算學小叢書

集合論初步

蕭文燦著

商務印書館發行

算學小叢書

集合論初步

蕭文燦著

商務印書館發行

(52809)

算學小叢書 集合論初步

著作者 蕭文燦

發行者 商務印書館
上海河南中路二一一號

印刷者 商務印書館

上海及各地
發行所 商務印書館

1939年5月初版
1950年12月再版
基價 6 元

目　錄

I　基本概念

II　可數集合與不可數集合

III 基數或濃度

IV 有序集合

V 整序集合

集合論初步

集合論 (theory of sets, Mengenlehre) 爲德意志 Halle 大學教授坎托耳 (Georg Cantor) (1845 年 3 月 3 日生——1918 年 1 月 6 日歿) 所創造之數學一分科，乃論無窮之物之集合者也。據氏自述，彼發表之集合論，曾費十年之躊躇。蓋其中所含之思想與常識相反者頗多，而爲常識意想不到者亦復不少。實爲富於革命色彩而又有巨大建設之理論科學。從來對於'無窮'一概念甚爲漠然。自集合論出，不僅有精確嚴正之理論，且於其上建築富麗堂皇之王宮。時至今日，集合論已浸入數學各部門中。苟不知集合論，無論何門數學書皆難透澈了解。其重要實非數學任何分科所可比擬。本篇之目的，在將此精深嚴密之理論爲平易之敍述。使無何等之預備知識者得而卒讀焉。

I 基本概念

1. 集合之意義 吾人直觀或思維之對象，如爲相異而確

定之物，其總括之全體即謂之集合(aggregate or set, Menge)，其組成此集合之物謂之集合之元素(element)。通常用大寫字母表示集合，如 A, B, C 等，用小寫字母表示元素，如 a, b, c 等。若集合 A 係由 $a, b, c, \cdots\cdots$ 諸元素所組成，則表如 $A=\{a, b, c, \cdots\cdots\}$，而 a 爲 A 之元素，亦常有用 $a \in A$ 之記號表之者。a 非 A 之元素則記如 $a \overline{\in} A$。

上之定義中，其所用之'相異'與'確定'之二語，殊有說明之必要。所謂相異者取二物於此，其爲同一，其爲相異，可得而決定。而集合所含之元素乃有彼此不同之意味。所謂確定者，此物是否屬於此集合，一望而知，至少其概念上可以斷定其是否爲該集合之元素。蓋合於某條件之集合，須其界限分明，不容有模糊不清之弊。

例如 1, 2, 3 三元素可組成一集合，單位長直線上之一切點可組成一集合，反之如甚大之數，或與 P 接近之點，則不能爲一集合。因其界限不清，不能確定某數或某點是否屬於該集合也。他如自然數之全體，代數數之全體，超越數之全體等，皆各能組成一集合。蓋一數是否爲超越數，雖屬極難決定之問題，然一數爲超越數則爲超越數，不爲超越數則不爲超越，固有其確然之概念，毫無模棱兩可之餘地。

組成集合之元素如爲有窮，則曰有窮集合(finite aggregate)。元素無窮則曰無窮集合(infinite aggregate)。如一切自然數之集合是。然此之所謂‘無窮’，與通常極限之‘無窮大’稍異其趣。蓋所謂極限之無窮大者，不過爲陳述之辭，並非一數，無確然之界限者也。而此之‘無窮’則爲自然數之數。自然數之數有幾多卽有幾多，吾人思維之活動有其確然之界限，固不能或多或少也。吾人可名極限之無窮曰‘假無窮大’，而此之無窮乃‘眞無窮大’。集合論中所論之集合，皆無窮集合。

無一元素之概念，亦得視爲一集合，可特名之曰空集合(leere Menge)。

2. 部分集合 兩集合 A, B 之元素完全彼此相同者，可以 $A=B$ 表之。

有二集合 A, B 於此，B 之各元素同時爲 A 之元素時，則謂 B 爲 A 之部分集合(sub-aggregate, Teilmenge)。A 之自身亦可視爲 A 之部分集合。若 B 爲 A 之部分集合而 A 與 B 不相同，卽 B 之元素完全爲 A 之元素，而 A 之元素則否，則謂 B 爲 A 之眞部分集合(pure sub-aggregate, echte Teilmenge)，記如 $B \subset A$。若單稱 B 爲 A 之部分集合，則可記如 $B \subseteqq A$。

由定義，$A \subseteqq B$，$B \subseteqq C$；則 $A \subseteqq C$ 乃屬甚明之事。

3. 對應及等價 吾人能將無窮多之數及無窮多數之計算加以處理者，卽基於‘對應’及‘等價’之基礎觀念也。今有甲乙二集合，甲之一物與乙之一物互相關聯之思維作用，其最原始者卽互相對應之思維作用。苟無此則卽無何等之思維作用可言。吾人由此根本思維活動之對應觀念，可導出集合等價之觀念，其定義如次：

