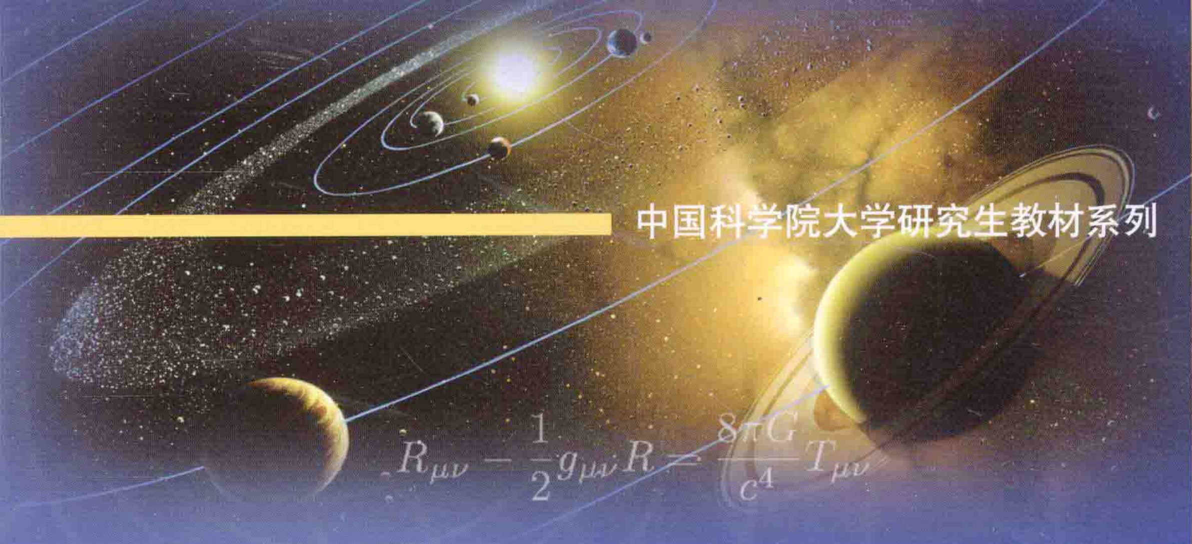

中国科学院大学研究生教材系列

相对论天体力学和天体测量学

Relativistic Celestial Mechanics and Astrometry

〔德〕迈克尔·索菲（Michael H. Soffel）
韩文标（Wen-Biao Han） 编著

科学出版社

中国科学院大学研究生教材系列

相对论天体力学和天体测量学

Relativistic Celestial Mechanics and Astrometry

〔德〕迈克尔·索菲 (Michael H. Soffel)
韩文标 (Wen-Biao Han) 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书从微分几何和张量代数开始，在简略但新颖地讨论了牛顿天体力学之后，逐步引入了广义相对论的主要理论体系和内容. 接着，着重阐述了相对论天体力学和天体测量学的基本概念和理论体系. 特别是对多体引力系统的后牛顿运动方程以及相对论天文参考系做了详细、系统的讨论，给出了完整的理论体系和数学表达式. 对相对论在现代基本天文学中的应用有着独到的描述，特别是书中关于天文观测量的有关表述.

本书可供从事相对论天体力学和天体测量学、基本天文学以及广义相对论研究的学者、研究生等阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

相对论天体力学和天体测量学/(德)索菲(Soffel, M. H.), 韩文标编著. —北京: 科学出版社, 2015

中国科学院大学研究生教材系列

ISBN 978-7-03-043425-8

Ⅰ. ①相… Ⅱ. ①索… ②韩… Ⅲ. ①相对论–天体力学–研究生–教材 ②天体测量学–研究生–教材 Ⅳ. ①P13②P12

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 031520 号

责任编辑: 赵彦超 周 涵／责任校对: 张凤琴
责任印制: 张 倩／封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 5 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16
2015 年 5 月第一次印刷 印张: 10
字数: 184 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

致　谢

本书在写作过程中, 得到了南京大学黄天衣教授, 南京师范大学须重明教授, 中国科学院上海天文台廖新浩研究员、唐正宏研究员、黄乘利研究员、赵铭研究员、王广利研究员和陶金河研究员的帮助, 得到了中国科学院外籍专家特聘教授计划 (项目编号：2013T2J0044) 的支持.

本书的出版得到国家自然基金委面上项目 (项目编号：11273045) 以及中国科学院青年创新促进会的大力资助. 在此一并感谢!

