普通高等教育“十二五”规划教材
普通高等学校数学教学丛书

高等数学

（下册）

张志海 范 杰 贾瑞娟 袁洪芬 主 编
刘晓辉 张 鸿 刘立民 杨 珠 副主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
普通高等学校数学教学丛书

高等数学

(下册)

张志海　范　杰　贾瑞娟　袁洪芬　主　编
刘晓辉　张　鸿　刘立民　杨　珠　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本教材分上、下两册, 上册内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、空间解析几何、多元函数微分法及其应用. 下册内容包括不定积分、定积分、定积分的应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程初步. 书中每节都配有习题,每章配有总习题和历年考研题. 本教材配套的辅助教材有《高等数学典型问题与应用案例剖析(上、下册)》.

本教材是作者多年教学经验的总结, 可作为非数学专业学生高等数学的教材, 也可作为相关人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/张志海等主编. —北京: 科学出版社, 2015. 8
(普通高等教育"十二五"规划教材 · 普通高等学校数学教学丛书)
ISBN 978-7-03-044829-3

I. ①高… II. ①张… III. ① 高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 124439 号

责任编辑: 王胡权 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 霍 兵 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2015 年 8 月第一次印刷 印张: 21
字数: 423 000

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

随着我国高等教育的发展, 高等院校本科的招生量逐年扩大, 接受高等教育的人数越来越多. 高等数学作为高校理工科学生的一门重要基础课, 也作为硕士研究生入学考试的一门重要课程, 越来越受到学生的重视. 如何在大学期间学好高等数学, 为后续课程, 尤其是专业课程的学习奠定好的基础, 并在较好的数学素质下, 利用数学思维的方式、方法解决相关问题, 是大学生最为关心的问题之一. 而这一切都要求大学生了解高等数学的主要内容, 掌握运用数学分析问题、解决问题的方法, 分清主次, 力求在内容的深度和知识的广度上达到一定的程度.

然而, 在当前高等教育已基本实现由“精英教育”向“大众化教育”转变的今天, 大学的办学理念及在办学理念指导下对教师教学、学生学习的要求都发生了变化, 由此引发大学的教学方式、方法和教材等诸方面的改革.

本教材按照新形势下大学教育的教学改革和教材改革精神, 根据现行的《高等工科院校数学课程教学基本要求》, 集教师多年教学和考研辅导班积累的经验、资料编写而成. 编写过程中力求做到:

(1) 基本概念引出实例化. 即通过具体的几何、物理等实际问题的解决, 分析解决过程中研究对象、使用的方法所呈现出的共性, 进而总结、抽象、概括和归纳出所要给出的定义.

(2) 定理导出几何化. 即通过几何观察, 引导学生去发现一般性质中所具有的特殊性态, 根据一般性质所满足的共有条件, 去找特殊性态所具有的结论, 并从中了解条件满足下, 有此结论的证明思路和方法.

(3) 练习题选择层次化. 即本着由易到难、由简到繁、由直接到综合灵活的原则将练习题划分成每节的基本练习、每章的总习题和每章的历年考研真题汇编.

(4) 实际问题求解模型化. 在保证基本教学任务完成前提下, 各章选择部分实际问题, 由问题提出到建立描述该问题的数学模型, 直至完成模型求解的全过程案例供教师在习题课教学中有针对性地讲解.

同时, 为方便后续课程的教学和高等数学模块化教学改革工作的开展, 在符合学生认知习惯, 并总结模块化教学经验的前提下, 也对整个高等数学的教学内容在体系上进行调整, 以期达到知识点间更好的衔接, 学生更易接受. 为便于教学, 本教材精选例题与习题, 难易程度、文字描述力求清晰流畅、深入浅出、通俗易懂.

本教材是在河北工程大学理学院和教务处以及许多数学同仁的关心支持下编写的. 具体分工如下: 第一章由梁景翠、张鸿编写; 第二章、第六章、第七章、第八

章由范杰、刘晓辉、刘立民编写; 第三章由李召群、杨珠编写; 第四章、第十一章由冀铁果、刘晓辉、杨珠编写; 第五章、第十章由张志海、张鸿、刘晓辉编写; 第九章由贾瑞娟、张鸿编写; 第十二章由袁洪芬、杨珠编写.

梁景翠、刘晓辉两位老师完成整个几何图形的描绘, 最后由张志海老师统一进行修改定稿. 在编写老师多次交替审阅、反复修改的基础上, 刘国华、王小胜、高志强、庞彦军等老师审阅了原稿, 并提出许多修改意见, 在此一并表示衷心的谢意.

限于水平, 加之时间仓促, 疏漏与不足之处在所难免, 恳请大家批评指正!

编　者

2015 年 3 月于邯郸

目　　录

第六章　不 定 积 分

第六、七、八章的内容统称为一元函数的积分学. 积分学与微分学密切联系, 共同组成了分析学的基本内容. 积分学的产生与发展源于一些实际问题的解决, 如两千多年前的希腊数学家阿基米德 (Archimedes) 用穷竭法计算出了抛物线弓形的面积, 我国南北朝时期的祖冲之和他的儿子祖暅也曾推导出某些图形的面积和体积, 这些都是用无限小过程处理特殊形状的面积的例子. 虽然求积问题自古以来就被直观地、经验地理解着, 并且得到了正确的计算结果, 但这只是个别问题的解决, 始终缺乏一般的计算方法, 与一门系统学科的形成还相距甚远.

