，搞“结构化”，抓住“标准训练”则负担轻、质量高，不但可以符合国家的要求，而且能面向大多数学生，减轻学生过重的负担。实践证明，平时能这样教学，遵循教育科学规律，就能提高教学质量。当然，由于这套书的整理比较仓促，虽几经审阅修改，也难免出现不足和错误。我们诚恳地希望广大师生和社会青年读者多提宝贵意见，并跟我们一起进行教与学的改革，提高教学质量。

中国环境科学出版社是为环境科学宣传教育和学术研究服务的。我们意识到要提高全民族的环境意识，必须提高人民的文化素质，要提高文化素质又必须发展基础教育，因此我们按照邓小平同志的有关指示精神竭诚地为基础教育改革服务。我们特请有经验的基础教育专家学者和教师当我们的顾问，与我们合作，编写适合中小学教师和学生阅读的有关教法、学法改革的系列读物，这套《标准化训练与能力培养》列入“环境基础文化教育丛书”，还将继续出版供中小学师生阅读的“环境科学教育丛书”及青少年环境科学普及读物，欢迎基础教育界广大中小学师生给予指导和合作。

目　录

第一章　直　　线

[知识分析与能力要求]

本章首先引入有向直线及有向线段等概念，然后通过平面直角坐标系建立点与数、曲线与方程的联系．熟悉这些内容并掌握坐标方法，对于学习解析几何这门课程是十分重要的．

直线是平面曲线中最简单、最基本的一种图形，本章着重讨论如何在各种已知条件下，利用坐标建立直线方程．先引出平面上直线的最基本的两个定理："平面内任何一条直线的方程，都是关于 x 和 y 的一次方程"；"任何一个关于 x 和 y 的一次方程，它的图象都是一条直线"，然后从直线的方程讨论点与直线、直线与直线之间的位置关系以及直线系的性质．

直线与二元一次方程的概述见下面的表：

本章重点知识分析

1．平面直角坐标系中点的坐标是解析几何中最基本的内容，也是研究解析几何最基本的概念．由于坐标系的建立，使平面上的点和一对有序实数之间建立了一一对应的关系．这是形与数相互联系、相互转化的基础和出发点．把形与数结合起来，使我们可以用代数的方法来研究几何图形的性质，即用数值关系说明几何关系，也可以用几何关系考查数值关系．

	名称	表达式	说明
直线的方程	点斜式	当$k\neq \mathrm{tg}\frac{\pi}{2}$时， $y-y_0=k(x-x_0)$ 当$k=\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}$时，$x=x_0$	(x_0,y_0)为已知点，k为斜率，(x,y)为动点
	一般式	$Ax+By+C=0$ （A，B不同时为零）	平面上的任何一条直线都可以用二元一次方程表示，反之亦然
	斜截式	$y=kx+b$	k为斜率，b为直线在y轴上的截距，(x,y)为动点
	两点式	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	(x_1y_1) (x_2y_2)为已知点 (x,y)为动点
	截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	a为横截距，b为纵截距，经过原点或与两轴平行的直线不能用此表示．
	法线式	$x\cos\theta+y\sin\theta=P$ 或 $\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$	P为原点到直线的距离， θ为法线的辐角， $\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$为法线式因子，（应注意其符号法则）
点与直线的关系	点在直线上	$Ax_0+By_0+C=0$	(x_0,y_0)为已知点 $Ax+By+C=0$为已知直线
	点在直线上方	$Ax_0+By_0+C>0$	在$Ax+By+C=0$中
	点在直线下方	$Ax_0+By_0+C<0$	$B>0$
	点到直线的距离	$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $d=\lvert x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-P\rvert$	

两直线间的关系	平行(充要条件)	$k_1=k_2$或$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$	已知直线为 $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ 或 $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$
	垂直（充要条件）	$k_1\cdot k_2=-1$或 $A_1A_2+B_1B_2=0$	
	相　交	若$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$则 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 的解（x_0, y_0）为交点	
	交　角	$\operatorname{tg}\theta=\left\|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right\|$ 或$\operatorname{tg}\theta=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$	θ为两直线的夹角，指两直线交角中的锐角（注意角形成的方向）
	两平行线间的距离	$d=\frac{\|C_1-C_2\|}{\sqrt{A^2+B^2}}$	两平行直线为 $Ax+By+C_1=0$ $Ax+By+C_2=0$
	两条直线夹角平分线的方程	$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$	直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2=0$
其他	三点共线	$\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$ 即$\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}=0$	$(x_1y_1)(x_2y_2)(x_3y_3)$ 为三已知点
	三直线共点	$\begin{vmatrix}A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\\A_3&B_3&C_3\end{vmatrix}=0$	$\left.\begin{array}{l}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\\A_3x+B_3y+C_3=0\end{array}\right\}$ 为三条已知直线
	直线系方程	$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$	$\left.\begin{array}{l}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{array}\right\}$ 为两条已知直线 此方程为这两条已知直线交点的直线方程.