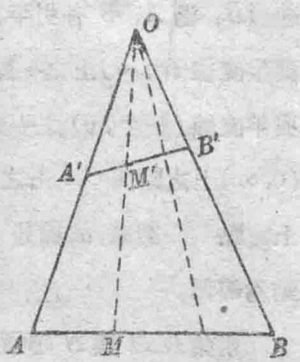
集合 M 之各元素各與集合 N 中之唯一元素對應，反之，集合 N 之各元素亦各與集合 M 中之唯一元素對應，如此稱爲一一對應 (one-to-one correspondence)。凡兩集合之各元素有如此一一對應之關係者，謂此兩集合爲等價(equivalent)。

例如集合 M 乃由自然數之全體 $\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$ 所組成，集合 N 爲正偶數之全體 $\{2, 4, 6, 8, \cdots\cdots\}$ 所組成，則此兩集合卽有如次之對應：

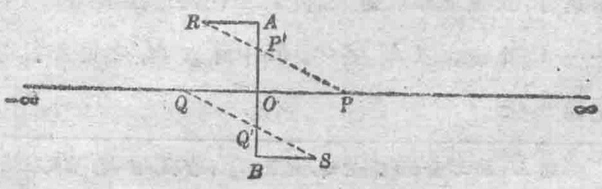
$$\begin{array}{cccccc} M: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ N: & 2 & 4 & 6 & 8 & 10\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

卽 M 集合中之 n 對應於 N 集合中之 $2n$，如此則 M 之一元素恰對應於 N 之一元素，反之亦然，則此 M 集合與 N 集合卽爲等價。以吾人之常識觀之，集合 N 之偶數皆包含於集合 M 之

中，是集合 M 之無窮大應比集合 N 之無窮大為大。然實際上此兩集合乃一一對應者，故在某種意味上可視為此無窮大相等。故無窮集合之部分集合與全體集合不如通常之有窮集合，其部分一定比全體為小。此再觀下之二例更明：今有二線 AB 與 $A'B'$，線分 AB 上一切點之集合 I，與線分 $A'B'$ 上一切點之集合 II，乃一一對應。何以言之？如圖聯 AA' 與 BB' 相交於 O。由 O 引任意之直線 OM，與 AB，$A'B'$ 各相交於 M 及 M'。M 在 AB 上，由 A 動至 B 時，則 M' 在 $A'B'$ 上，由 A' 動至 B'。故 M 與 M' 恰是互為對應。是以集合 I 與集合 II 為等價。



不僅此也。無限直線上（兩端除開）之點，亦與有限直線上之點為等價。如圖於無限直線$(-\infty, \infty)$上之一點 O 引垂



線 AB，過 A, B 各引平行於 $(-\infty, \infty)$ 之線 AR, BS。聯 R 與半直線 $(0, \infty)$ 上之一點 P，則與 AB 相交於 P'。同樣聯 S 與半直線 $(-\infty, 0)$ 之一點 Q，則與 AB 相交於 Q'。如此則 $(0, \infty)$ 上之點與 OA 上之點一一對應；$(-\infty, 0)$ 上之點與 OB 上之點一一對應，故線分 AB 上之點與無限直線 $(-\infty, \infty)$ 之點為等價。

兩集合 M 與 N 等價，可用記號

$$M \sim N$$

表之。而 $M \sim N$, $N \sim P$，則 $M \sim P$，亦並非難明之理。

關於無窮集合有次之顯著定理：

定理 1. M 若為無窮集合，則必含與自身等價之真部分集合。

【證明】 設無窮集合 M，今於 M 中取出一元素 m_1，再由其殘餘之部分取出第二元素 m_2，再由其殘餘之部分取出第三元素 m_3。如斯繼續取出 $m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots, M_n, \cdots\cdots$，因 M 為無窮集合，故無全部取盡之時。於是遂得一無窮集合 $\{m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots\}$。此集合以 M_1 名之。M 中除去 M_1 之集合名為 M_2*，即記如

* 如 M_1 將 M 全部取盡之時，實際 M_2 不存在，即 M_2 看為空集合之時。

$$M=M_1+M_2。\tag{1}$$

今於 M_1 中取其偶數作成集合 $N_1=\{m_2, m_4, m_6, \cdots\cdots\}$，則 N_1 爲 M_1 之眞部分集合，因而亦爲 M 之眞部分集合。