直到十七世纪, 由于天文、航海以及生产技术的发展, 大量的问题亟待解决, 这些问题大致归为以下四类: 第一类是已知距离求速度与加速度以及已知加速度, 求速度与距离; 第二类是求曲线的切线; 第三类是求函数的最大、最小值; 第四类是求曲线的长度、曲线围成的面积、曲面围成的体积以及两个物体之间的引力. 虽然在一些数学家的努力下, 有关微分学问题解决得比较圆满, 积分学中的某些问题也得到了一些好的结果, 但是当时所使用的方法要么不具有普遍性, 要么有的方法本身虽然孕育着有普遍性的含义, 但却没有人能充分理解微分与积分这两类问题之间的相互关系的重要意义, 因而都没有创立微积分. 最终, 牛顿和莱布尼茨在总结前人的方法的基础上, 都各自独立地看到了积分问题是微分的逆问题, 并建立起成熟的具有普遍意义的方法. 由于牛顿和莱布尼茨各自研究的角度不同, 牛顿是利用导数与反导数, 即不定积分来解决微积分问题, 而莱布尼茨则强调微分及 “微分的和”, 因而就形成了不定积分与定积分.

第一节　不定积分的概念与性质

一、原函数与不定积分的概念

在一元函数微分学中, 我们研究了已知函数 $f(x)$, 如何求出它的导数 $f'(x)$ 的问题. 在实际问题中, 经常会遇到已知函数 $F(x)$ 的导数 $f(x)$, 反过来需求函数 $F(x)$ 的情况, 如已知直线运动的速度函数 $v(t)$, 求路程函数 $s(t)$, 这个问题可归结为微分的逆运算, 即不定积分的问题. 下面引入原函数的概念.

定义 1　设函数定义在区间 I 上, 如果存在函数 $F(x)$, 对任一 $x \in I$, 都有

$$F'(x) = f(x), \quad 即\ \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x,$$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

关于原函数的存在性问题, 这里先给出一个结论.

原函数存在定理　如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$, 使对任一 $x \in I$, 都有 $F'(x) = f(x)$.

即连续函数一定有原函数.

例如, 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, 因为 $(x^2)' = 2x$, 所以 x^2 是 $2x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个原函数.

需注意的是, 在区间不连续的函数也可能有原函数.

例如, 函数

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

是函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos \dfrac{1}{x} + \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 的一个原函数, 而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处间断.

但是, 若函数在区间上有第一类间断点, 则函数在该区间上一定没有原函数.

例如, 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数 $F(x)$, 且 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, 则因 $F(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续、可导, 且

$$F'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+0} f(\xi) = f(x_0 + 0),$$

$$F'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0-0} f(\xi_1) = f(x_0 - 0),$$

所以, 无论 $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ 是否相等, 都不能等于 $f(x_0)$, 这与 $F'(x) = f(x)$ 在区间上成立矛盾.

根据定义不难获知:

(1) 原函数概念首先与考察的区间有关, 即同一个函数在不同区间上的原函数不一定相同.

例如, 设 $f(x) = |x|$, 则在 $(0, +\infty)$ 内, $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{x^2}{2}$, 而在 $(-\infty, 0)$ 内 $f(x)$ 的一个原函数则是 $-\dfrac{x^2}{2}$.

(2) 一个函数的原函数若存在, 则它的原函数肯定不是唯一的.

事实上, 若 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$, 则对任意常数 C, $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数.

因此, 若找到 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$, 按 $F(x)+C$ 的方法可写出它的无限多个原函数, 将其组合到一起便构成 $f(x)$ 的一个原函数族 $\{F(x)+C|\,C\in\mathbf{R}\}$, 那么此函数族是否包含了 $f(x)$ 的所有原函数呢? 为说明该问题, 我们考察 $f(x)$ 的任意两个原函数之间的差别.

若 $F(x)$ 与 $G(x)$ 同为 $f(x)$ 的原函数, 则

$$F'(x)=f(x),\quad G'(x)=f(x),$$

因而有

$$(G(x)-F(x))'=G'(x)-F'(x)=0,$$

故有

$$G(x)-F(x)=C,$$

即 $G(x)=F(x)+C$.

上面的讨论说明:$f(x)$ 的任意两个原函数之间仅差一个常数; 函数族 $\{F(x)+C|\,C\in\mathbf{R}\}$ 实际上是由 $f(x)$ 的全体原函数构成的.

定义 2　函数 $f(x)$在区间 I 上的全体原函数称为 $f(x)$(或 $f(x)\mathrm{d}x$) 在区间 I 上的不定积分, 记为$\int f(x)\mathrm{d}x$, 其中记号 $\int$ 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式, x 称为积分变量.