2．有向线段的概念是本章的一个难点

由有向线段的数量和有向线段的长度公式推导出两点间的距离公式和定比分点坐标公式（中点坐标公式）、这些知识是研究直线方程及曲线与方程的基础和工具．

3．线段的定比分点坐标公式及其特例中点坐标公式都很重要，是本章的重点也是难点，在学习过程中，要弄清以下几个问题：

（1）什么叫P点分有向线段$\overline{P_1P_2}$的比？要认清$\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$是有向线段$\overline{P_1P}$与$\overline{PP_2}$的数量的比，而不是有向线段长度的比．

（2）在$\lambda=\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$中，分子$\overline{P_1P}$是起点到分点的有向线段的数量，分母$\overline{PP_2}$是分点到终点的有向线段的数量，这个比的顺序不可颠倒．

（3）分点P的位置，决定了比值λ的正负．若P点在P_1P_2两端点之间，则λ取正值，此时可称P点为内分点．若P点在P_1P_2的延长线（或反向延长线）上，则λ取负值（除去$\lambda=-1$），此时称P点为外分点．

4．直线与x，y的一次方程也是一一对应的关系，即“平面内任意一条直线的方程都是x，y的一次方程”，“任何一个关于x，y的一次方程都表示一条直线”．

5．直线的倾角和斜率，反映了一条直线对于x轴正方向的倾斜程度．

在解析几何中，斜率可以用有向线段数量的比或点的坐标表示出来．在研究直线时，使用斜率比使用倾角方便得多，

因此，斜率是研究两条直线位置关系的重要依据．正确地理解斜率的概念，熟练地掌握斜率公式，是学好直线这一章的关键．

对于倾角，要注意三个要点：

(1) 直线向上的方向；

(2) x轴的正方向；

(3) 最小的正角，

这三者缺一不可，因此倾角的范围是 $0° \leqslant \alpha < 180°$

直线的倾角的正切就是斜率 k，可记为 $k = \operatorname{tg}\alpha$．

注意，任何一条直线都有倾角，但不是每一条直线都有斜率，当 $\alpha = 0°$ 或 $\alpha = 90°$ 时，直线的特殊位置及直线方程的特殊形式，也应充分注意．

6．直线方程的几种形式，是本章的重点．由经过两点的直线的斜率公式可推出直线方程的点斜式．

在直线方程的点斜式、斜截式、两点式、截距式中，又以点斜式为重点，因为斜截式可作为点斜式的特例，两点式可由点斜式推导出，截距式又为两点式的特例．

以上直线方程的各种形式都是坐标为 x、y 的二元一次方程；任何一个关于 x，y 的二元一次方程的图象都是一条直线．也就是说二元一次方程的集合与平面上直线的集合之间有一个一一对应的关系．

注意当倾角 $\alpha = 90°$，即直线的斜率不存在时，不能应用点斜式、斜截式、两点式求直线的方程．

按照要求，不论通过什么形式去求直线的方程，其结果都应化为直线方程的一般式．

7．两直线的位置关系

(1) 两条直线的平行和垂直

两条直线的平行和垂直的条件十分重要，应掌握条件的

推导过程，这样会加深对结论的记忆.

若两直线平行，则它们的斜率相等或同时不存在；若两直线的斜率相等或同时不存在，则它们平行.

若两直线垂直，则它们的斜率互为负倒数或一个为零另一个不存在；若两直线的斜率互为负倒数或一个为零另一个不存在，则这两条直线互相垂直.

(2) 两条直线所成的角

用解析几何的方法研究角的问题，比较困难，由于两条直线相交构成的四个角中，锐角较为简单，所以课本规定两条直线（不互相垂直时）的夹角为锐角，以降低难度.

另外，由一条直线到另一条直线的角（带方向的角）也是求夹角公式的基础内容，要注意由l_1到l_2的角与由l_2到l_1的角是不同的.

设直线l_1和l_2的斜率分别为k_1和k_2，则l_1与l_2的夹角公式为$\operatorname{tg}\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$，可以由它求出锐角$\theta$.

(3) 两条直线的交点.