前　言

中国科学院上海天文台的特聘教授须重明是我结识超过 30 年的挚友. 这么多年来, 我们一起深入研究了和后牛顿理论相关的科学课题. 须重明教授以及夫人吴雪君教授和我在德国西南部的美丽小镇蒂宾根 (Tübingen) 一起工作的时候, 我们有幸能够和法国物理学家 Thibault Damour 合作并在 1991—1994 年发表了后来以我们的名字命名的一系列论文 —— 著名的 DSX 理论. 对爱因斯坦引力理论采用一阶后牛顿近似, 我们用优美的方式给出了由 N 个任意成分和形状的天体构成的多体系统的相对论天体力学, 天体的外部引力场则用相对论多极矩来描述.

因为须重明教授, 我开始认识这个古老的东方国家, 特别是中国的东南部. 他不仅带我领略了中国的美好山河, 比如黄山和桂林, 而且激发了我对中国历史、文化、艺术以及今日中国各方面的浓厚兴趣. 正因为如此, 当中国科学院上海天文台邀请我利用学术休假期间来上海工作时, 我愉快地答应了. 非常感谢唐正宏研究员和陶金河研究员的帮助, 我获得了中国科学院外籍专家特聘教授计划的资助并于 2014 年 4 月 15 日到 6 月 15 日期间在上海工作. 除了学术研究合作, 我在此期间还需要为上海天文台的研究生讲授 "相对论天体力学和天体测量学" 的系列课程. 为此, 我准备好了一份详尽的英文讲义. 在授课期间, 我发现有一些学生对该学科非常感兴趣, 由此产生了将我的讲义译成中文教材在中国出版的想法. 本书的共同作者韩文标博士承担了讲义的翻译工作, 并完善和增加了本书的许多内容.

这本中文教材应该可以帮助对此学科感兴趣的中国学生更容易地理解相对论基本天文学的核心内容并体会本书中后牛顿形式的美妙之处, 同时也可供相关领域的科研工作者参考. 由于本书写作过程较为仓促, 疏漏及不足之处在所难免, 希望广大读者批评指正.

迈克尔 · 索菲 (Michael H. Soffel)

2015 年 1 月

目录

Contents

第 1 章　微分几何基础

微分几何是广义相对论的数学语言, 本章介绍一些微分几何的基础知识. 简单来说, 微分几何是用来描述所谓的 "流形": 局部可以看成欧几里得空间, 全局则可能是比较复杂的形状 (如球面、环面等, 见图 1.1). N 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 本身是最简单的一种 N 维流形.

数学上一个 N 维流形可以写成 $(\mathcal{M}, \{U_\alpha, \Phi_\alpha\})$, 其中 $\mathcal{M}$ 是一组点的集合, $\{U_\alpha\}$ 是 $\mathcal{M}$ 中的开集的集合,

$$\mathcal{M} = \bigcup_\alpha U_\alpha$$

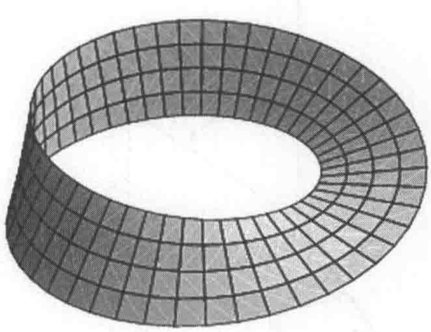

图 1.1　流形示意图

Φ_α 是将 (U_α) 映射到 N 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的可微函数: $U_\alpha \to \mathbb{R}^n$. 对于 $\mathcal{M}$ 上的每一个点 p, 至少存在一个 (U_α) 使得 $p \in U_\alpha$. 这样, 我们就说 Φ_α 定义了点 p 的邻域 U_α 上的一个局部坐标系.

1.1　坐标、微分和张量

N 维流形 $\mathcal{M}$ 中的某一区域 $\mathcal{R}$, 其上的点由坐标 x^μ 描述: $\mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$, $x^\mu = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$.

例 1.1　二维欧氏空间可以用大家熟知的笛卡儿直角坐标系描述 $(x^1, x^2) = (x, y)$, 或者也可以用极坐标 $(x'^1 = r, x'^2 = \phi)$ 来描述. 这两种坐标系之间的变换关系如下

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi, \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \\ y &= r\sin\phi, \quad \phi = \arctan y/x. \end{aligned} \tag{1.1}$$

例 1.2　下面来看三维欧氏空间. 它可以由直角坐标来描述

$$x^\mu = (x, y, z)$$

同样, 也可以用球坐标 (图 1.2) 来描述

$$x'^\mu = (r, \theta, \phi)$$

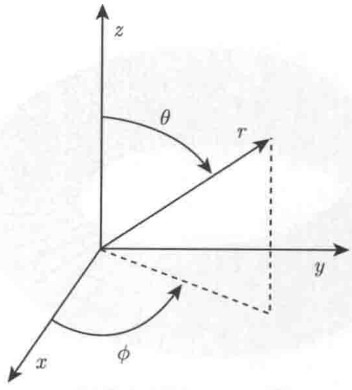

图 1.2　三维欧氏空间中的球坐标 ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$)