因此, 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 且用 $F(x)+C$(C 是任意常数) 来表示函数族 $\{F(x)+C|\,C\in\mathbf{R}\}$, 则 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分, 即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

不定积分的几何意义: 函数 $f(x)$ 的任意一个原函数 $F(x)$ 的图形称为 $f(x)$ 的一条积分曲线, 而函数 $f(x)$ 的不定积分 $F(x)+C$ 的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线族. 积分曲线族中的任意一条曲线都可以由曲线 $y=F(x)$ 沿 y 轴平移得到, 因此, 积分曲线族中的所有曲线在横坐标相同的点处具有平行的切线 (图 6-1).

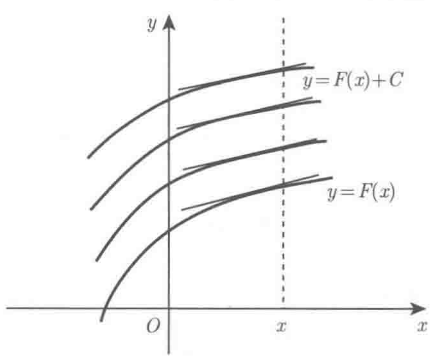

图 6-1

例 1　求 $\int x^3 \mathrm{d}x$.

解　由于 $\frac{x^4}{4} = x^3$, 所以 $\frac{x^4}{4}$ 是 x^3 的一个原函数, 因此

$$\int x^3 \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C.$$

例 2　求 $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.

解　当 $x > 0$ 时, 由于 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 所以 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内的一个原函数, 所以在 $(0, +\infty)$ 内, $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln x + C$.

当 $x < 0$ 时, 由于$[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$, 所以 $\ln(-x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 内的一个原函数, 所以在 $(-\infty, 0)$ 内, $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln(-x) + C$.

综上, 在 $(-\infty, +\infty)$, 有 $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln |x| + C$.

例 3　设曲线通过点 $(1, 2)$, 且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍, 求此曲线的方程.

解　设所求曲线方程为 $y = f(x)$, 由已知, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$, 即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数.

因

$$\int 2x \mathrm{d}x = x^2 + C,$$

故必有某个常数 C, 使 $f(x) = x^2 + C$. 因为所求曲线通过点 $(1, 2)$, 故

$$2 = 1 + C, \quad C = 1,$$

所以所求曲线方程为

$$y = x^2 + 1.$$

二、不定积分的性质与基本积分表

性质 1　设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在, 则

$$\int [f(x) \pm g(x)] \mathrm{d}x = \int f(x) \mathrm{d}x \pm \int g(x) \mathrm{d}x.$$

证　将等式右端求导, 得

$$\left[\int f(x) \mathrm{d}x \pm \int g(x) \mathrm{d}x\right]' = \left[\int f(x) \mathrm{d}x\right]' \pm \left[\int g(x) \mathrm{d}x\right]' = f(x) \pm g(x).$$

性质 1 对于有限个函数都是成立的.

性质 2 设函数 $f(x)$ 的原函数存在, k 为非零常数, 则

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x.$$

既然积分运算是微分运算的逆运算, 那么很自然地可以从导数公式得到相应的积分公式. 下面把一些基本的积分公式列成一个表, 这个表通常称为积分表.

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C(k$ 是常数).

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C\ (\mu \neq -1)$.

(3) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$.

(4) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$.

(5) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$.

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

(8) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$.

(9) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$.

(10) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$.

(11) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$.

(12) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

(13) $\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

在不定积分计算中, 因为积分结果是被积函数的原函数, 所以只要对积分结果求导, 看它的导数是否等于被积函数, 就能判断积分的求解正确与否.

三、直接积分法

所谓直接积分法就是在函数基本运算下先将不定积分的被积函数用已知不定积分表达式的函数表示出来, 而后利用不定积分的性质和已知积分表达式的函数的

不定积分计算出所求函数不定积分的一种方法.

例 4 求 $\int x^3\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解 $\int x^3\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int x^{\frac{7}{2}}\mathrm{d}x=\frac{x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1}+C=\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+C.$

例 5 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}=\int x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=-2x^{-\frac{1}{2}}+C.$

例 6 求 $\int\frac{2-x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解
$$\int\frac{2-x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{-x^4-x^2+x^2+1+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int\left(-x^2+1+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=x-\frac{x^3}{3}+\arctan x+C.$$

例 7 求 $\int(2^x+3^x)^2\,\mathrm{d}x$.

解
$$\int(2^x+3^x)^2\,\mathrm{d}x=\int(4^x+2\cdot6^x+9^x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2\cdot6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C.$$

例 8 求 $\int\tan^2x\mathrm{d}x$.

解 $\int\tan^2x\mathrm{d}x=\int(\sec^2x-1)\mathrm{d}x=\int\sec^2x\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x=\tan x-x+C.$

例 9 求 $\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

解
$$\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}(1-\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1-\cos x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int\mathrm{d}x-\int\cos x\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C.$$

例 10 求 $\int\sec x\,(\sec x+\tan x)\mathrm{d}x$.

解
$$\int\sec x\,(\sec x+\tan x)\mathrm{d}x=\int(\sec^2x+\sec x\tan x)\mathrm{d}x$$
$$=\tan x+\sec x+C.$$