由于交点应同时在两条直线上，故其坐标一定同时满足两条直线的方程（即是它们的公共解）.这就把几何中求两条直线交点的问题化为代数中解二元一次方程组的问题.

若二元一次方程组有唯一解，则两直线相交；若二元一次方程组无解，则两直线平行；若二元一次方程组有无数组解，则两直线重合. 上述三条反过来也成立.

若l_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$

化为 $y=k_1x+b_1$

l_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$

化为 $y=k_2x+b_2$

当$k_1\neq k_2$时，l_1与l_2相交，方程组有唯一解.

当$k_1=k_2$且$b_1\neq b_2$时，l_1与l_2平行，方程组无解.

当 $k_1=k_2$ 且$b_1=b_2$时，l_1与l_2重合，方程组有无数组解.

8. 点到直线的距离公式

这个公式很重要，应用它可求两平行线间的距离、三角形的面积等.

课本对于点$P(x_0,y_0)$到直线$Ax+By+C=0$（$A\neq 0$，$B\neq 0$）的距离给出了证明，应掌握推导过程，并会灵活运用.

这个公式在$A=0$或$B=0$时，也是成立的. 但这时不需要利用公式就可直接求出距离. 例如点P（2，3）到直线$y=5$的距离$d=5-3=2$，点P（2,3)到直线$x=-2$的距离为$d=2-(-2)=4$.

本章能力要求

1. 理解有向线段，有向线段的数量、有向线段的长度的概念；

理解定比分点的概念.

2. 熟练掌握并会灵活运用以下公式：

两点间的距离公式；线段的定比分点坐标公式，线段的中点坐标公式.

3. 理解直线的斜率、倾角等概念.

4. 会由直线的倾角求出斜率；会由直线的斜率求倾角. 会由直线上的两点求出直线的斜率.

5. 会根据不同的已知条件，求出直线的方程，并掌握它们之间的互化关系.

6. 会利用两条直线不同的位置关系（平行、垂直、重合）及夹角公式，点到直线的距离公式等，解或证明直线部分的综合题.

7. 会利用直线系的有关知识，解有关过两直线交点的问题. 证明直线过定点的问题.

8. 会求简单的有关直线的最值问题.

〔解题方法指导〕

1. 关于直线的斜率

直线的斜率 k 是一个非常重要的概念，应用面极为广泛，灵活地运用这一概念，在求直线的方程，决定直线与直线的相互位置关系，确定若干个点共线，求轨迹方程等问题中都有重要的作用.

例1 方程 $x^3-y^3+3x^2y-3xy^2=0$ 表示三条直线，并且每相邻两条直线的夹角都相等，试证之.

解：原方程变形为

$$(x-y)[x-(-2+\sqrt{3})y][x-(-2-\sqrt{3})y]=0$$

这三个方程表示三条直线：

l_1：$x-y=0$，斜率 $k_1=1$；

l_2：$x-(-2+\sqrt{3})y=0$，

斜率 $k_2=-2-\sqrt{3}$；

l_3：$x-(-2-\sqrt{3})y=0$，

斜率 $k_3=-2+\sqrt{3}$.

l_1 与 l_2 夹角为 θ_1，

$$tg\theta_1=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|=\sqrt{3}；$$

l_2 与 l_3 夹角为 θ_2，

$$tg\theta_2=\left|\frac{k_3-k_2}{1+k_3\cdot k_2}\right|=\sqrt{3}.$$

l_3 与 l_1 夹角为 θ_3，

$$tg\theta_3 = \left| \frac{k_1 - k_3}{1 + k_1 \cdot k_3} \right| = \sqrt{3}$$

$\therefore \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3$

例2 求斜率为-3且夹于两坐标轴的线段长为5的直线的方程.

解：设直线方程为$y = -3x + b$，α为所求直线的倾角，则$\sin\alpha = \frac{|b|}{5}$.

$\because \quad k = tg\alpha = -3$

$\therefore \quad \sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \quad \frac{|b|}{5} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \quad b = \pm\frac{3}{2}\sqrt{10}$

$\therefore$ 所求直线方程为$y = -3x \pm \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

即 $6x + 2y \pm 3\sqrt{10} = 0$.

例3 求过$P(-5,3)$点的直线方程，使它与直线$x + 2y - 3 = 0$的夹角为$\mathrm{arc\ ctg}\frac{1}{2}$.

解：设所求直线的斜率为k，则有

$$\left| \frac{k - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + k\left(-\frac{1}{2}\right)} \right| = tg(\mathrm{arc\ ctg}\frac{1}{2})$$

$$= tg(\mathrm{arc\ tg}2) = 2$$