今將 M_2 與 N_1 成立之集合

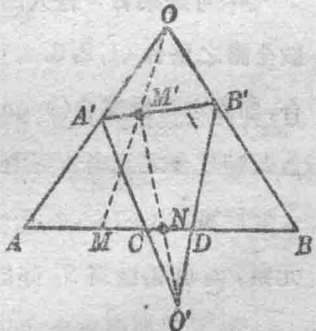
$$M'=N_1+M_2\tag{2}$$

考之，則 M' 明爲 M 之眞部分集合。

M_1 與 N_1 有如次之關係，一一對應。

$$\begin{array}{llll} M_1: & m_1 & m_2 & m_3\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ N_1: & m_2 & m_4 & m_6 \end{array}$$

又(1)右邊 M_2 之各元素 a，與(2)右邊 M_2 之各元素 a，其本身對應。故 M 與 M' 一一對應。因而 M 與 M' 等價。且 M' 爲 M 之眞部分集合。故上之定理成立。



與自己等價之眞部分集合不限於如上者，有種種之方法可得。例如線分 AB 上之點與其一部分 CD 上之點，能如右圖一一對應。即於線分 AB 外一點 O，聯 OA，

OB 二線，於又一點 O' 聯 $O'C$, $O'D$ 與 OA, OB 各相交於 A', B'。如圖可見 AB 線上任意一點 M 與 CD 線上之一點 N 相對應。

此為無窮集合之特性，所以異於有窮集合者也。因是有許多作家即取此為無窮集合之定義。即

集合 M 有與之等價之眞部分集合 M' 存在者，曰無窮集合。反之，無論取何樣之眞部分集合，而無有與其自身等價之時，稱 M 曰有窮集合。

蓋此有窮與無窮之定義與吾人普通有窮無窮之思想毫無衝突之處。如由 5 個物所成之集合，無論如何不能與由 3 個或 4 個所成之集合對應。反之，如為無窮集合，則如上所舉之例，可以有其等價之眞部分集合存在。

4. 可數集合　吾人所見最簡單之無窮集合，莫過於自然數全體之集合 $\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\}$。凡與此自然數一一對應之集合，即謂之可數集合(enumerable set, abzäbibare Menge)，蓋此種集合之元素皆可附以 1, 2, 3,……之番號也。故可數集合皆能書為 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\}$。$a_1$ 即番號為 1，亦即與 1 對應之元素，a_2 即番號為 2，亦即與 2 對應之元素，以下準此。

若 M 為有窮集合，則至少亦為可數集合。

定理2. 無窮集合常含一可數之部分集合。

【證明】 設 M 爲無窮集合。由 M 中任意取出一元素 m_1，於其殘餘之部分又任意取出一元素 m_2，更於其殘餘部分取出 m_3，如斯順次行之，取出 $m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots$。因 M 爲無窮集合，故無取盡之時，因而 $m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots$ 亦爲無窮之多。今將取出之元素之全部 $\{m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots\}$ 視爲一集合，此集合明明爲 M 之部分集合，且其元素可附以 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ 之番號，故定理云云。

因此可數集合於某意味上可視爲無窮集合之最小者。

例如由 $\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$ 中，除去有限個之集合 $\{2, 3, 4, \cdots\cdots\}$，仍爲可數集合。何則？蓋可以如

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

對應也。他如正偶數或正奇數之全體，自亦爲可數集合。

可數集合之性質甚多，由此可以引出有趣之結果甚多，將於次章詳論之。

5. 集合之和，差，積

(i) **和集合** 任意個集合 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_n, \cdots\cdots$（其個

數可超過可數以上)。今有一集合 S,含一切 $M_n(n=1,2,\cdots\cdots)$ 之元素之全體者,則謂 S 爲集合 $M_1, M_2,\cdots\cdots$ 之和。常以

$$S=\mathfrak{S}M_n,$$

或

$$S=M_1+M_2+M_3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

表之。如 M_i,M_k 皆含有同一元素 a 時,則規定 S 中只取一次 a。

例如 $M_1=\{1,2,3,\cdots\cdots\}$, $M_2=\{0,1,2,\cdots\cdots\}$ 時,則

$$M_1+M_2=\{0,1,2,3,\cdots\cdots\}。$$

若集合 $M_1, M_2, M_3,\cdots\cdots$ 爲可數個時,其和可書如

$$S=M_1+M_2+\cdots\cdots+M_n+\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}M_n。$$

若爲

$$M_1\subset M_2\subset M_3\cdots\cdots\subset M_n,$$

則

$$S=M_1+M_2+\cdots\cdots+M_n=M_n。$$

(ii) 餘集合 若 $M\supset N$ 時,由 M 中減去 N,其剩餘元素全體之集合,名爲 M 與 N 之差,以 $M-N$ 表之。

(iii) 積集合 任意個集合 $M_1, M_2,\cdots\cdots$, 此等一切 M_i 之共通元素全體之集合,名爲 $M_1, M_2,\cdots\cdots$ 之積或共通集合 (Durchnitt)。以

$$D=\mathfrak{D}M_n$$

表之,或書如