这两个坐标系之间的坐标变换关系 $x^\mu \to x'^\nu$ 为

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \phi &= \arctan\frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

其逆变换形式为

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta.
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

坐标的微分 $\mathrm{d}x^\mu$ 称为坐标微分. 坐标微分的坐标变换遵循链式规则. 例如, 对三维欧氏空间中的直角坐标和球坐标

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial x}{\partial x'^\nu}\right)\mathrm{d}x'^\nu \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial x'^\nu}\right)\mathrm{d}x'^\nu \\
&= \frac{\partial x}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi \\
&= (\sin\theta\cos\phi)\,\mathrm{d}r + (r\cos\theta\cos\phi)\,\mathrm{d}\theta - (r\sin\theta\sin\phi)\,\mathrm{d}\phi, \\
\mathrm{d}y &= \frac{\partial y}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi \\
&= (\sin\theta\sin\phi)\,\mathrm{d}r + (r\cos\theta\sin\phi)\,\mathrm{d}\theta + (r\sin\theta\cos\phi)\,\mathrm{d}\phi, \\
\mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial z}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial z}{\partial \phi}\,\mathrm{d}\phi \\
&= \cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

注意在式 (1.4) 中的第一行, 我们用了爱因斯坦求和约定：成对出现的指标自动求和. 因此这种情况下, 不需要在表达式中保留求和符号. 这种成对出现的指标又称为哑指标.

因此, 坐标变换的一般形式就是

$$
\mathrm{d}x'^\nu = \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right)\mathrm{d}x^\mu, \tag{1.5}
$$

矩阵 $\partial x'^\nu/\partial x^\mu$ 称为 (逆) 雅可比矩阵.

和坐标微分遵循同样坐标变换规则的量称为逆变矢量：

$$
A^\mu \to A'^\nu : A'^\nu = \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right)A^\mu. \tag{1.6}
$$

更一般地, 量 $T^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\cdots\nu_m}$ 被称为 n 阶逆变、m 阶协变张量, 如果它遵循如下的坐标变换规则

$$T'^{\lambda_1\cdots\lambda_n}_{\sigma_1\cdots\sigma_m} = \left(\frac{\partial x'^{\lambda_1}}{\partial x^{\mu_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x'^{\lambda_n}}{\partial x^{\mu_n}}\right)\left(\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\sigma_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x^{\nu_m}}{\partial x'^{\sigma_m}}\right)T^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\cdots\nu_m}. \tag{1.7}$$

我们又称上述张量是 $m+n$(指标的总数量) 阶张量. 从这个定义来看, 式 (1.6) 中的逆变矢量 A^μ 是一阶逆变张量. 同样地, 也可以定义协变矢量A_μ, 即一阶协变张量. 按照式 (1.7) 中的变换规则

$$A'_\nu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right)A_\mu. \tag{1.8}$$

后面会看到, 任何张量虽然都可以写成逆变或者协变形式, 但是有些量, 如速度等更自然地表现为逆变量, 而有些量如梯度等则更自然地表现为协变量.

我们熟知的标量正是张量的特例 —— 0 阶张量. 之所以引入张量 $T^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\cdots\nu_m}$, 是因为很多复杂的物理量不能简单地用标量或者矢量来描述. 一个张量如果满足 $T_{\mu\nu}=T_{\nu\mu}$, 我们称之为对称张量; 一个张量如果满足 $T_{\mu\nu}=-T_{\nu\mu}$, 我们称之为反对称张量. 可以从一般张量构造一个对称或者反对称张量

$$\begin{aligned} A_{(\mu\nu)} &= \frac{1}{2}(A_{\mu\nu}+A_{\nu\mu}), \\ A_{[\mu\nu]} &= \frac{1}{2}(A_{\mu\nu}-A_{\nu\mu}). \end{aligned} \tag{1.9}$$

式中, 指标上所加的 ( ) 和 [ ] 分别表示对称和反对称.

假如一组张量的每一个逆变指标都有一个相同的协变指标, 根据爱因斯坦求和约定, 所有的这些指标自动求和. 例如

$$T^{\mu\nu}_{\alpha\beta}A_\mu B^{\alpha\beta}_\nu$$

从张量的变换规则可以清晰地看出是一个标量, 即一个坐标无关的量. 标量场是一种特殊的张量场, 它既无逆变也无协变指标. 在一点 $p\in\mathcal{M}$ 上定义的标量场是一个确定的实数 (也可以是复数), 这个数值在坐标变换下保持不变. 在后面我们处理一些物理问题时, 会清楚地看到, 观测量, 即可以测量的量, 必须用标量来描述, 其值和用于对它们进行计算的坐标系无关.

练习 1.1 用一般的坐标变换证明 $T^{\mu\nu}_{\alpha\beta}A_\mu B^{\alpha\beta}_\nu$ 是标量.

练习 1.2 构造一个完全对称以及一个完全反对称的三阶张量.

练习 1.3 二阶 N 维对称 (反对称) 张量分别有多少个独立分量?

注 1.1 张量的一个重要特性就是它和坐标系无关, 是客观的几何量 (图 1.3). 因此在讨论张量时, 并不需要事先定义坐标系. 由于这种特性, 张量被用来描述各种物理量. 我们熟知的标量和矢量是张量的特殊形式, 它们自然是和坐标无关的量. 当然, 张量在具体坐标系中的分量是和坐标有关的.

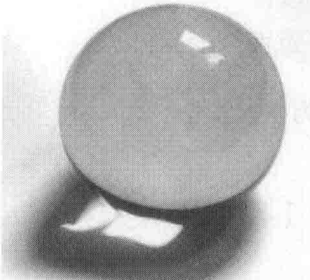

图 1.3 球是三维欧氏空间中的一个几何体, 它可以用许多不同的坐标系来描述. 类似地, 我们可以说, 张量就是一个和坐标无关的几何体

1.2 张 量 代 数

按张量的定义我们可以得到如下的运算规则:

(1) 两个同类型张量的和仍然是一个张量;

(2) 张量和一个实数的乘积仍然是一个张量;

(3) 如果 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\beta_1\cdots\beta_m}$ 和 $S^{\gamma_1\cdots\gamma_o}_{\delta_1\cdots\delta_p}$ 是张量, 则

$$G^{\alpha_1\cdots\alpha_n\gamma_1\cdots\gamma_o}_{\beta_1\cdots\beta_m\delta_1\cdots\delta_p} = T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\beta_1\cdots\beta_m} \cdot S^{\gamma_1\cdots\gamma_o}_{\delta_1\cdots\delta_p}$$

也是一个张量;

(4) 如果 $T^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\beta_1\cdots\beta_m}$ 是一个张量, 则下式也是一个张量 (对 σ 求和)

$$T^{\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}\sigma}_{\beta_1\cdots\beta_{m-1}\sigma}.$$

这称为缩并, 它使得协变和逆变指标的数量各减少一个. 同样, 任意一对指标 (一个协变一个逆变) 都可以进行缩并操作.

有三种特殊的张量十分重要, 其分量在所有的坐标系中相等:

(1) Kronecker delta δ^μ_ν. 仅当 $\mu=\nu$ 时, $\delta^\mu_\nu=1$, 其余为 0;

(2) Levi-Civita 张量, 定义如下

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\equiv\begin{cases}+1, & \text{如果 } \alpha\beta\gamma\delta \text{ 是某个确定次序的偶数次置换}\\ -1, & \text{如果 } \alpha\beta\gamma\delta \text{ 是某个确定次序的奇数次置换}\\ 0, & \text{任意两个指标相同}\end{cases}$$

(3) 零张量, 即所有分量为零的张量.

1.3　协 变 导 数

下面我们假设标量、矢量或者张量场在流形 $\mathcal{M}$ 某一区域可微. φ 是 $\mathcal{M}$ 上的一个标量场, 则

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi\equiv\varphi_{,\mu}=B_\mu$$

是一个协变的矢量场, 因为坐标变换 $x^\mu\to x'^\nu$ 导致

$$B'_\nu=\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\varphi'=\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\varphi=\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi=\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right)B_\mu.$$

也就是说, 标量场的偏导数产生了一个张量场. 但是对矢量或者更高阶张量场的偏导数, 情况却不同. 例如, 对于一个逆变矢量场, 有

$$\mathrm{d}A'^\nu=\mathrm{d}\left[\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right)A^\mu\right]=\left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\mu\partial x^\sigma}\right)\mathrm{d}x^\sigma\,A^\mu+\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right)\mathrm{d}A^\mu.$$

我们发现, 只有对于线性的坐标变换, $\mathrm{d}A^\mu$ 才会按照矢量的方式进行变换.

因此, 需要引入一种对张量场的导数, 使得结果仍然是新的张量. 为此考虑一个沿着曲线 $\gamma(\lambda)$ 上的可微逆变矢量场 A^μ, 如图 1.4 所示. 首先在欧氏空间的直角坐标系下, 考虑一个常矢量场, 即 $\mathrm{d}A^\mu(x^\nu)=0$. 现在我们转换到另一个坐标系 x'^ν 下, 则

$$A'^\nu=\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right)A^\mu$$

一般情况下不再是一个常矢量场. 沿着 $\gamma(\lambda)$, A'^ν 将根据下式变化